Два замечательных предела.

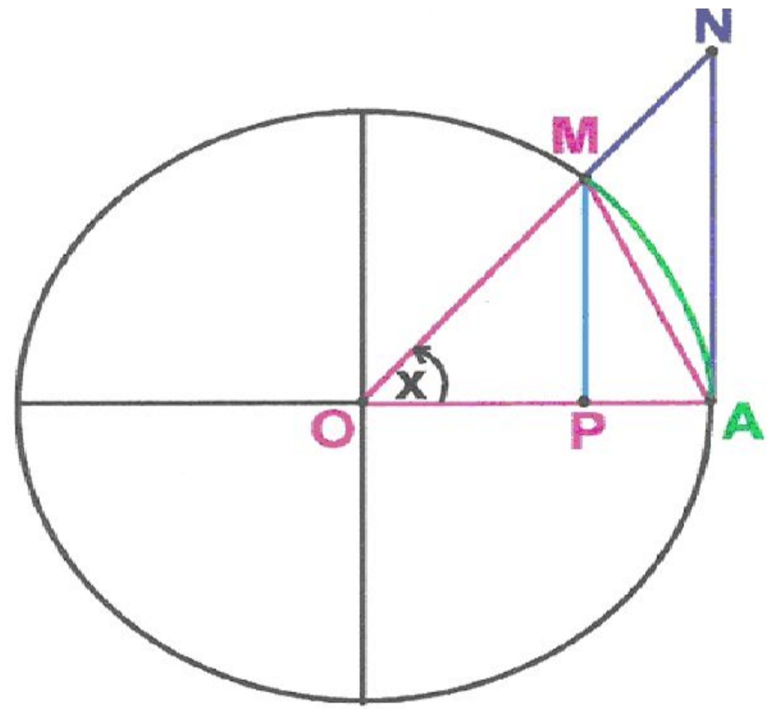
Подготовил преподаватель Ускова С.В.
«Красногорский колледж»

Среди множества пределов, которые встречаются в математике и других дисциплинах, особое место занимают по их значению два предела, которые называются **замечательными**.

К первому замечательному пределу относится предел

$$\boxed{\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x}\right)}$$

Если воспользоваться для вычисления его теоремой о пределе частного, то получим $\lim\limits_{x \to 0} x=0$;$\lim\limits_{x \to 0} \sin x=0$, имеем предел вида $\frac{0}{0}$,ответ не определён, в этом случае надо попытаться преобразовать функцию, стоящую под знаком предела, но никаких видимых ориентиров для преобразования отношения $\frac{\sin x}{x}$ нет. Что же делать?



Математики нашли выход из этого положения, они прибегли к геометрическим соображениям, которые заключаются в следующем.

Возьмём окружность радиуса OA = R = 1 и некоторый угол X с вершиной в центре окружности (рис. 4). **Проведём далее хорду AM и касательную AN, пересекающую продолжение радиуса OM в точке N.**

Из рисунка видно:

SΔAOM <S кругового сектора AOM< SΔAON (1)

SΔAOM = ½ OA · MP (2)

Sкр. сектора AOM= ½ OA·MA (3)

SΔAOM = ½ OA ·AN (4)

Представляя из (2) (3) и (4) в (1) получим:

OA · MP/2< OA · MA/2 < OA ·AN/2 (5)

Т.к. OA=R=1 после умножения на 2 получим: MP<AM<AN (6)

Т.к MP=sin x AN=tg x AM=x поэтому (6) принимает вид: sin x<x< tg x или sin x<x<sin x/cos x (7)

Т.к X - острый угол, то sin x -величина положительная; Разделив неравенства (7) на sin x получим

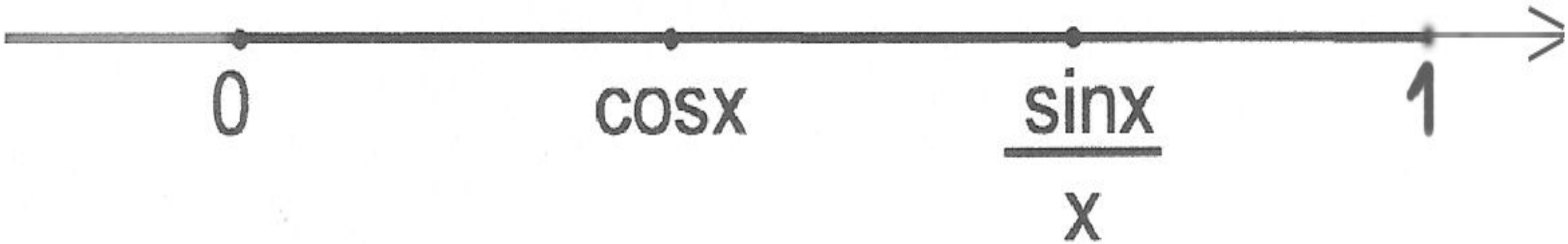
$$1< \frac{x}{\sin x} < \frac{1}{\cos x}$$

