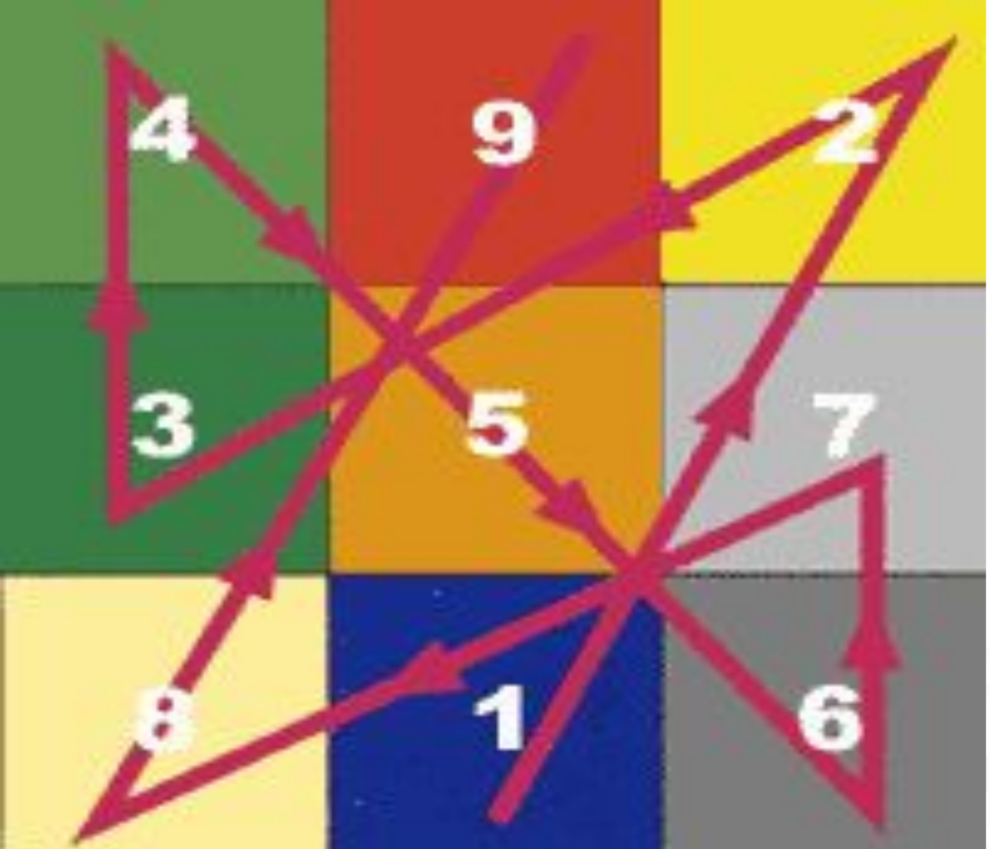
КОМБИНАТОРИКА. КОМБИНАТОРНЫЕ КОНСТРУКЦИИ. ПРАВИЛА КОМБИНАТОРИКИ

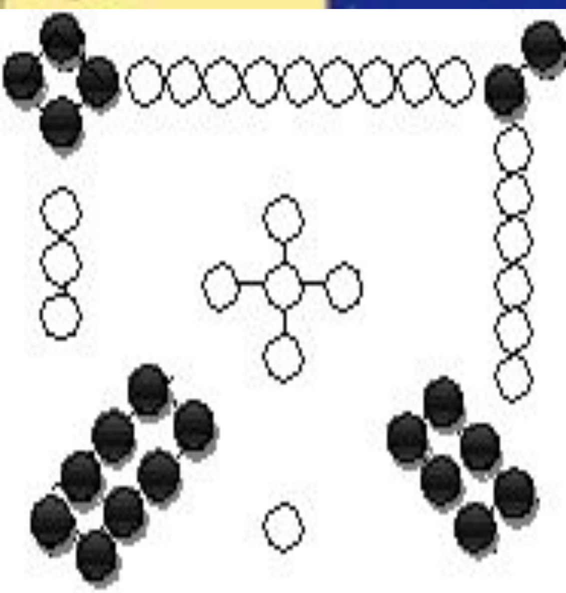
Галдина Е. В.

Преподаватель математики, информатики ГБОУ СПО ПППЭТ МО

Комбинаторика - раздел математики, в котором изучаются вопросы о том, сколько различных комбинаций, подчиненных тем или иным условиям, можно составить из заданных объектов.

С аналогичными задачами, получившими название комбинаторных, люди столкнулись в глубокой древности. Уже несколько тысячелетий назад в Древнем Китае увлекались составлением магических квадратов, в которых заданные числа располагали так, что их сумма по всем горизонталям, вертикалям и главным диагоналям была одной и той же. В Древней Греции подсчитывали число различных комбинаций длинных и коротких слогов в стихотворных размерах, занимались теорией фигурных чисел, изучали фигуры, которые можно составить из частей разрезанного квадрата особым образом, и т.д.


4 9 2
3 5 7
8 1 6




8 3 10
9 7 5
4 11 6


1 2 3
4 5 6
7 8 9

Комбинаторные задачи возникали и в связи с такими играми, как шашки, шахматы, домино, карты, кости.

* Например: При игре в кости бросаются две кости, и выпавшие очки складываются. Сколько существует комбинаций, в которых сумма очков на верхних гранях равна двенадцати?

