

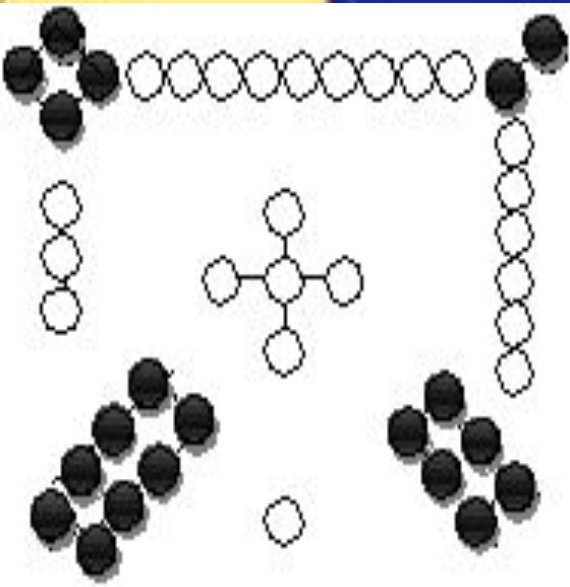
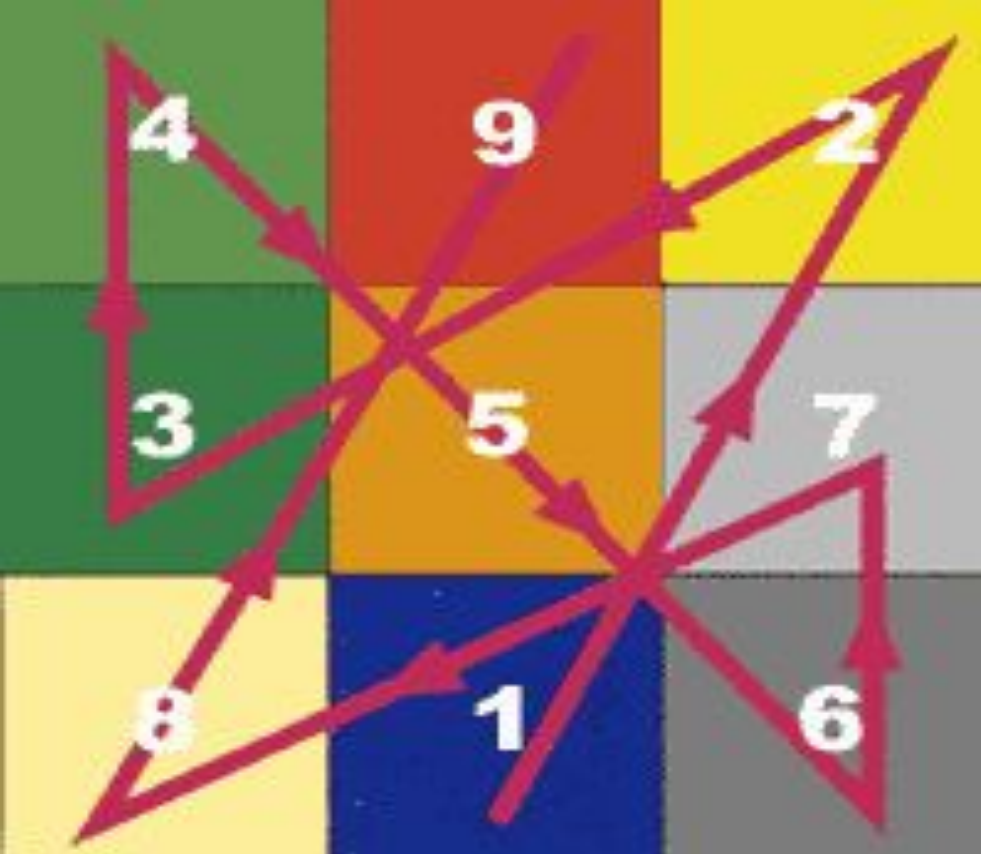
КОМБИНАТОРИКА. КОМБИНАТОРНЫЕ КОНСТРУКЦИИ. ПРАВИЛА КОМБИНАТОРИКИ

Галдина Е. В.

Преподаватель математики, информатики ГБОУ СПО
ППЭТ МО

Комбинаторика - раздел математики, в котором изучаются вопросы о том, сколько различных комбинаций, подчиненных тем или иным условиям, можно составить из заданных объектов.

С аналогичными задачами, получившими название комбинаторных, люди столкнулись в глубокой древности. Уже несколько тысячелетий назад в Древнем Китае увлекались составлением магических квадратов, в которых заданные числа располагали так, что их сумма по всем горизонталям, вертикалям и главным диагоналям была одной и той же. В Древней Греции подсчитывали число различных комбинаций длинных и коротких слогов в стихотворных размерах, занимались теорией фигурных чисел, изучали фигуры, которые можно составить из частей разрезанного квадрата особым образом, и т.д.



Комбинаторные задачи возникали и в связи с такими играми, как шашки, шахматы, домино, карты, кости.



* **Например: При игре в кости бросаются две кости, и выпавшие очки складываются. Сколько существует комбинаций, в которых сумма очков на верхних гранях равна двенадцати?**

Решение: Каждый возможный исход соответствует функции $F:\{1,2\}\rightarrow\{1,2,3,4,5,6\}$ - аргумент функции - это номер кости, значение — очки на верхней грани. Очевидно, что лишь $6+6$ даёт нам нужный результат 12. Таким образом, существует лишь одна функция, ставящая в соответствие 1 число 6, и 2 число 6. Или, другими словами, существует всего одна комбинация, при которой сумма очков на верхних гранях равна двенадцати.

