МБОУ "Ики-Бурульская СОШ им.А.Пюрбеева"

Площадь вписанного четырехугольника

Учитель: Мирзаханов К.Х.

Как найти площадь вписанного четырехугольника?

Площадь четырёхугольника ABCD, вписанного в окружность, можно найти как сумму площадей треугольников, например, ABC и ADC.

Из треугольника ABC по теореме косинусов

Аналогично, из треугольника ADC

,

Так как четырехугольник ABCD вписан в окружность,

Так как cos(180º-α)= — cosα

$$\cos\angle ADC = \cos(180^o - \angle ABC) = -\cos\angle ADC$$

Отсюда,

$$AC^2 = AD^2 + DC^2 + 2\cdot AD\cdot DC\cdot\cos\angle ABC.$$

Приравниваем правы части равенств для AC²

$$AD^2 + DC^2 + 2\cdot AD\cdot DC\cdot\cos\angle ABC =$$

$$= AB^2 + BC^2 - 2\cdot AB\cdot BC\cdot\cos\angle ABC.$$

Отсюда

$$2 \cdot AD \cdot DC \cdot \cos\angle ABC + 2 \cdot AB \cdot BC \cdot \cos\angle ABC =$$

$$-AB^2 + BC^2 - AD^2 - DC^2,$$

$$2\cos\angle ABC \cdot (AD \cdot DC + AB \cdot BC) =$$

$$= AB^2 + BC^2 - AD^2 - DC^2$$

$$\cos\angle ABC = \frac{AB^2 + BC^2 - AD^2 - DC^2}{2(AB \cdot BC + AD \cdot DC)}.$$

Найдём синус этого угла, используя основное тригонометрическое тождество

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$$

(для $0^\circ<\alpha<180^\circ$ $\sin\alpha>0$)

$$\sin\angle ABC = \sqrt{1-(\cos\angle ABC)^2}$$

И по формуле

$$S = \frac{1}{2} a \cdot b \cdot \sin \alpha$$

найдём

$$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot BC \cdot \sin \angle ABC.$$

Аналогично

$$S_{\Delta ADC} = \frac{1}{2} \cdot AD \cdot DC \cdot \sin\angle ADC,$$

$$\sin\angle ADC = \sin\angle ABC$$

(так как их сумма равна 180º,
а sin(180º-α)=sinα

$$S_{ABCD} = S_{\Delta ABC} + S_{\Delta ADC}.$$

В частных случаях: если в окружность вписан правильный четырёхугольник (то есть квадрат), прямоугольник либо четырёхугольник, диагонали которого взаимно перпендикулярны — решение задачи может быть упрощено.

Площадь любого четырёхугольника, в том числе, и вписанного, равна половине произведения его диагоналей на синус угла между ними:

$$S = \frac{1}{2} d_1 \cdot d_2 \cdot \sin \varphi$$