Решение: Каждый возможный исход соответствует функции F:{1,2}—>{1,2,3,4,5,6} - аргумент функции - это номер кости, значение— очки на верхней грани. Очевидно, что лишь 6+6 даёт нам нужный результат 12. Таким образом, существует лишь одна функция, ставящая в соответствие 1 число 6, и 2 число 6. Или, другими словами, существует всего одна комбинация, при которой сумма очков на верхних гранях равна двенадцати.

Комбинаторика становится наукой лишь в XVII в. – в период, когда возникла теория вероятностей.

Теория вероятностей — раздел математики, изучающий закономерности случайных явлений: случайные события, случайные величины, их свойства и операции над ними.

Чтобы решать теоретико-вероятностные задачи, нужно было уметь подсчитывать число различных комбинаций, подчиненных тем или иным условиям. После первых работ, выполненных в XVI в. итальянскими учеными Дж. Кардано, Н. Тартальей и Г. Галилеем, такие задачи изучали французские математики Б. Паскаль и П. Ферма. Первым рассматривал комбинаторику как самостоятельную ветвь науки немецкий философ и математик Г. Лейбниц, опубликовавший в 1666 г. работу «Об искусстве комбинаторики», в которой впервые появляется сам термин «комбинаторный».

Чтобы решать теоретико-вероятностные задачи, нужно было уметь подсчитывать число различных комбинаций, подчиненных тем или иным условиям. После первых работ, выполненных в XVI в. итальянскими учеными Дж. Кардано, Н. Тартальей и Г. Галилеем, такие задачи изучали французские математики Б. Паскаль и П. Ферма. Первым рассматривал комбинаторику как самостоятельную ветвь науки немецкий философ и математик Г. Лейбниц, опубликовавший в 1666 г. работу «Об искусстве комбинаторики», в которой впервые появляется сам термин «комбинаторный».

Комбинаторные задачи физики, химии, биологии, экономики и других наук, которые не поддавались ранее решению из-за трудоемкости вычислений, стали успешно решаться на ЭВМ. В результате этого комбинаторные методы исследования все глубже проникают во многие разделы науки и техники. Простейшими примерами комбинаторных конфигураций или, другими словами, конструкций являются перестановки, размещения и сочетания. Комбинаторные вычисления требуют комбинаторного анализа для установления свойств и оценки применимости алгоритмов.

<u>Например:</u> **Агентство недвижимости, база данных. Запись – пара (предложение, спрос). Найти варианты обмена, т.е. такие пары, где первая компонента одной совпадает со второй компонентой другой.**

Решение: Простейший вариант поиска – “лобовой”, трудоемкость n´ (n–1)/2. Если на одну проверку нужна 1 миллисекунда, то при n = 100 потребуется около 5 секунд, при n=100 000 – 5´ 106 сек, т.е. около 1389 часов. Непригодный алгоритм!

Чаще всего в комбинаторных вычислениях используются следующие конструкци:

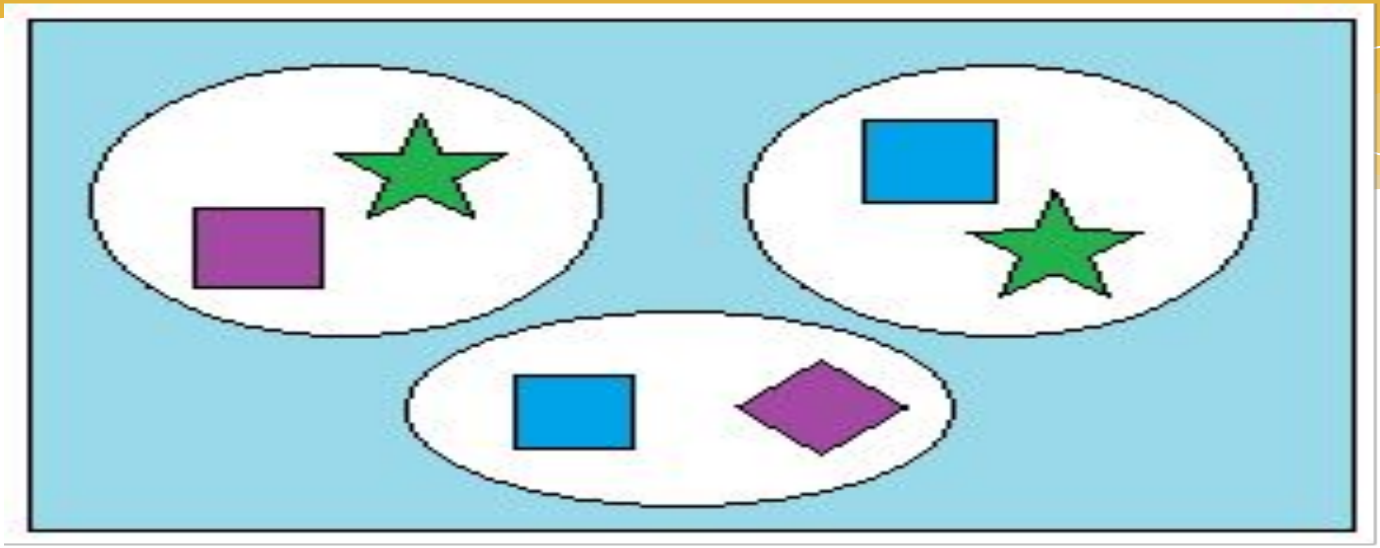
Сочетание — это комбинации, составленные из данных n элементов по m элементов, которые различаются хотя бы одним элементом. Сочетания бывают без повторений - n различные элементы, взятых по m, а бывают с повторениями - n элементы, взяты по m и эти элементы в наборе могут повторяться. Стоит заметить, что в сочетаниях не учитывается порядок элементов.