Комбинаторика становится наукой лишь в XVII в. – в период, когда возникла теория вероятностей.

Теория вероятностей — раздел математики, изучающий закономерности случайных явлений: случайные события, случайные величины, их свойства и операции над ними.

Чтобы решать теоретико-вероятностные задачи, нужно было уметь подсчитывать число различных комбинаций, подчиненных тем или иным условиям. После первых работ, выполненных в XVI в. итальянскими учеными Дж. Кардано, Н. Тартальей и Г. Галилеем, такие задачи изучали французские математики Б. Паскаль и П. Ферма. Первым рассматривал комбинаторику как самостоятельную ветвь науки немецкий философ и математик Г. Лейбниц, опубликовавший в 1666 г. работу «Об искусстве комбинаторики», в которой впервые появляется сам термин «комбинаторный».

Чтобы решать теоретико-вероятностные задачи, нужно было уметь подсчитывать число различных комбинаций, подчиненных тем или иным условиям. После первых работ, выполненных в XVI в. итальянскими учеными Дж. Кардано, Н. Тартальей и Г. Галилеем, такие задачи изучали французские математики Б. Паскаль и П. Ферма. Первым рассматривал комбинаторику как самостоятельную ветвь науки немецкий философ и математик Г. Лейбниц, опубликовавший в 1666 г. работу «Об искусстве комбинаторики», в которой впервые появляется сам термин «комбинаторный».

Комбинаторные задачи физики, химии, биологии, экономики и других наук, которые не поддавались ранее решению из-за трудоемкости вычислений, стали успешно решаться на ЭВМ. В результате этого комбинаторные методы исследования все глубже проникают во многие разделы науки и техники. Простейшими примерами комбинаторных конфигураций или, другими словами, конструкций являются перестановки, размещения и сочетания. Комбинаторные вычисления требуют комбинаторного анализа для установления свойств и оценки применимости алгоритмов.

Например: Агентство недвижимости, база данных. Запись – пара (предложение, спрос). Найти варианты обмена, т.е. такие пары, где первая компонента одной совпадает со второй компонентой другой.

Решение: Простейший вариант поиска – “лобовой”, трудоемкость $n'(n-1)/2$. Если на одну проверку нужна 1 миллисекунда, то при $n = 100$ потребуется около 5 секунд, при $n=100\ 000$ – $5' 10^6$ сек, т.е. около 1389 часов. непригодный алгоритм!

Чаще всего в комбинаторных вычислениях используются следующие конструкции:

Сочетание — это комбинации, составленные из данных n элементов по t элементов, которые различаются хотя бы одним элементом. Сочетания бывают без повторений - n различные элементы, взятых по t , а бывают с повторениями - n элементы, взяты по t и эти элементы в наборе могут повторяться. Стоит заметить, что в сочетаниях не учитывается порядок элементов.

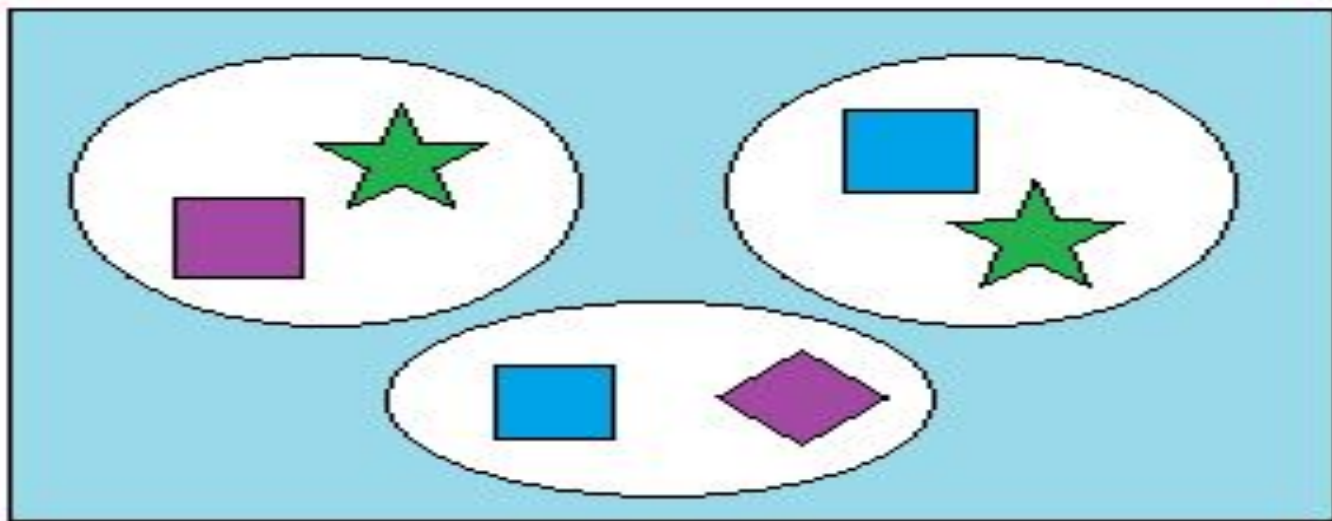
Примере: Пусть имеется три элемента: a , b и c . Из этих трёх элементов, в отличие от размещений, можно составить такие сочетания по два элемента: ab , ac , bc . Все приведённые сочетания отличаются друг от друга хотя бы одним элементом.

