Математические предложения

План

I. **Высказывания и высказывательные формы.**
   1. Значение истинности высказываний и высказывательных форм.
   2. Простые и составные высказывания и высказывательные формы.
   3. Логическая структура составного предложения.

II. **Конъюнкция и дизъюнкция высказываний**
   1. Таблица истинности высказываний.
   2. Конъюнкция и дизъюнкция высказывательных форм.

III. **Высказывания с кванторами.**
   1. Квантор общности и значение истинности.
   2. Квантор существования и значение истинности.

IV. **Отрицание высказываний и высказывательных форм.**

V. **Отношения следования и равносильности.**

VI. **Структура и виды теорем.**
   1. Теорема, правила, формулы
   2. Виды теорем.
   3. Закон контрпозиции

VII. **Основные выводы**

Рассмотрим некоторые предложения

1. **«1 + 9 = 20 – 10.** Это равенство**»**
2. **37 + 6 > 37**
3. **20 + 8 < 20**
4. **«**некоторые числа делятся на **5»**
5. **5 + x = 9**

Определим истинны ли они или ложные

Предложения **1,2,4 –** истинные

Предложение **3 –** ложное

высказывания

Предложение **5 –** нельзя указать истинное оно или ложное

Высказывательная форма

Высказывание – предложение, относительно которого имеет смысл вопрос: истинно оно или ложно.

Высказывательная форма – предложение с одной или несколькими переменными, которое обращается в высказывание при подстановке в него значений переменной.

Высказывательная форма

а + в = с

одноместная в.ф.

а+ 3 =5

двухместная в.ф.

а + в = 5

Обозначения: А – «И» - высказывание А – истинно

В – «Л» - высказывание В – ложно

«И», «Л» - *значения истинности высказывания*

Множество истинности **высказывательной формы –** это значения переменной, которые обращают высказывательную форму в истинное высказывание.

Пример: определить множество истинности высказывательной формы $x < 6$, если а) $x \in N$

б) $x \in Z$ в) $x \in R$

а) Множество истинности – {1,2,3,4,5}

b) Множество истинности – {0,1,2,3,4,5}

c) Множество истинности – {- ∞; 6}

Выше рассмотренные предложения – **простые или элементарные** предложения.

Из двух простых предложений можно составить новые предложения с помощью союзов «и», «или»…

Логическая связка – «и», «или», «если,…то», «не», «тогда и только тогда, когда».

Составные предложения – это предложения, образованные из элементарных с помощью логических связок.

Для определения логической структуры составного предложения *необходимо установить*:

1. Из каких элементарных предложений оно образовано;
2. С помощью, каких логических связок оно образовано.

Пример: **1) x ≥7** – это составная высказывательная форма.

Логическая структура: **«A или B»**

Элементарные высказывательные формы – А – **«x > 7»**

В - **«x = 7»**

Логическая связка – **«**или**»**

2) «если треугольник равнобедренный, то углы при основании в нем равны» - это составное высказывание.

Логическая структура: **«Если A, то B»**

Элементарные предложения:

A – «треугольник равнобедренный»

B – «углы при основании равны»

Логические связки: «Если ……, то».

«Число **25** четное и делится на **5»**

Логическая структура **– «А и В»**

Элементарные высказывательные формы **–**

А **– «25 –** четное число**»**

В **– «25 –** делится на **5»**

Логическая связка **– «** и **»**

Проблема: **«**Как определить значение истинности составных предложений**?»**

Составное высказывание вида «А и В» называют конъюнкцией (лат. «соединение»), обозначают $A \wedge B$.

Определение. **Конъюнкцией** высказываний А и В называется высказывание А $\wedge$ В, которое истинно, когда оба высказывания истинны, и ложно, когда хотя бы одно из высказываний ложно.

Пример: **А – «Л»** $\Rightarrow$ А $\wedge$В **– «Л» (**по определению**)**

В – «И»

Составные высказывания вида «А или В» называют дизъюнкцией (лат. «разделение»), обозначают А$\vee$В.

Определение. **Дизъюнкцией** высказываний А и В называется высказывание

А $\vee$ В, которое истинно, когда истинно хотя бы одно из высказываний, и ложно, когда оба высказывания ложны.

Пример: «Число **25** делится на **5** или на **3**».

А – «25 делится на **5»**

В – «25 делится на **3»**

Логическая связка – или

Логическая структура - А$\vee$В

А – «И» $\Rightarrow$ – А$\vee$В **«**И**»** (по определению)

В – «Л»

Составим **таблицу истинности** конъюнкции и дизъюнкции

A	**B**	**A $\wedge$ B**	**A$\vee$B**
И	**И**	**И**	**И**
И	**Л**	**Л**	**И**
Л	**И**	**Л**	**И**
Л	**Л**	**Л**	**Л**

Конъюнкцию одноместных высказывательных форм обозначают:

$$A(x) \wedge B(x)$$

Высказывательная форма $A(x) \wedge B(x)$ обращается в истинное высказывание, если обращаются в <u>истинное</u> высказывание <u>обе высказывательные</u> формы $A(x)$ и $B(x)$ при значениях x из области определения X.