<u>Примере</u>: Пусть имеется три элемента: a, b и c. Из этих трёх элементов, в отличие от размещений, можно составить такие сочетания по два элемента: ab, ac, bc. Все приведённые сочетания отличаются друг от друга хотя бы одним элементом.

Существует такое выражение, как, число сочетаний, т.е., сколькими способами можно выбрать из них т предметов (безразлично, в каком порядке)? Число способов такого выбора равно:

Знак n! читается: «n факториал» - обозначает произведение всех целых чисел от 1 до n. Оказывается удобным рассматривать также 0!, полагая его равным 1.

Пример: всех сочетаний из n=3 объектов, в данном случае различных фигур, по m=2 - на картинке. Согласно формуле, их должно быть ровно 3:



$$C_3^2 = \frac{3!}{(3-2)! * 2!} = 3$$

Воспользуемся азбукой Морзе, состоящей всего из двух символов: точка ● и тире — и построим слова разной длины. Каждая буква алфавита может быть использована один раз, несколько раз или ни разу.

Слово длины 1:

●	—

Слово длины 2:

● ●	● —
— ●	— —

Слово Длины 3:

● ● ●	● ● —	● — ●	● — —
— — —	● — —	— ● —	— ● ●

Например: Подсчитать количество слов длины n в алфавите из k букв.

Решение: В слове длины n имеется n мест. На первое место ставим любую из k букв. При заполнении очередного места число возможностей увеличивается в k раз.

$k * k * k * \dots * k = k^n$. n раз

И так, мы пришли к выводу, что число слов длины n в алфавите из k букв равно k^n.

Размещение. Ряд, заполненный объектами данного множества, т.е., расположение объектов на определённых местах называется размещением.

В отличие от пункта 1, где букву можно использовать не один раз, в данном случае, поместив какой-либо объект на определённое место он не может быть использован вторично, т.е., мы забираем его из множества и больше его у нас нет.

Например: Подсчитать число А размещений п объектов на k местах. **Решение:** На первое место ставим любой из п объектов. На каждом следующем шаге число возможностей уменьшается на единицу: п(п — 1)(п — 2)... = п(п — 1)...(п — k + 1). k множителей.

Стоит обратить внимание, что последний множитель равен п(п — 1)...(п — k + 1).

Заметим, если k > п, то один из множителей будет равен нулю, поскольку нельзя п объектами занять число мест большее, чем п. Ответ данного решения можно записать в виде таблицы:

Номер мест	*Число возможных размещений*
1	*n*
2	*n - 1*
3	*n - 2*
4	*n - 3*
…	…
k	*n - k + 1*

Рассмотрим <u>пример:</u> Из элементов множества {a, b, c, d} составим все возможные пары, но что бы элементы в них не повторялись. В первой строке запишем все пары с первым элементом a, во второй — все пары с первым элементом b и т. д. Получи следующий результат:

(a, b), (a, c), (a,d)

(b, a), (b, c), (b, d)

(c, a), (c, b), (c, d)

(d, a), (d, b), (d, c)

Каждую пару из этой таблицы, составленную из множества {a, b, c, d} в комбинаторике называют размещением из 4 элементов по 2. Число всех таких размещений обозначают так: A^2 и читают — «А из четырёх по два».

Теперь можно сделать соответствующую запись:

$$A^2 = 4 * 3 = 12$$

Размещения — это могут быть пары, тройки, четвёрки т. д.

Размещения — это могут быть пары, тройки, четвёрки т. д.

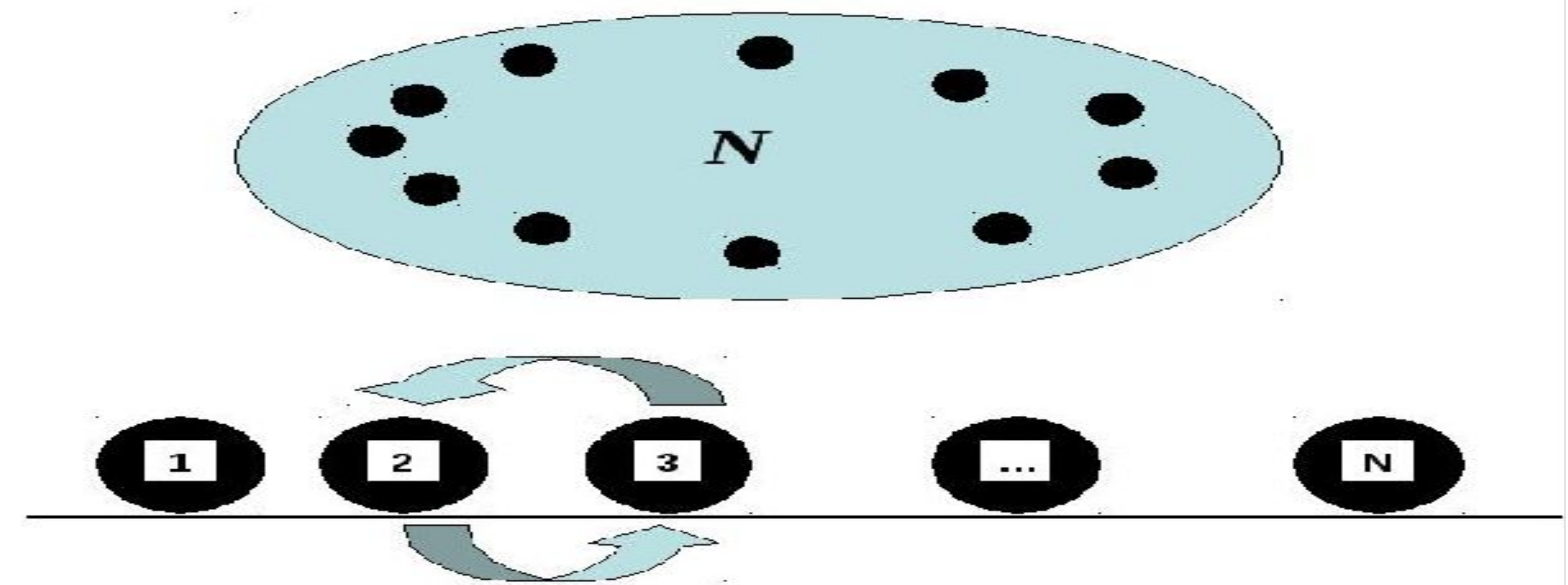
Приведём ещё один пример: Из 12 учащихся нужно отобрать по одному человеку для участия в городских олимпиадах по математике, физике, истории и географии. Каждый из учащихся должен участвовать только в одной олимпиаде. Сколькими способами можно это сделать? **Решение: Каждая группа учащихся, направляемая на олимпиаду в составе 4 человек, отличается либо учащимися, либо порядком, который определяет, по какому предмету будет соревноваться ученик. Поэтому число способов отбора учащихся равно числу размещений из 12 по 4:**