Или, взяв обратные отношения в этих неравенствах, будем иметь 1>sin x/x>cos x (8)

(поясним на примере: 1<5/2<7/2 – очевидно; возьмем обратные отношения 1>2/5>2/7)

Из тригонометрии известно, что если X→0, то cos x→1. но т.к. отношение sin x/x согласно неравенству (8) заключено между единицей и cos x то оно и подавно стремится к единице.

Это стремление отношения sin x/x к единице хорошо просматривается, если величины, содержащие в неравенстве (8) представить на координатной оси (рис.5)



Итак: $$\boxed{\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x}}$$

Почему же этот предел удостоился названия

замечательного?

Воспользуемся понятием предела функции: $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)=a$

$f(x)-a=b$

С учётом этого (*) можно переписать так:

$$\frac{\sin x}{x} - 1 = b \quad (9)$$

Умножая (9) на x, получим: sinx-x=b*x или sinx=x+b*x (10)

В правой части равенства (10)$_{x \to 0}$ (по условию)-это бесконечно малая величина, b*x-,бесконечно малая функция 2го порядка; пренебрегая этим слагаемым, получим: $\sin x \approx x$ (*’)

Получили из равенства (*`) -Синусы малых углов примерно равны величинами самих углов, а это значит, что для нахождения синусов малых углов достаточно воспользоваться (*`), разумеется, что угол здесь измерен в радианах.

Возникает вопрос: каков диапазон углов, синусы которых можно находить по (*`)?

Оказывается достаточно большой, так если $X \in [0; 6)$, то с точностью до <u>4-го</u> знака после запятой работает равенство $\sin x = x$.

Пример: $X = 2°$; $\sin 2° \approx 2°$(рад); тогда2° —X рад180°—π радX = 2π/180°=π/90° =3,14/90°=0,03488, получим, чтоsin2° =0,03488, точное значение sin2° =0,03489 (по МК)

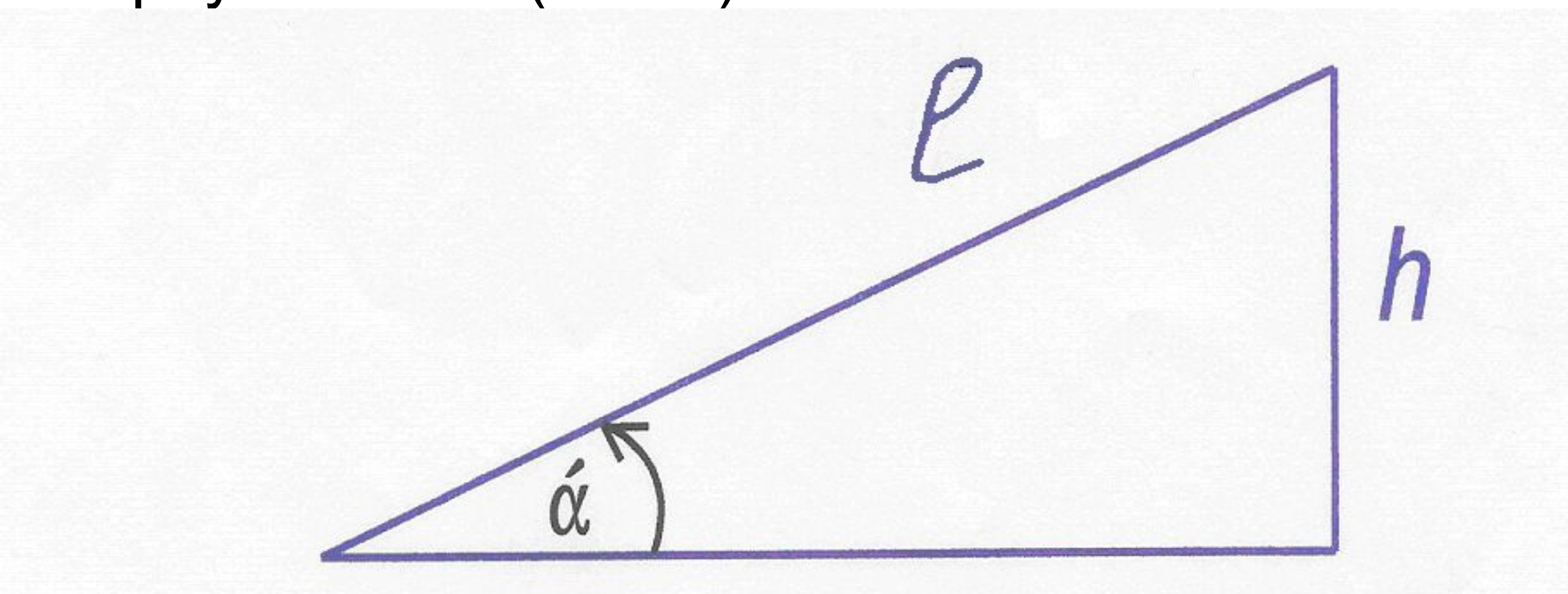
Если $X \in [6°; 12°)$, то $\sin x = x$ с точностью до 3-го знака.