<u>*Пример*</u>:

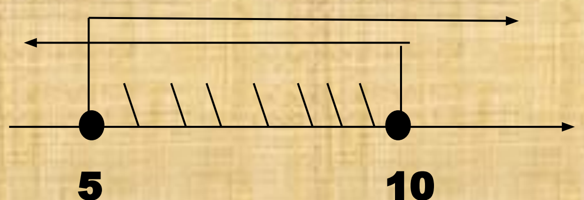
$$\begin{cases} x + 3 < 13 \\ 3x > 15 \end{cases}$$

$A(x)$ – $x+3<13$

$B(x)$ – $3x > 15$

<u>Логическая структура</u> $A(x) \wedge B(x)$

$$\begin{cases} x < 10 \\ x > 5 \end{cases}$$



Ответ: $A(x) \wedge B(x)$ – «И» при $x \in (5;10)$.

Дизъюнкцию одноместных высказывательных форм обозначают:

$$A(x) \vee B(x)$$

Высказывательная форма $A(x) \vee B(x)$ обращается в истинное высказывание, при тех значениях x из области определения X, при которых обращается в истинное высказывание хотя бы одна из высказывательных форм.

Пример: $(x + 7)(x - 4) = 0$

Произведение равно нулю, когда один из множителей равен нулю.

$A(x)$ – $x + 7=0$

$B(x)$ – $x – 4 =0$

Логическая структура: $A(x) \vee B(x)$

$x +7=0$ или $x – 4 =0$
$x = - 7$ $x=4$

Ответ. $A(x) \vee B(x)$ - И при $x \in (-7;4)$.

Квантор существования – это выражения **«**существует**»**, **«**некоторые**»**, **«**найдется**»**, **«**есть**»**, **«**хотя бы один**»**.

Обозначение: $\exists$ x – **«**существует x**»**

($\exists$ x**)** Ax – **«**существует такое значение x, что A**(**x**)** – истинное высказывание**»**.

Истинность высказывания с квантором **существования** устанавливается при помощи **конкретного примера**, **а ложность - доказывается.**

Пример: «Некоторые прямоугольные треугольники являются равносторонними».

Высказывание содержит квантор существования – «некоторые» и оно – «Л». Это необходимо доказать.

В равностороннем треугольнике все углы по **60°**, а в прямоугольном один из углов - **90°**. Следовательно, ни один прямоугольный треугольник не может быть равносторонним.

Квантор общности – это выражения **«**всякий**»**, **«**любой**»**, **«**каждый**»** и **«**все**»**.

Обозначение**:** $\forall$**x –** для всякого х**.**

($\forall$ х**) А(**х**) – «**для всякого х предложения **А(**х**) –** истинное высказывание**».**

Истинность высказывания с квантором общности устанавливается путем доказательства, а ложность – контрпример.

Пример**: «**Всякое натуральное число делится на **2 »** высказывание содержит квантор общности – **«**всякое и оно – Л**,** т**.**к**. «3** не делится на **2» -** контрпример**.**

В математике часто приходится строить предложения в которых что – либо отрицается.

Пример: «15 – простое число» А – Л

Построим отрицание высказывания: «неверно, что 15 простое число» - И

Обозначение: $\bar{A}$

Читают: «Не А» или «Неверно, что А».

Определение. **Отрицанием высказывания** А называется высказывание Ā, которое ложно, если высказывание А истинно, и истинно, если высказывание А-ложно.

А	**Ā**
И	**Л**
Л	**И**

Отрицании конъюнкции и дизъюнкции

Законы де Моргана

$$\boxed{\overline{A \wedge B} \Leftrightarrow \bar{A} \vee B}$$

$$\boxed{A \vee B \Leftrightarrow \bar{A} \wedge B}$$

Чтобы построить отрицание конъюнкции (дизъюнкции), достаточно заменить отрицаниями составляющие её высказывания, а союз «и» («или») заменить союзом «или» («и»).

Пример: «Число **15** – нечетное и делится на **5**».

Построить отрицание высказывания.

Решение

А ⋀ В – И

I. способ. A $\wedge$ B - «Неверно, что 15 – нечетное число и делится на 5». A $\wedge$ B – Л $\Rightarrow$ оно является отрицанием высказывания А.

II. способ. Воспользуемся законом де Моргана

$$A \vee B \Leftrightarrow \overline{A} \wedge B$$

«Число 15 – четное или не делится на 5» - Л

Отрицание высказываний с кванторами

Отрицание высказывания с квантором можно построить двумя способами:

- перед высказыванием ставится слова «неверно что»;
- квантор общности (существования) заменяется квантором существования (общности), а предложение, стоящее после квантора заменяется его отрицанием.