$$A^4 = 12 * 11 * 10 * 9 = 11\,880$$

Общая формула для вычисления числа размещений будет выглядеть следующим образом:

$$A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!} = n(n-1)\ldots(n-k+1)$$

<u>Перестановка.</u> **Любой упорядоченный набор из n различных элементов множества и называется перестановкой. Этот термин возник потому, что сначала брались объекты, расставленные одним образом, тогда как, другие способы упорядочения требовали переставить эти объекты другим образом. Перестановки различаются только порядком расположения входящих в них элементов.**

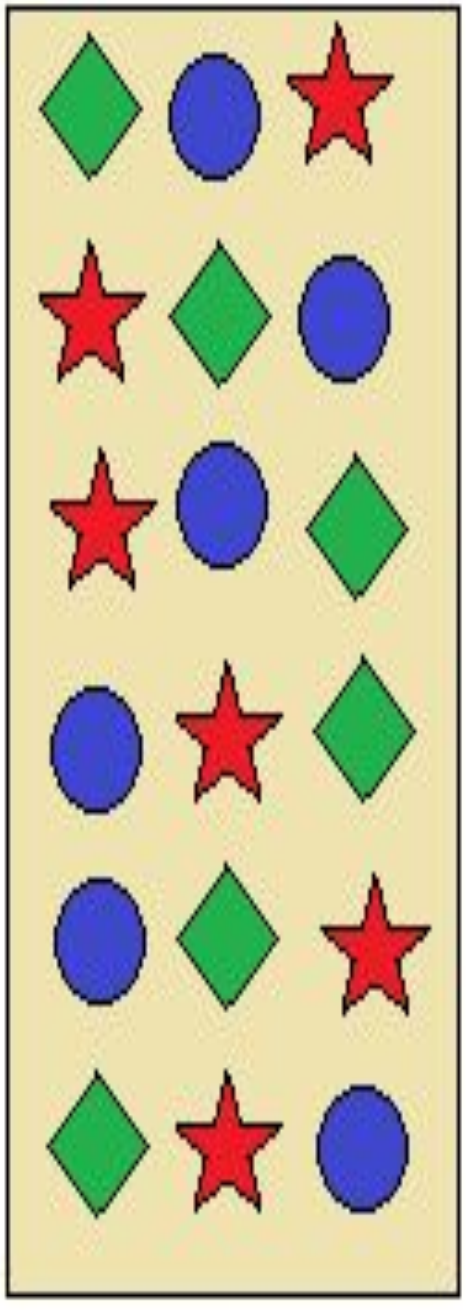


Например: Сколькими способами можно установить порядок следования друг за другом n различных предметов?

Решение: Число способов равно:

$$P_n = 1 * 2 * 3 ... * n = n!$$

Пример всех перестановок из n=3 объектов, различных фигур - на картинке.