Пример: $X = 10°$;$\sin 10° \approx 10$(рад); тогда$10°$—X рад$180°$—π рад$X = 10\pi/180° = \pi/18° = 3{,}14/18° = 0{,}1744$, получим, что$\sin 10° = 0{,}1744$; точное значение $\sin 10° = 0{,}1744$ (по МК)

Если $X \in [12°; 20°)$, то $\sin x = x$ с точностью до <u>2-го</u> знака.

Пример: $X = 18°$;$\sin 18° \approx 18$(рад); тогда18°—X рад180°—π радX = $18\pi/180° = \pi/10° = 3{,}14/10° = 0{,}314$, получим, что$\sin 10° = 0{,}314$; точное значение $\sin 18° = 0{,}309$ (по МК)

Тот факт, что синусы малых углов можно заменить величинами самих углов, имеет непревзойдённое значение и при решении прямоугольных треугольников, когда острый угол заключён в промежутке до 20^0. К примеру, в треугольнике (Рис.6)



известны $\square$ (гипотенуза) и α , требуется найти h.

Из соотношения $\frac{h}{\square} = \sin a \Rightarrow h = \square * \sin a$

Если угол небольшой, то sina=a и тогда h=l*a

Из расчётов “ушёл” синус, оперируем только углами.

На сколько это важно – убедитесь при расчётах различных оптических систем, а также в механике при движении тел по наклонной плоскости с малыми углами наклона.

Возможность (*) ещё и в том, что с его помощью можно доказать, что

$$\boxed{\lim_{x \to 0} \frac{tgx}{x} = 1}$$

откуда следует, что для малых углов tg x≈x

Для углов до 6° выполняется равенство tgx=x с точностью до 4го знака после запятой; для больших

Углов точность понижается, другими словами диапазон углов, для которых tg x, меньший, чем у синуса.

И последние по первому "Замечательному пределу".

Так как $\left.\begin{array}{r} \sin x \approx x \\ \operatorname{tg} x \approx x \end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{\sin x \approx \operatorname{tg} x}$

<u>Краткие выводы из первого "Замечательного предела"</u>

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

1.Для нахождения синусов и тангенсов малых углов можно обойтись без таблиц и вычислительной техники, для этого достаточно данный угол выразить в радианной мере,

Например, $\sin 2° = \left(\begin{array}{l} 180° — \pi \text{ рад.} \\ 2° — \dfrac{\pi * 2°}{180°} \end{array} \right) =$

$= \pi/90 = 3{,}14/90 = 0{,}03490....$

(точное значение $\sin 2° = 0{,}034899....$)

2.Тангенсы малых углов при расчётах можно заменить синусами.

Например, $\sin 5° = 0{,}0872$; $tg 5° = 0.0874$

(если для расчётов достаточно 3х знаков !)

3.Если угол небольшой, то при решении прямоугольных треугольников синусы можно заменить углами.