Существует такое выражение, как, число сочетаний, т.е., сколькими способами можно выбрать из них t предметов (безразлично, в каком порядке)? Число способов такого выбора равно:

Знак $n!$ читается: « n факториал» - обозначает произведение всех целых чисел от 1 до n .

Оказывается удобным рассматривать также $0!$, полагая его равным 1.

Пример: всех сочетаний из $n=3$ объектов, в данном случае различных фигур, по $m=2$ - на картинке. Согласно формуле, их должно быть ровно 3:



$$C_3^2 = \frac{3!}{(3-2)! * 2!} = 3$$

Воспользуемся азбукой Морзе, состоящей всего из двух символов: точка • и тире — и построим слова разной длины. Каждая буква алфавита может быть использована один раз, несколько раз или ни разу.

Слово длины 1:

| | |
|---|---|
| • | — |
|---|---|

Слово длины 2:

| | |
|----|-----|
| •• | •— |
| —• | — — |

Слово Длины 3:

| | | | |
|-----|------|-----|------|
| ••• | ••— | •—• | •--- |
| --- | •--- | —•— | —•• |

Например: Подсчитать количество слов длины p в алфавите из k букв.

Решение: В слове длины p имеется p мест. На первое место ставим любую из k букв. При заполнении очередного места число возможностей увеличивается в k раз.

$$k * k * k * \dots * k = k^n. \quad p \text{ раз}$$

И так, мы пришли к выводу, что число слов длины p в алфавите из k букв равно k^n .

Размещение. Ряд, заполненный объектами данного множества, т.е., расположение объектов на определённых местах называется размещением.

В отличие от пункта 1, где букву можно использовать не один раз, в данном случае, поместив какой-либо объект на определённое место он не может быть использован вторично, т.е., мы забираем его из множества и больше его у нас нет.

Например: Подсчитать число A размещений p объектов на k местах.

Решение: На первое место ставим любой из p объектов. На каждом следующем шаге число возможностей уменьшается на единицу: $p(p - 1)(p - 2) \dots = p(p - 1) \dots (p - k + 1)$. k множителей.

Стоит обратить внимание, что последний множитель равен $p(p - 1) \dots (p - k + 1)$.

Заметим, если $k > p$, то один из множителей будет равен нулю, поскольку нельзя p объектами занять число мест большее, чем p . Ответ данного решения можно записать в виде таблицы:

| Номер мест | Число возможных размещений |
|------------|----------------------------|
| 1 | n |
| 2 | $n - 1$ |
| 3 | $n - 2$ |
| 4 | $n - 3$ |
| ... | ... |
| k | $n - k + 1$ |

Рассмотрим пример: Из элементов множества $\{a, b, c, d\}$ составим все возможные пары, но что бы элементы в них не повторялись. В первой строке запишем все пары с первым элементом a , во второй — все пары с первым элементом b и т. д. Получи следующий результат:

(a, b), (a, c), (a, d)
 (b, a), (b, c), (b, d)
 (c, a), (c, b), (c, d)
 (d, a), (d, b), (d, c)

Каждую пару из этой таблицы, составленную из множества $\{a, b, c, d\}$ в комбинаторике называют размещением из 4 элементов по 2. Число всех таких размещений обозначают так: A^2 и читают — « A из четырёх по два».

Теперь можно сделать соответствующую запись:

$$A^2 = 4 * 3 = 12$$

Размещения — это могут быть пары, тройки, четвёрки т. д.

Размещения — это могут быть пары, тройки, четвёрки т. д.

Приведём ещё один пример: Из 12 учащихся нужно отобрать по одному человеку для участия в городских олимпиадах по математике, физике, истории и географии. Каждый из учащихся должен участвовать только в одной олимпиаде. Сколькими способами можно это сделать?

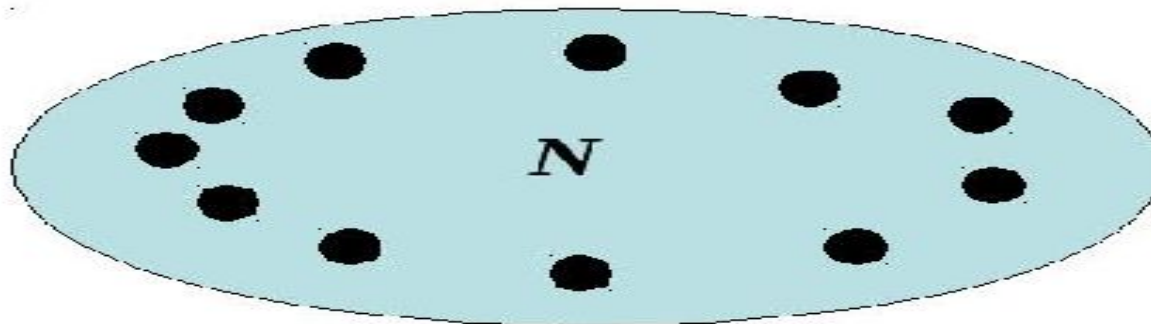
Решение: Каждая группа учащихся, направляемая на олимпиаду в составе 4 человек, отличается либо учащимися, либо порядком, который определяет, по какому предмету будет соревноваться ученик. Поэтому число способов отбора учащихся равно числу размещений из 12 по 4:

$$A^4 = 12 * 11 * 10 * 9 = 11\ 880$$

Общая формула для вычисления числа размещений будет выглядеть следующим образом:

$$A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!} = n(n-1)\dots(n-k+1)$$

Перестановка. Любой упорядоченный набор из n различных элементов множества и называется перестановкой. Этот термин возник потому, что сначала брались объекты, расставленные одним образом, тогда как, другие способы упорядочения требовали переставить эти объекты другим образом. Перестановки различаются только порядком расположения входящих в них элементов.