Пример: Построить отрицание высказываний

а) А–«Всякий многоугольник является четырехугольником» - Л – высказывание <u>с квантором общности.</u>

I. **способ.** $\bar{A}$ – «Неверно, что всякий многоугольник является четырехугольником» - И

$$A – Л \Rightarrow \bar{A} \text{ построено верно}$$

$$\bar{A} – И$$

II. **способ.** $\bar{A}$ - «Некоторые многоугольники не являются четырехугольниками» - И

$$A – Л \Rightarrow \bar{A} \text{ построено верно}$$

$$\bar{A} – И$$

b) А – «Некоторые свойства квадрата присущие прямоугольнику» - И – высказывание с <u>квантором существования</u>.

I. **способ.** $\bar{A}$ - «Неверно, что некоторые свойства квадрата присущи прямоугольнику».

А – И $\Rightarrow$ $\bar{A}$ построен верно

$\bar{A}$ – Л

II. **способ.** $\bar{A}$ - «Всякое свойство квадрата не присуще прямоугольнику» - Л

А – И

$\bar{A}$– Л

Отношения следования и равносильности

Рассмотрим высказывательные формы:

A(x) – «x >5»

B (x) – «x >2»

Как связаны между собой?

Можно утверждать:

- «Все числа больше пяти больше двух» или
- «из того, что x >5 следует, что x >2 ».

Определение. Высказывательная форма В (х) следует из высказывательной S формы А (х), если В (х) обращается в истинное высказывание при всех тех значениях х, при которых А (х) истинна.

Обозначение: $A(x) \Rightarrow B(x)$

Читают:

- Из А(х) следует В;
- Всякое А(х) есть В(х);
- Если А (х), то В(х);
- В(х)есть следствие А(х);
- А(х) – достаточное условие для В (х)
- В(х) – необходимое условие для А(х)
- Как установить истинность предложения $A(x) \Rightarrow B(x)$?

Его можно сформулировать в виде:

«<u>Всякое</u> А(х) есть В(х)»

Имеет место высказывание с квантором общности, значит **истинность** устанавливается путем доказательства, а **ложность –** контрпример.

Рассмотрим высказывания:

A(x) – «треугольник равнобедренный»

B(x) – «Углы при основании треугольника равны »

A(x) ⇒B (x) – **И**

«Если в треугольнике углы при основании равны, то он равнобедренный» - **И**

Говорят: предложения A(x) и B(x) – **равносильны.**

Определение. Предложения A(x) и B(x) **равносильны,** если из предложения A(x) следует предложения B(x), а из предложения B(x) следует предложение A(x).

Обозначение: A(x)⇔B(x)

Читают:

- A(x) равносильно B(x)
- A(x) тогда и только тогда, когда B(x)
- A(x) – необходимое и достаточное условие B(x)
- B(x) – необходимое и достаточное условие A(x)

- **Теорема** – это высказывание, истинность которого устанавливается путем доказательства.

Логическая структура теоремы:

$A \Rightarrow B$, где A и B – высказывательные формы с одной или несколькими переменными.

Предложение A – <u>условие теоремы</u>;

B – <u>заключение.</u>

Теорема. Если a – любое число и n, k – натуральные числа, то справедливо равенство

$$a^n * a^k = a^{n+k}$$

Для удобства использования теоремой её формулируют в виде правила.

Правило. При умножении степеней с одинаковыми основаниями, основания оставляют прежним. А показатели степеней складывают.

$$a^{n} * a^{k} = a^{n+k}$$

Пусть дана теорема:

Теорема	$A \Rightarrow B$	«Если четырехугольник является ромбом, то его диагонали взаимно перпендикулярны» - И
Обратная теорема	$B \Rightarrow A$	«Если в четырехугольнике диагонали взаимно перпендикулярны, то он является ромбом». - И
Противоположенная теорема		«Если четырехугольник не является ромбом, то его диагонали не перпендикулярны».
Обратная противоположной теорема		«Если в четырехугольнике диагонали не перпендикулярны, то четырехугольник не является ромбом».

•

$$(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (\bar{B} \Rightarrow \bar{A})$$

Закон контрапозиции

т.е. всегда когда истинна данная теорема, будет истинна и теорема обратная противоположенной.

Вопросы для самоконтроля

1. Сформулируйте разницу между высказыванием и высказывательной формой.
2. Как определить логическую структуру составного предложения?
3. Сформулируйте различие между конъюнкцией и дизъюнкцией.
4. Как определяется истинность конъюнкции и дизъюнкции высказываний и высказывательных форм?
5. Сформулируйте правила определения истинности высказываний с кванторами.
6. Где используется закон де Моргана?
7. Каким образом можно построить отрицание высказываний с кванторами?
8. В каких случаях используют отношение логического следования и равносильности между предложениями?
9. В чем отличие теоремы от правила?
10. Какова логическая структура различных видов теорем?
11. Каким законом связаны различные виды теорем?

Задания для практической работы

Стойлова Л.П. Математика: Учебное пособие для студентов средних педагогических учебных заведений «Академия», 1998.

§3, п.16 № 4,5,6,8

п.17 № 1,2,3,5,

п. 18 № 3,4

п. 20 № 5,6,7,9,10

п. 21 № 2,3,4,8

п.22№ 2,5,9,12

п.23 №2,5,6