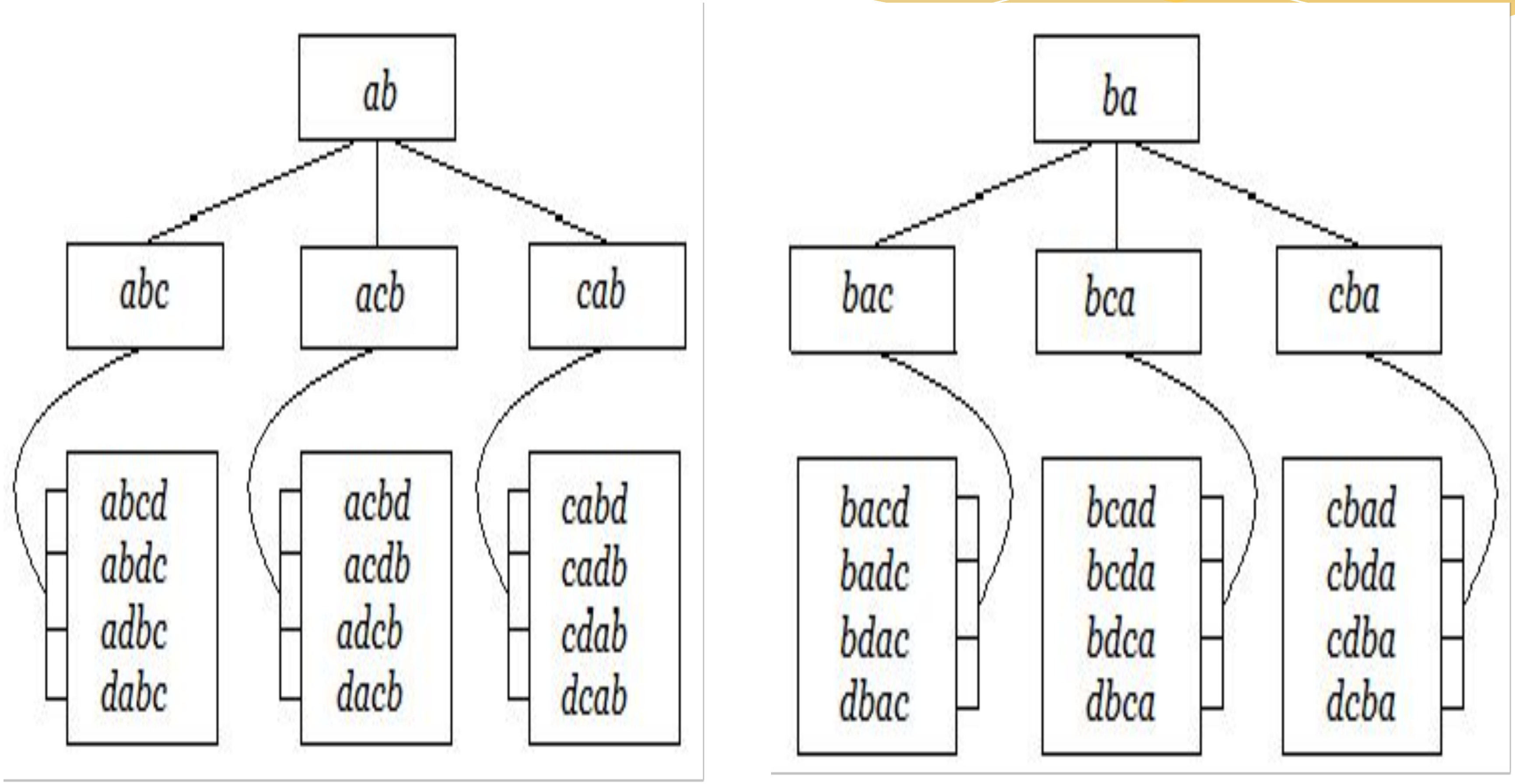


Согласно формуле, их должно быть ровно 6.

С ростом числа объектов количество перестановок очень быстро растёт и изображать их наглядно становится затруднительно. Например, число перестановок из 10 предметов - уже 3628800 (больше 3 миллионов!).

Заметим, что очень удобно процесс перестановок осуществлять путём построения специальной схемы, которая называется дерево возможных вариантов. Дерево помогает увидеть путь решения, учесть все варианты и избежать повторений. Рассмотрим построение дерева возможных вариантов:

При решении комбинаторных задач нужно правильно использовать построенные конструкции. Главный принцип — не пытаться применять готовую формулу. Следует проанализировать конструкцию, способ составления и перечисления вариантов.



* Правильность выбора формулы можно записать в виде таблицы:

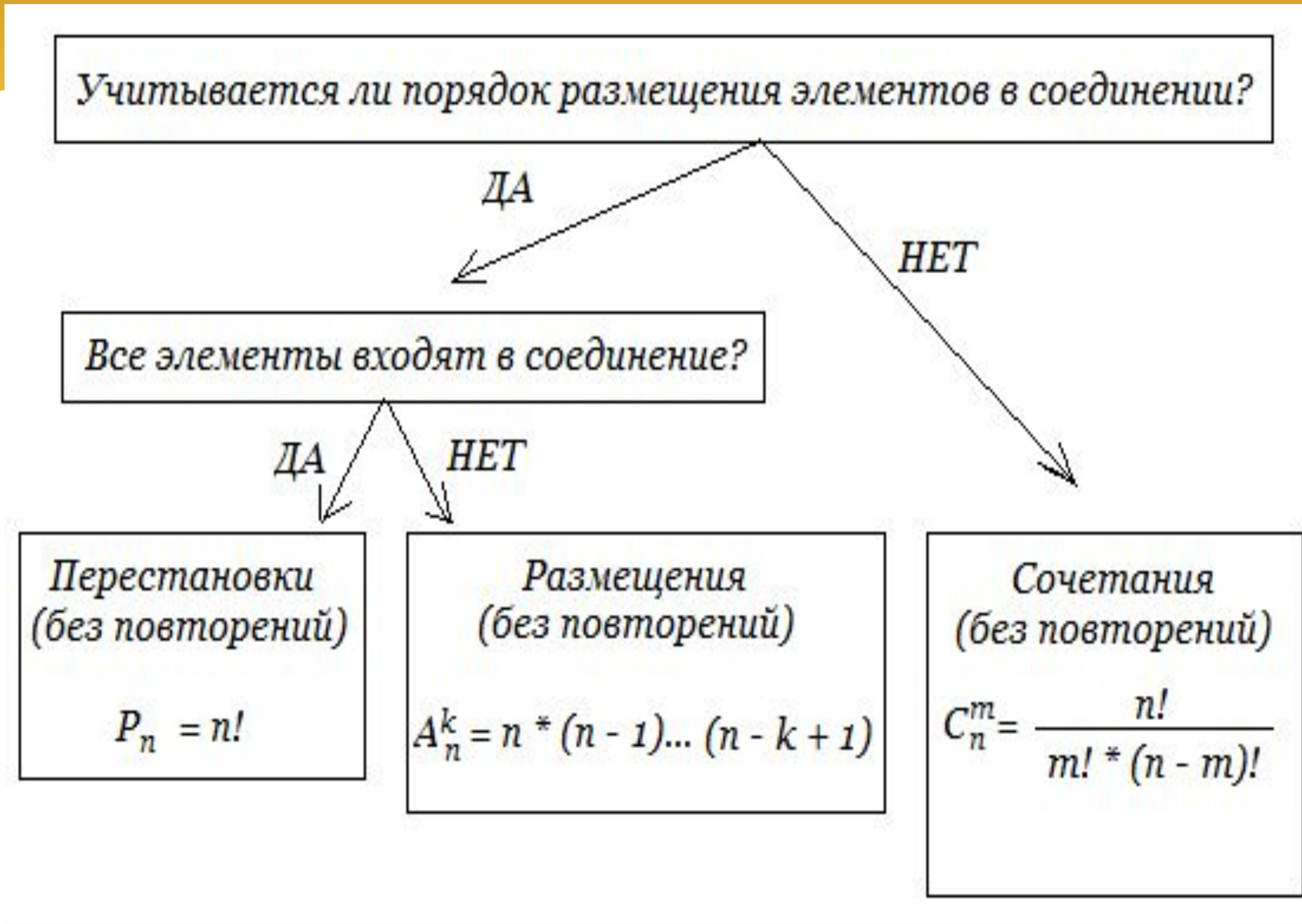
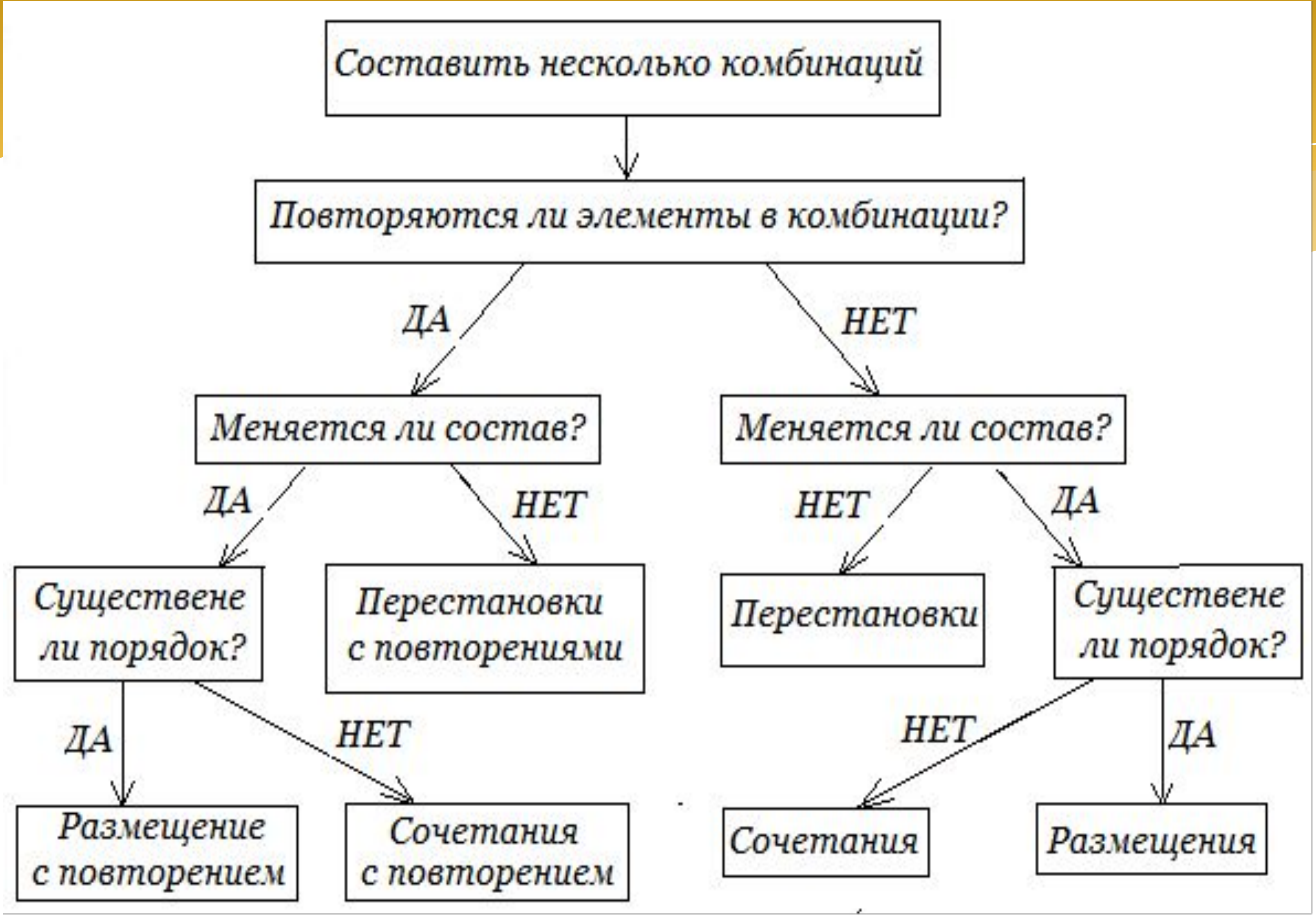


Схема определения вида комбинации:



Правило суммы (сложения).

