

МБОУ "Ики-Бурульская СОШ им.А.Пюрбеева"

**Площадь
вписанного
четырёхугольника**

Учитель: Мирзаханов К.Х.

**Как найти площадь
вписанного
четырёхугольника?**

Площадь четырёхугольника $ABCD$, вписанного в окружность, можно найти как сумму площадей треугольников, например, ABC и ADC .



Из треугольника ABC по [теореме КОСИНУСОВ](#)

Аналогично, из треугольника ADC



Так как четырехугольник ABCD вписан в окружность,

Так как $\cos(180^\circ - \alpha) = -\cos \alpha$

$$\cos \angle ADC = \cos(180^\circ - \angle ABC) = -\cos \angle ABC$$

Отсюда,

$$AC^2 = AD^2 + DC^2 + 2 \cdot AD \cdot DC \cdot \cos \angle ABC.$$

Приравниваем правы части равенств для AC^2

$$\begin{aligned} AD^2 + DC^2 + 2 \cdot AD \cdot DC \cdot \cos \angle ABC &= \\ &= AB^2 + BC^2 - 2 \cdot AB \cdot BC \cdot \cos \angle ABC. \end{aligned}$$



Отсюда

$$2 \cdot AD \cdot DC \cdot \cos \angle ABC + 2 \cdot AB \cdot BC \cdot \cos \angle ABC = -AB^2 + BC^2 - AD^2 - DC^2,$$

$$2 \cos \angle ABC \cdot (AD \cdot DC + AB \cdot BC) = AB^2 + BC^2 - AD^2 - DC^2$$

$$\cos \angle ABC = \frac{AB^2 + BC^2 - AD^2 - DC^2}{2(AB \cdot BC + AD \cdot DC)}.$$

Найдём синус этого угла, используя
основное тригонометрическое
тождество

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$$

(для $0^\circ < \alpha < 180^\circ$ $\sin \alpha > 0$)

$$\sin \angle ABC = \sqrt{1 - (\cos \angle ABC)^2}$$

И по формуле

$$S = \frac{1}{2} a \cdot b \cdot \sin \alpha$$

найдем

$$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot BC \cdot \sin \angle ABC.$$

Аналогично

$$S_{\Delta ADC} = \frac{1}{2} \cdot AD \cdot DC \cdot \sin \angle ADC,$$

$$\sin \angle ADC = \sin \angle ABC$$

(так как их сумма равна 180° ,
а $\sin(180^\circ - \alpha) = \sin \alpha$)

$$S_{ABCD} = S_{\Delta ABC} + S_{\Delta ADC}.$$

В частных случаях: если в окружность вписан правильный четырёхугольник (то есть квадрат), прямоугольник либо четырёхугольник, диагонали которого взаимно перпендикулярны — решение задачи может быть упрощено.

**Площадь любого
четырёхугольника, в том
числе, и вписанного, равна
половине произведения его
диагоналей на синус угла
между ними:**

$$S = \frac{1}{2} d_1 \cdot d_2 \cdot \sin \varphi$$