Например: Сколькими способами можно установить порядок следования друг за другом n различных предметов?

Решение: Число способов равно:

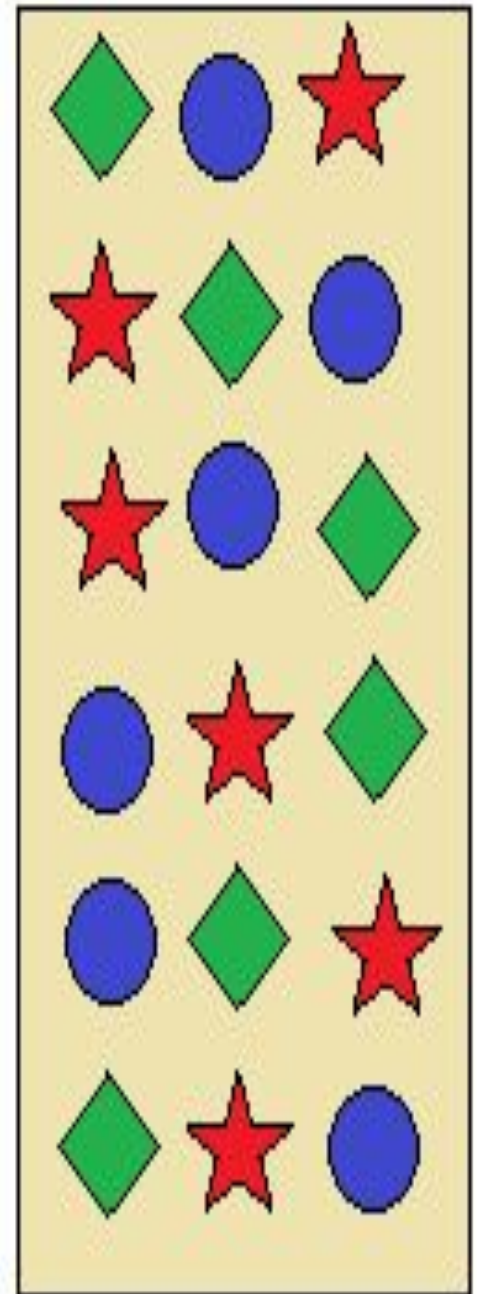
$$P_n = 1 * 2 * 3... * n = n!$$

Пример всех перестановок из $n=3$ объектов, различных фигур - на картинке.

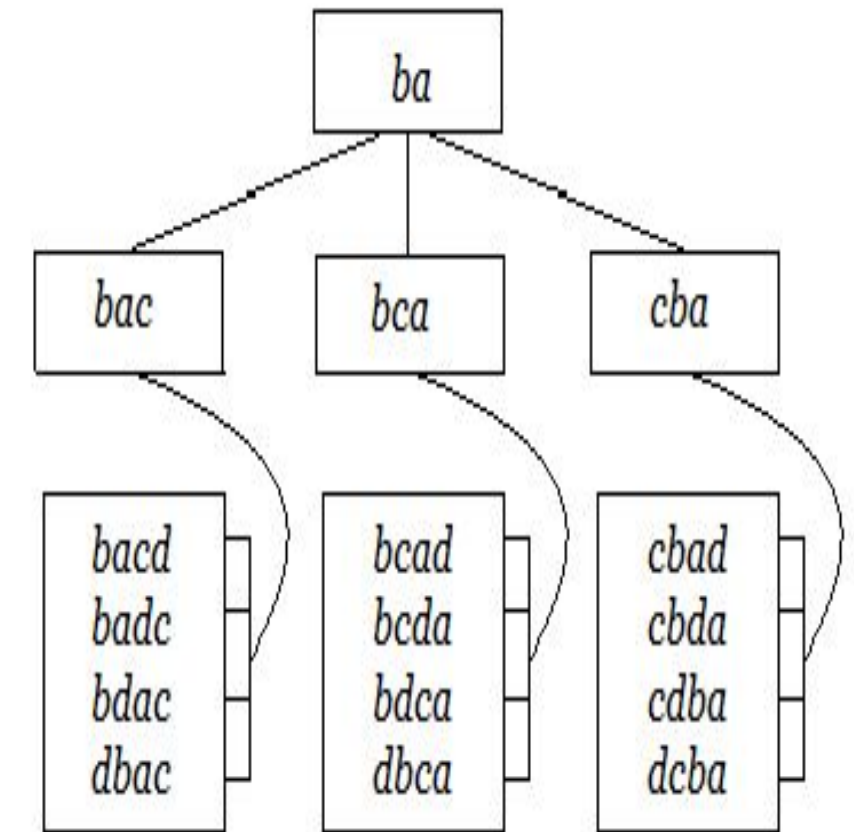
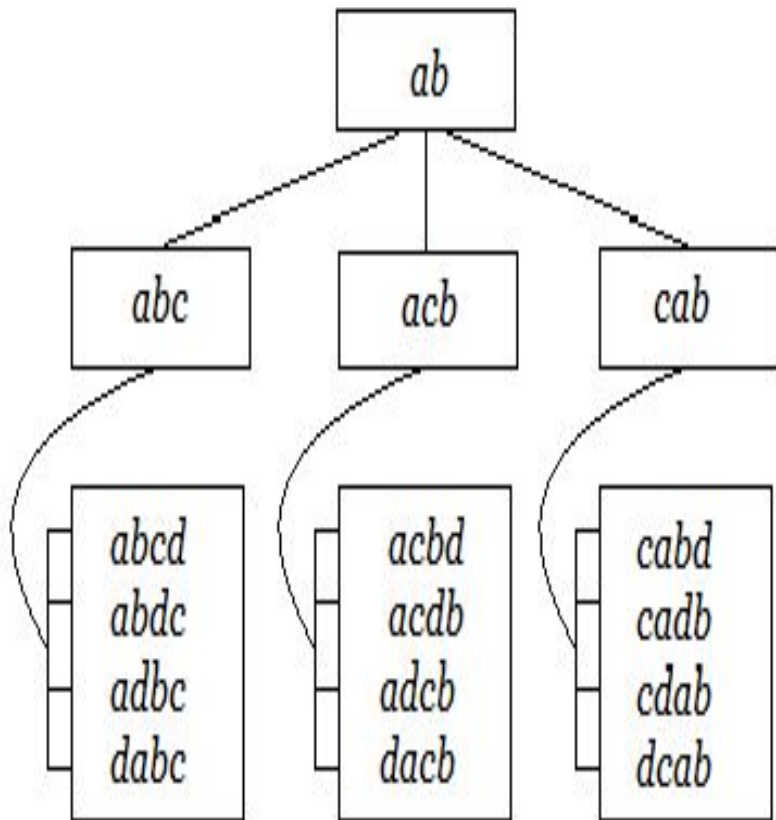
Согласно формуле, их должно быть ровно 6.