Для подтверждения теоретического вывода 1го "замечательного' предела можно убедиться в его истинности, выполнив с помощью, разумеется вычислительных средств, следующие расчёты: взять ряд произвольных углов, например, $30°; 20°; 10°; 5°; 3°; 1°; 0{,}5°$, перевести их в радианы, затем найти синусы заданных углов и взять отношение $\dfrac{\sin a}{a}$

Это отношение всё меньше и меньше будет отличаться от единицы.

Ниже приведена таблица с результатами расчётов.

α	$30°$	$20°$	$10°$	$5°$	$3°$	$1°$	$0{,}5°$
α рад.	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{9}$	$\frac{\pi}{18}$	$\frac{\pi}{36}$	$\frac{\pi}{60}$	$\frac{\pi}{180}$	$\frac{\pi}{360}$
$\sin\alpha$	0,5	0,342	0,1736	0,0871	0,0523	0,0174	0,0087
$\sin\alpha/\alpha$	0,9554	0,9805	0,9954	0,9988	1	1	1

Ко второму "Замечательному" пределу относится предел функции

$$\boxed{\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}}$$

В курсе высшей математике доказывается, что предел (1+1/x)x при X $\to\infty$ существует (он больше 2, но меньше 3) и выражается иррациональным числом, т. е.

$$2<\lim_{X\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)x<3$$

Для пояснения сказанного составим следующую таблицу выражения (1+1/x)x при возрастающих значениях X:

x	1	2	5	10	100	1000
(1+1/x)x	2	2,25	2,49	2,59	2,705	2,713

Из таблицы видно, что по мере возрастания X выражение (1+1/x)x также возрастает, замедляясь в росте.

Предел $(1+\frac{1}{x})x$ при X $\to \infty$, равный приближенно 2,718, принято обозначать буквой е, которое называется числом Непера.

Джон Непер (1550 – 1617) шотландский математик, он был первым создателем таблиц логарифмов – натуральных, которые в математике называют НЕПЕРОВЫМИ.

Итак, $\boxed{\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}}$ = 2,71828….= e –

число Непера

В прикладных дисциплинах это число называют экспонентой (exp) и записывают так:
exp=2,71828….=e

exp (5x)=e5x;

exp (-2t)=e-2t.

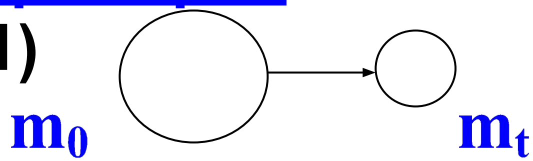
Можно доказать, что для любой бесконечно малой функции α выражение (1+α)1/α , т. е.
lim (1+α)1/α
α→0

Возникает вопрос: почему этот предел называют “замечательным”?

Во-первых, в математике число е имеет очень важное значение, которое можно сравнить со значением числа $\pi = 3{,}14$. Как было отмечено в теории логарифмов, число е принимают за основание натуральных чисел, или Неперовых логарифмов, имеющих большое применение в математическом анализе, так как с их помощью многие формулы можно представить в более простом виде, чем при пользовании десятичными логарифмами.

Во – вторых, нет такой области в науке и технике, где можно было бы обойтись без числа е: многие параметры, которые характеризуют переменные процессы, изменяются по экспоненциальному закону, то есть по закону, связанному с числом Непера.

Примеры:

1) 

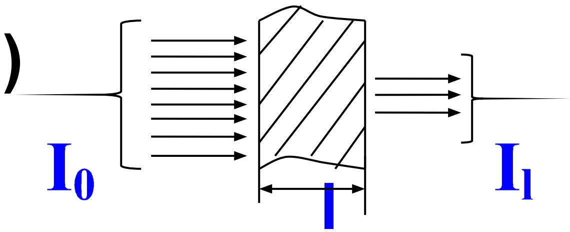
2) 

рис. 6 рис. 7

1)Рисунок 6. Масса радиоактивного вещества со временем изменяется (уменьшается) по закону , $m_t = m_0 \cdot e^{-kt}$,где m0 – начальное его количество, t – время, k – коэффициент распада, зависит от того вещества.

2)Рисунок 7. Интенсивность падающего на среду любого излучения также изменяется по экспоненциальному закону, т. е. $I_l = I_0 \cdot e^{-kl}$

3)ЭДС источника тока со временем изменяется по закону экспоненты, т. е. $\varepsilon_t = \varepsilon_0 \cdot e^{-kt}$

4)Объём растущего дерева также находится с помощью экспоненты: $V_t = V_0 \cdot e^{kt}$