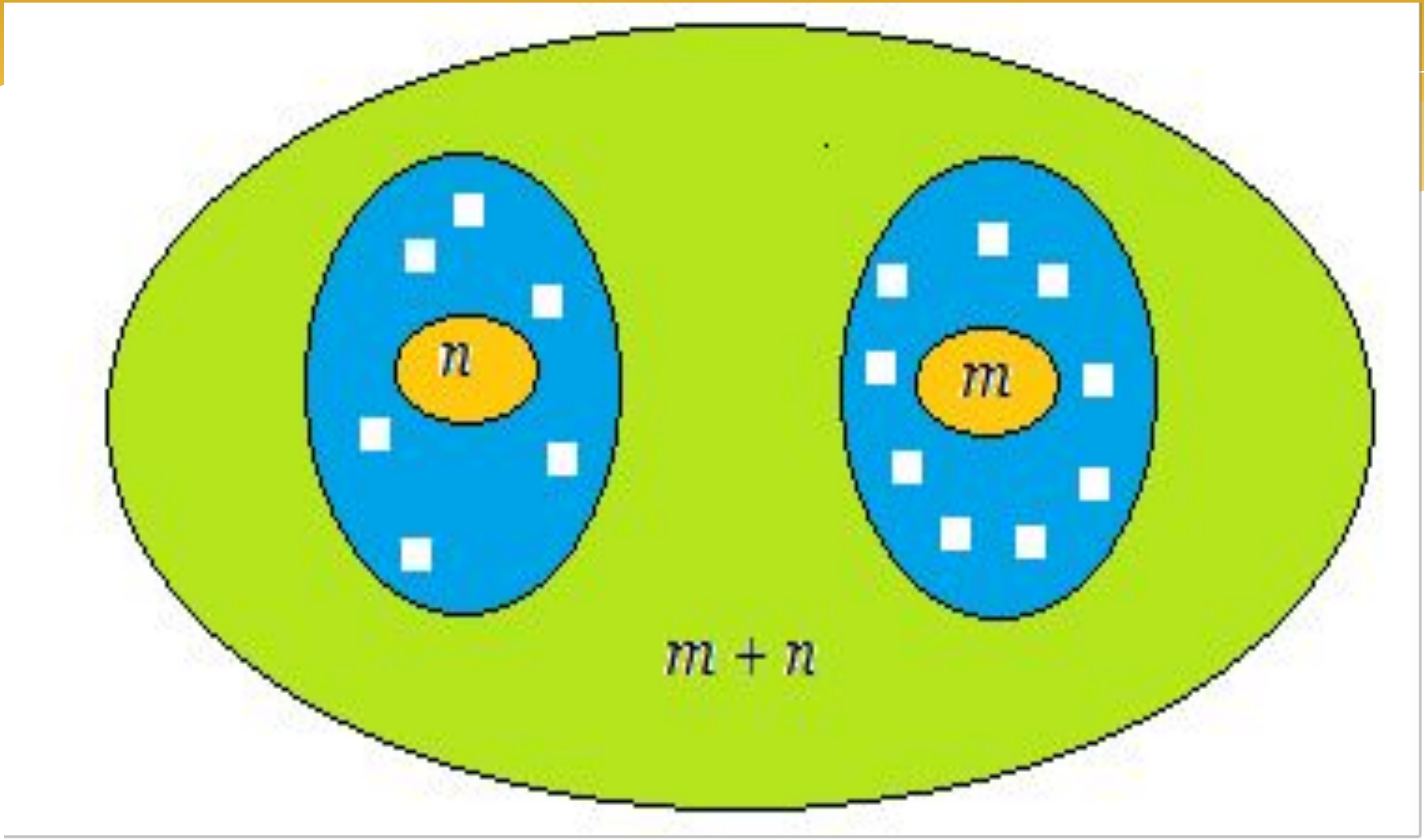
Пусть в множестве A имеется m элементов, а в множестве B – n элементов. Если у множеств A и B нет общих элементов, то в их объединении число элементов равно т + п

Можно сказать так, что если в двух мешках лежат разные предметы, и мы ссыпаем их вместе, то, чтобы найти их общее количество, надо сложить количества предметов в каждом из мешков.

Если для конечного множества X мы через |X| обозначим количество его элементов, то правило сложения можно записать так:

$$\text{Если } A \cap B = \varnothing \text{, то } |A \cup B| = |A| + |B|$$

Это правило несложно обобщается на случай, когда у множеств А и В есть общая часть.



Правило умножения.

Число пар, составленных из элементов множеств А и В, равно произведению количеств элементов этих множеств.

Множество пар элементов двух множеств часто обозначают с помощью знака произведения. Тогда правило умножения можно записать так:

$$|A * B| = |A| * |B|$$

Например: Если на первой полке стоит 5 книг, а на второй 10, то выбрать одну книгу с первой полки и одну со второй можно 5*10=50 способами.

Правило умножения легко пояснить с помощью таблицы. Если составить таблицу и занумеровать её строчки элементами множества А, а столбцы — элементами множества В, то клетки таблицы будут соответствовать парам (a, b), где a є A, b є B. Число клеток таблицы, очевидно, равно произведению числа строк и числа столбцов.

Рассмотрев оба эти правила можно сделать заключение:

1.Если в условии задачи звучит «И», то выбираем правило умножения.

2.Если в условии задачи надо найти «ИЛИ», то пользуемся правилом суммы.