С ростом числа объектов количество перестановок очень быстро растёт и изображать их наглядно становится затруднительно. Например, число перестановок из 10 предметов - уже 3628800 (больше 3 миллионов!).

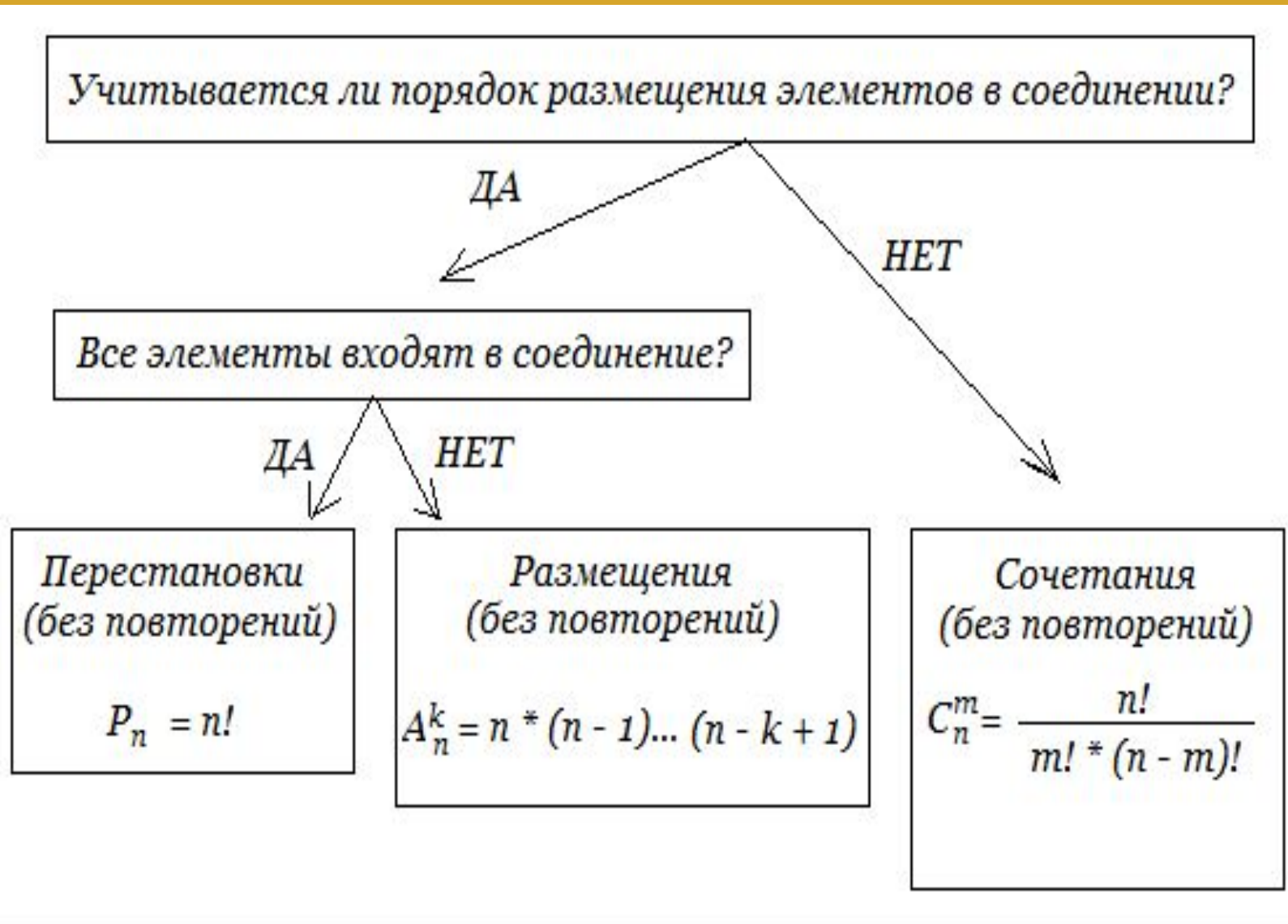
Заметим, что очень удобно процесс перестановок осуществлять путём построения специальной схемы, которая называется дерево возможных вариантов. Дерево помогает увидеть путь решения, учесть все варианты и избежать повторений. Рассмотрим построение дерева возможных вариантов:



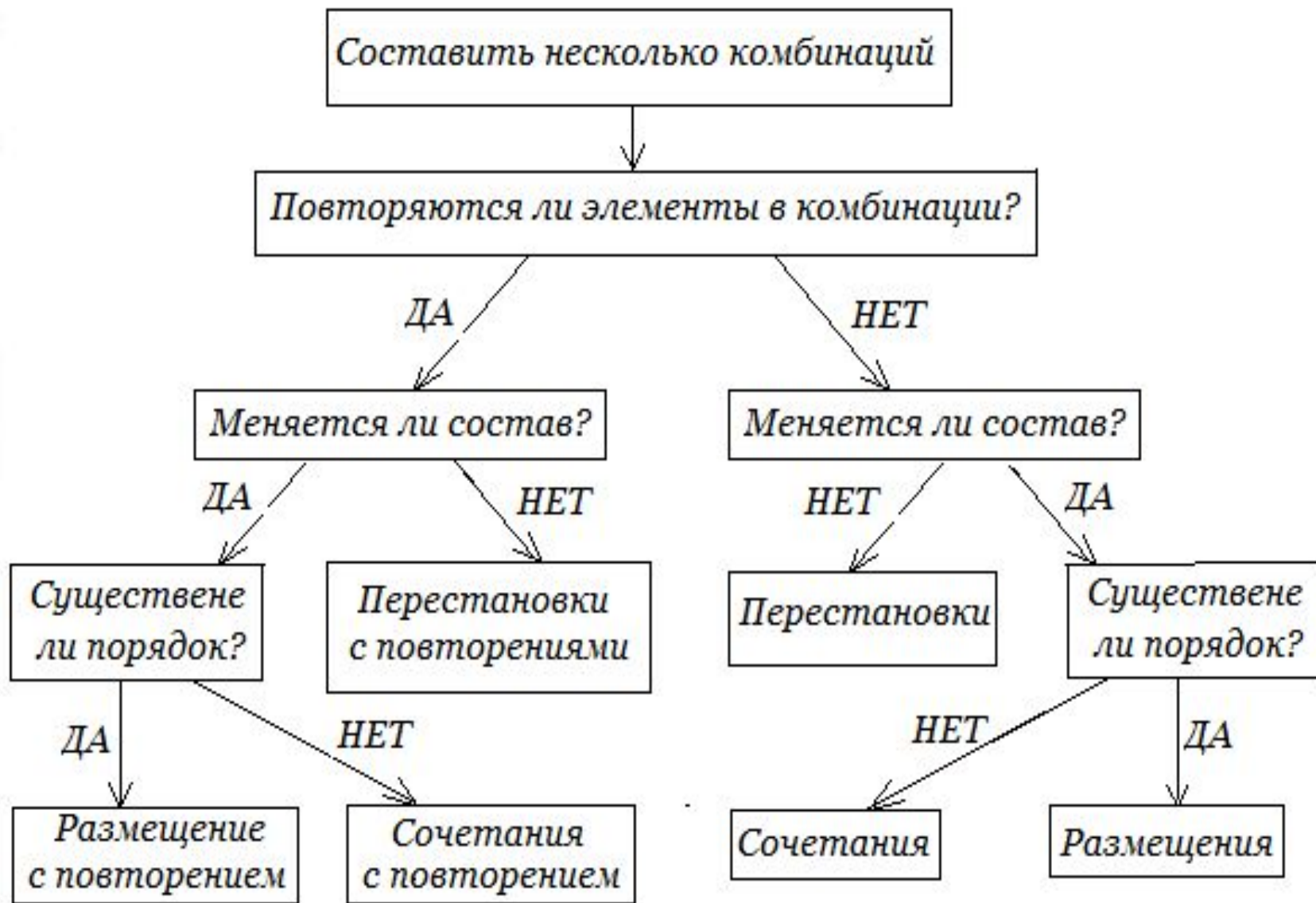
При решении комбинаторных задач нужно правильно использовать построенные конструкции. Главный принцип — не пытаться применять готовую формулу. Следует проанализировать конструкцию, способ составления и перечисления вариантов.



- * Правильность выбора формулы можно записать в виде таблицы:



* Схема определения вида комбинации:



Правило суммы (сложения).

