



2. Упрощение логических выражений

***Законы логики.
Равносильные преобразования.***

Понятие равносильности



- Две формулы F и G называются равносильными, если на любых равных наборах переменных значения формул равны.

- Обозначение: $F \equiv G$

Способы проверки:

1. Построение таблиц истинности
2. С помощью законов алгебры логики



Построение таблиц ИСТИННОСТИ



Пример: проверить являются ли формулы эквивалентными с помощью таблиц ИСТИННОСТИ

$$\overline{(x \wedge y) \vee z} \quad \text{и} \quad \overline{z \rightarrow x} \vee \overline{z \rightarrow y}$$



Левая часть:

x	y	z	\bar{z}	$x \wedge y$	$(x \wedge y) \vee \bar{z}$	$\overline{(x \wedge y) \vee \bar{z}}$
1	1	1	0	1	1	0
1	1	0	1	1	1	0
1	0	1	0	0	0	1
1	0	0	1	0	1	0
0	1	1	0	0	0	1
0	1	0	1	0	1	0
0	0	1	0	0	0	1
0	0	0	1	0	1	0



Правая часть:

x	y	z	$z \rightarrow x$	$\overline{z \rightarrow x}$	$z \rightarrow y$	$\overline{z \rightarrow y}$	$\overline{z \rightarrow x \vee z \rightarrow y}$
1	1	1	1	0	1	0	0
1	1	0	1	0	1	0	0
1	0	1	1	0	0	1	1
1	0	0	1	0	1	0	0
0	1	1	0	1	1	0	1
0	1	0	1	0	1	0	0
0	0	1	0	1	0	1	1
0	0	0	1	0	1	0	0



Основные логические законы



1. Коммутативность:

$$A \vee B \equiv B \vee A,$$

$$A \wedge B \equiv B \wedge A.$$

2. Ассоциативность:

$$A \vee (B \vee C) \equiv (A \vee B) \vee C,$$

$$A \wedge (B \wedge C) \equiv (A \wedge B) \wedge C.$$

3. Дистрибутивность:

$$A \vee (B \wedge C) \equiv (A \vee B) \wedge (A \vee C),$$

$$A \wedge (B \vee C) \equiv (A \wedge B) \vee (A \wedge C).$$



Основные логические законы



4. Идемпотентность:

$$A \vee A \equiv A,$$

$$A \wedge A \equiv A.$$

5. Закон двойного отрицания:

$$\overline{\overline{A}} \equiv A.$$



Основные логические законы



6. Закон исключения третьего:

$$A \vee \bar{A} \equiv 1.$$

7. Закон противоречия:

$$A \wedge \bar{A} \equiv 0.$$

8. Законы де Моргана:

$$\overline{(A \vee B)} \equiv \bar{A} \wedge \bar{B},$$

$$\overline{(A \wedge B)} \equiv \bar{A} \vee \bar{B}.$$



Основные логические законы



9. Свойства операций с логическими константами:

$$A \vee 1 \equiv 1,$$

$$A \vee 0 \equiv A,$$

$$A \wedge 1 \equiv A,$$

$$A \wedge 0 \equiv 0.$$

10. Выражение одних операций через другие

$$A \rightarrow B \equiv \bar{A} \vee B$$

$$A \leftrightarrow B \equiv (\bar{A} \vee B) \wedge (A \vee \bar{B}) \equiv (A \wedge B) \vee (\bar{A} \wedge \bar{B})$$



Основные логические законы



11. Склейки и поглощения

$$A \vee (A \wedge B) \equiv A$$

$$A \wedge (A \vee B) \equiv A$$

$$A \vee (\bar{A} \wedge B) \equiv A \vee B$$

$$A \wedge (\bar{A} \vee B) \equiv A \wedge B$$

$$(A \vee B) \wedge (\bar{A} \vee B) \equiv B$$

$$(A \wedge B) \vee (\bar{A} \wedge B) \equiv B$$



Упрощение выражений с помощью равносильных преобразований

Основные правила:

1. С помощью законов [10] перейти к формуле, содержащей только дизъюнкцию, конъюнкцию и отрицание.
2. Пользуясь законами [5] и [8] убрать все отрицания не выше, чем над переменными.
3. Раскрыть скобки, пользуясь законами [2,3].
4. Удалить лишние конъюнкции и повторения в конъюнкциях, используя законы [4-7,11].
5. Удалить константы с помощью законов [9].