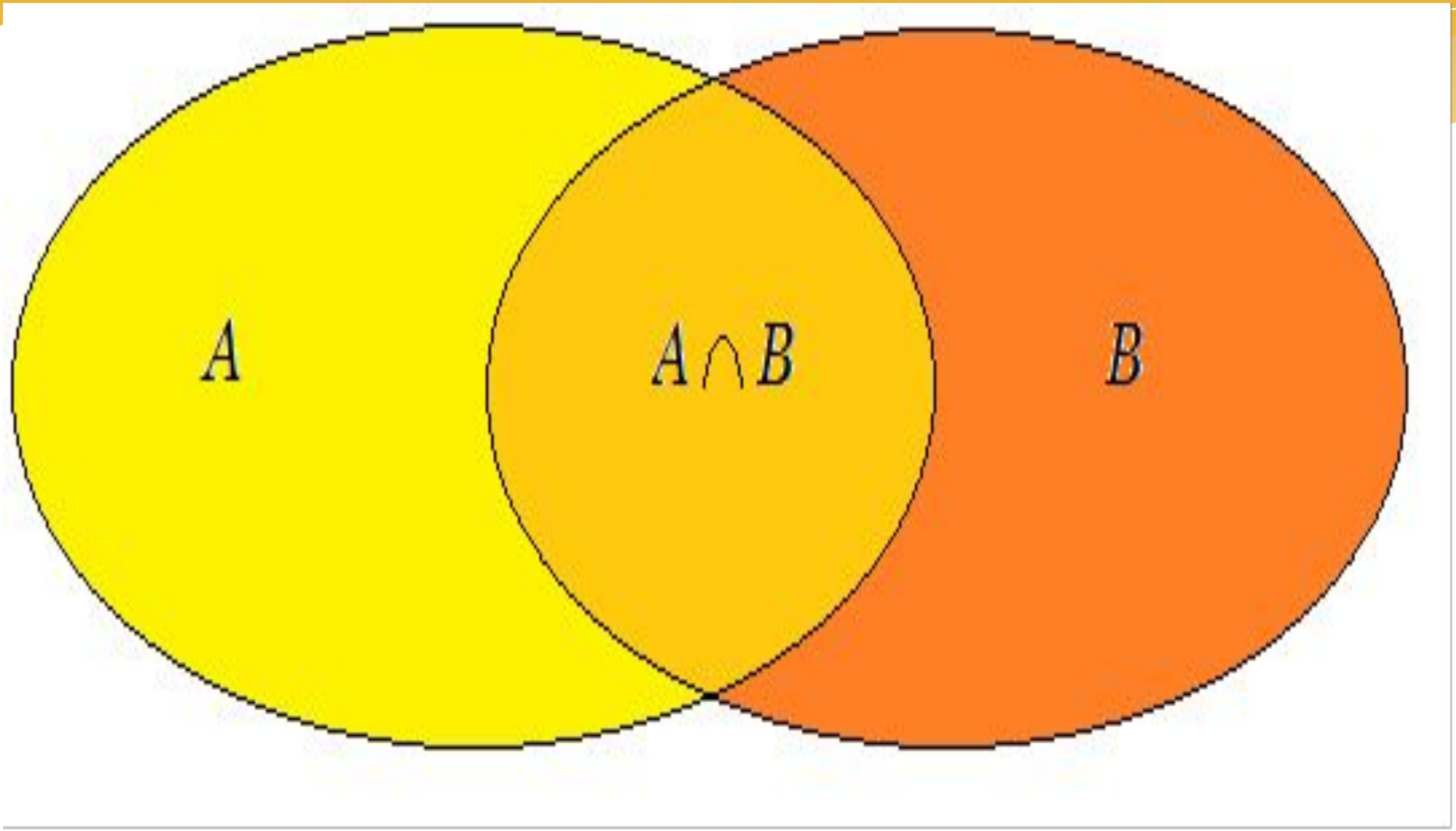
A \ B	1	…	n
1	1 1	…	1 n
2	2 1	…	2 n
3	3 1	…	3 n
…	…	…	…
n	n 1	…	n n

Правило включений и исключений.

Мы разобрали простейшие случаи, когда множества не пересекаются. А как быть со множествами, которые пересекаются? Для них существует правило включений и исключений. Данное правило распространяется на произвольное число множеств. Все различные комбинации элементов «А или В» можно выбрать по формуле:

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$$

Графически правило включений и исключений можно представить так:



Первый пример: Число слагаемых. Выяснить, сколько одночленов получится при умножении «скобки на скобку» данного произведения :

$$(a + b + c) * (a^2 + b^2 + c^2 – ab – ac\ bc)?$$

Этот же вопрос можно задать другими словами: Сколько пар можно составить из одночленов в первой и второй скобках?

Решение заключается в следующем - выберем любой из трёх одночленов в первой скобке и любой из шести одночленов во второй скобке — число пар равно 3 * 6 = 18. В данном случае использовали правило умножения.

Второй пример: Число слов. В алфавите 4 буквы. Сколько можно составить слов из трёх букв этого алфавита? Применяем правило сложения, т.к. Число слов длины n из алфавита в 4 буквы равно 4^n.

$$4 + 4^2 + 4^3 = 4 + 16 + 64 = 84.$$

Третий пример: Число учеников. В классе каждый ученик изучает какой-нибудь язык, при этом 20 учеников изучают английский, 12 — французский, а 7 учеников — оба языка. Надо выяснить сколько учеников в классе?

Если сложить количество учеников, изучающих английский и французский языки, то мы учтём всех учеников, но тех, которые изучают два языка, посчитаем дважды. Для решения этой задачи применяем правило включения — исключения. Решение будет таковым:

$$20 + 12 — 7 = 25.$$

Спасибо за внимание!