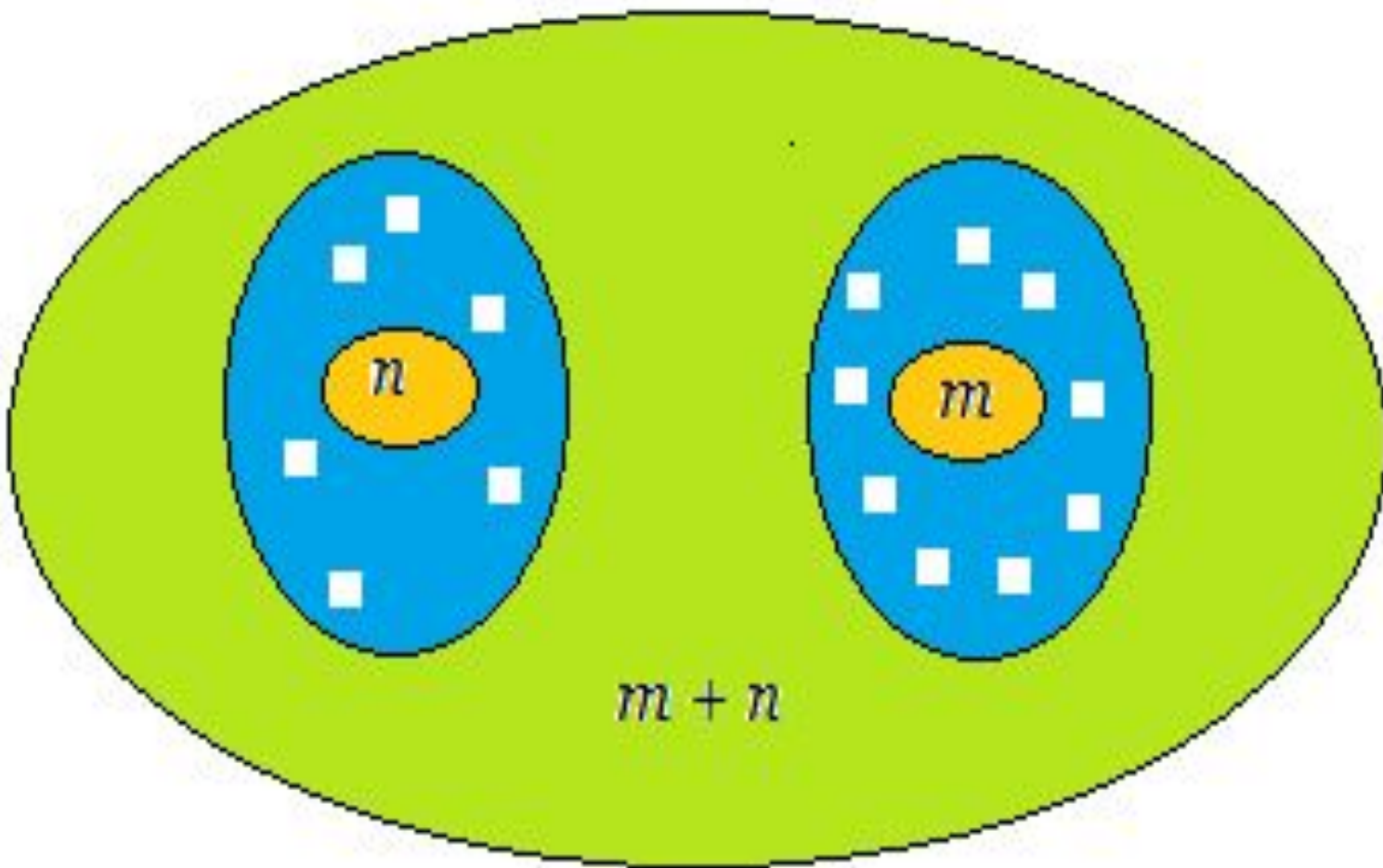
Пусть в множестве A имеется m элементов, а в множестве B – n элементов. Если у множеств A и B нет общих элементов, то в их объединении число элементов равно $m + n$

Можно сказать так, что если в двух мешках лежат разные предметы, и мы ссыпаем их вместе, то, чтобы найти их общее количество, надо сложить количества предметов в каждом из мешков.

Если для конечного множества X мы через $|X|$ обозначим количество его элементов, то правило сложения можно записать так:

$$\text{Если } A \cap B = \emptyset, \text{ то } |A \cup B| = |A| + |B|$$

Это правило несложно обобщается на случай, когда у множеств A и B есть общая часть.



Правило умножения.

Число пар, составленных из элементов множеств A и B , равно произведению количеств элементов этих множеств.

Множество пар элементов двух множеств часто обозначают с помощью знака произведения. Тогда правило умножения можно записать так:

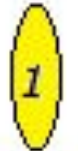





















$$|A \times B| = |A| \cdot |B|$$

Например: Если на первой полке стоит 5 книг, а на второй 10, то выбрать одну книгу с первой полки и одну со второй можно $5 \cdot 10 = 50$ способами.

Правило умножения легко пояснить с помощью таблицы. Если составить таблицу и пронумеровать её строчки элементами множества A , а столбцы — элементами множества B , то клетки таблицы будут соответствовать парам (a, b) , где $a \in A$, $b \in B$. Число клеток таблицы, очевидно, равно произведению числа строк и числа столбцов.

Рассмотрев оба эти правила можно сделать заключение:

1. Если в условии задачи звучит «И», то выбираем правило умножения.
2. Если в условии задачи надо найти «ИЛИ», то пользуемся правилом суммы.