Пример 1



Упростить формулу АЛ и выполнить проверку с помощью ТИ

$$(x \leftrightarrow y) \rightarrow \overline{x \wedge y}$$

Решение.

$$\begin{aligned}
 & (x \leftrightarrow y) \rightarrow \overline{x \wedge y} \equiv ((\overline{x \vee y}) \wedge (\overline{y \vee x})) \rightarrow (\overline{x \vee y}) \equiv \\
 & \equiv \overline{((\overline{x \vee y}) \wedge (\overline{y \vee x})) \vee (\overline{x \vee y})} \equiv \\
 & \equiv ((x \wedge \overline{y}) \vee (y \wedge \overline{x})) \vee \overline{x \vee y} \equiv (x \wedge \overline{y}) \vee (y \wedge \overline{x}) \vee \overline{x} \vee \overline{y} \equiv \\
 & \equiv \overline{x} \vee \overline{y}
 \end{aligned}$$

The diagram shows a truth table (ТИ) for the formula $(x \leftrightarrow y) \rightarrow \overline{x \wedge y}$. The truth table is represented by a purple circuit diagram with two inputs, x and y , and one output. The output is 1 for all combinations of x and y except when both are 1. The truth table is as follows:

x	y	Output
0	0	1
0	1	1
1	0	1
1	1	0



Пример 2



$$\overline{(x \vee y)} \rightarrow \overline{(z \leftrightarrow x)}$$

Решение.

$$\begin{aligned} \overline{(x \vee y)} \rightarrow \overline{(z \leftrightarrow x)} &\equiv \overline{(x \vee y)} \vee \overline{(z \vee x)} \wedge \overline{(x \vee z)} \equiv \\ &\equiv (x \wedge \overline{y}) \vee (\overline{z} \wedge \overline{x}) \vee (x \wedge z) \end{aligned}$$



Пример 3



$$(x \vee (y \rightarrow z)) \rightarrow x$$

Решение.

$$\begin{aligned} (x \vee (y \rightarrow z)) \rightarrow x &\equiv \overline{(x \vee (y \rightarrow z))} \vee x \equiv \\ &\equiv \overline{(x \vee (\bar{y} \vee z))} \vee x = (\bar{x} \wedge (\bar{y} \wedge \bar{z})) \vee x \equiv \\ &\equiv (\bar{x} \wedge y \wedge \bar{z}) \vee x \equiv (\bar{x} \vee x) \wedge (y \vee x) \wedge (\bar{z} \vee x) \equiv \\ &\equiv (y \vee x) \wedge (\bar{z} \vee x) \equiv x \vee (y \wedge \bar{z}). \end{aligned}$$



Решить самостоятельно



$$4. (z \wedge y) \vee ((z \rightarrow \bar{y}) \wedge \bar{x})$$

$$5. (x \leftrightarrow z) \rightarrow (x \wedge \bar{y})$$

$$6. (x \wedge y) \vee ((x \rightarrow \bar{y}) \wedge \bar{z})$$

$$7. ((\bar{x} \rightarrow z) \rightarrow y) \rightarrow x$$

$$8. ((x \leftrightarrow \bar{y}) \vee z) \wedge y$$



Ответы:



$$4. \bar{x} \vee (y \wedge z)$$

$$5. (x \wedge \bar{z}) \vee (\bar{x} \wedge z) \vee (x \wedge \bar{y})$$

$$6. \bar{z} \vee (x \wedge y)$$

$$7. x \vee (\bar{y} \wedge z)$$

$$8. y \wedge (\bar{x} \vee z)$$