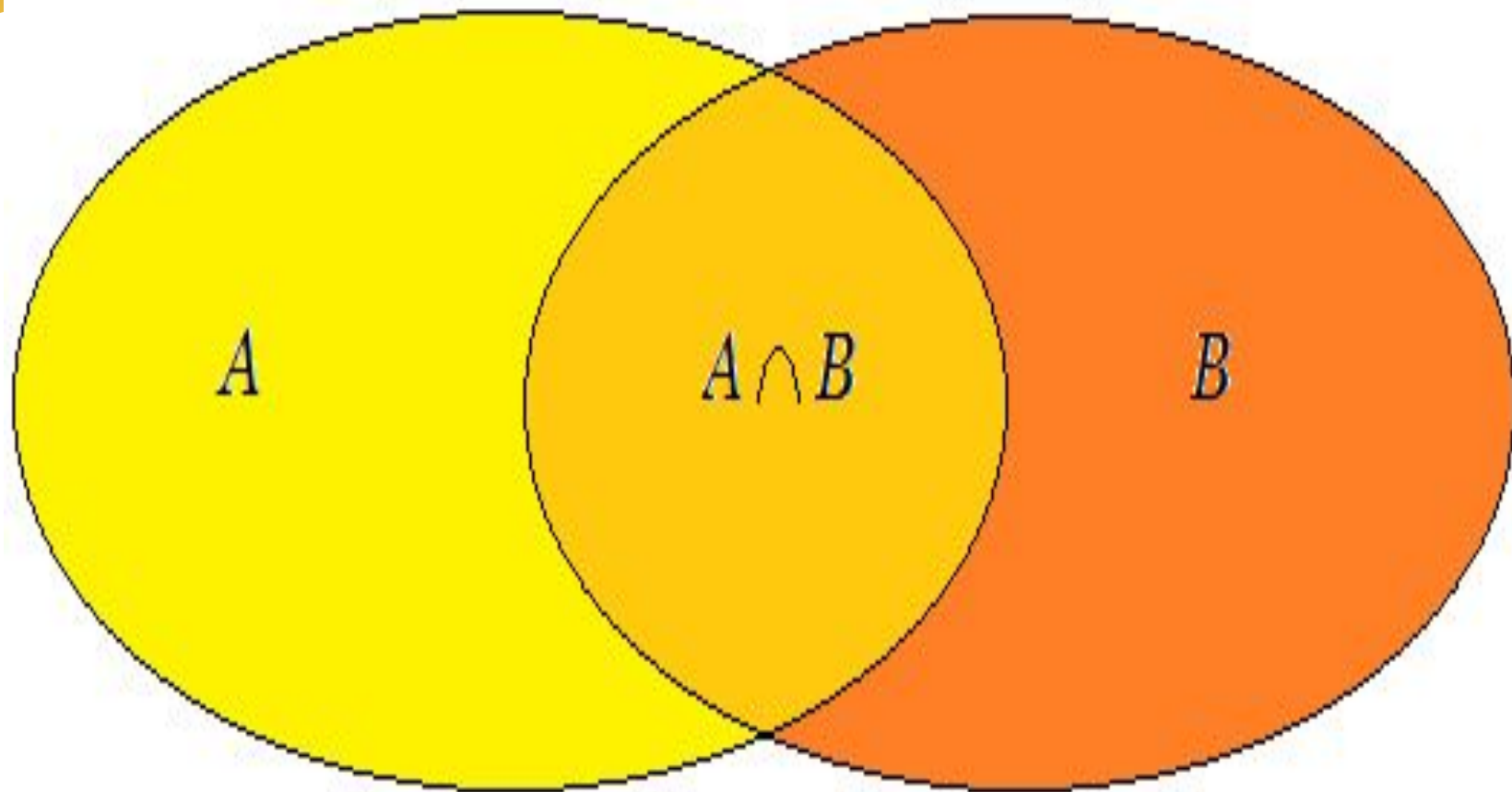
| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| <i>A</i> | <i>B</i> |  | ... |  |
|  |   | ... |   | |
|  |   | ... |   | |
|  |   | ... |   | |
| ... | ... | ... | ... | |
|  |   | ... |   | |

Правило включений и исключений.

Мы разобрали простейшие случаи, когда множества не пересекаются. А как быть со множествами, которые пересекаются? Для них существует правило включений и исключений. Данное правило распространяется на произвольное число множеств. Все различные комбинации элементов «А или В» можно выбрать по формуле:

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$$

Графически правило включений и исключений можно представить так:



Первый пример: Число слагаемых. Выяснить, сколько одночленов получится при умножении «скобки на скобку» данного произведения :

$$(a + b + c) * (a^2 + b^2 + c^2 - ab - ac - bc)?$$

Этот же вопрос можно задать другими словами: Сколько пар можно составить из одночленов в первой и второй скобках?

Решение заключается в следующем - выберем любой из трёх одночленов в первой скобке и любой из шести одночленов во второй скобке — число пар равно $3 * 6 = 18$. В данном случае использовали правило умножения.

Второй пример: Число слов. В алфавите 4 буквы. Сколько можно составить слов из трёх букв этого алфавита?

Применяем правило сложения, т.к. Число слов длины n из алфавита в 4 буквы равно 4^n .

$$4 + 4^2 + 4^3 = 4 + 16 + 64 = 84.$$

Третий пример: Число учеников. В классе каждый ученик изучает какой-нибудь язык, при этом 20 учеников изучают английский, 12 — французский, а 7 учеников — оба языка. Надо выяснить сколько учеников в классе?

Если сложить количество учеников, изучающих английский и французский языки, то мы учтём всех учеников, но тех, которые изучают два языка, посчитаем дважды. Для решения этой задачи применяем правило включения — исключения. Решение будет таковым:

$$20 + 12 - 7 = 25.$$

Спасибо за

внимание!