Прогрессии

9 класс

1.3. Последовательности и прогрессии

1.3.1. Арифметическая прогрессия (b_n) задана условиями: $b_1 = -0{,}5$, $b_{n+1} = b_n + 1{,}5$. Найдите b_7.

1.3.2. Арифметическая прогрессия (b_n) задана условиями: $b_{13} = -3{,}2$, $b_{n+1} = b_n - 4$. Найдите b_{16}.

1.3.3. Арифметическая прогрессия (b_n) задана условием: $b_n = 3n + 2\frac{1}{2}$. Какое из чисел является членом этой прогрессии?

1) 31,5 2) 54,5 3) 68,5 4) 2,5

1.3.4. Арифметическая прогрессия (b_n) задана условием: $b_n = 6 - 4n$. Какое из чисел не является членом этой прогрессии?

1) −18 2) 2 3) 10 4) −2

1.3.5. В арифметической прогрессии (a_n): $a_1 = 1$, $a_7 = 7$. Найдите разность арифметической прогрессии.

1.3.6. В арифметической прогрессии (a_n): $a_{17} = 7{,}27$, $a_{21} = -4{,}73$. Найдите разность арифметической прогрессии.

$$\div a_1; a_2; a_3; \ldots; a_{n-2}; a_{n-1}; a_n.$$

$$S = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_{n-2} + a_{n-1} + a_n.$$

Докажем, что $\underline{a_2 + a_{n-1} = a_1 + a_n}$

$$\text{Доказательство}: a_2 = a_1 + d, a_n = a_{n-1} + d,$$

$$a_{n-1} = a_n - d, \ \underbrace{a_1 + d}_{a_2} + \underbrace{a_n - d}_{a_{n-1}} = a_1 + a_n.$$

Пример 1. S = 1 + 2 + 3 + 4 + … + 98 + 99 + 100 = (1 + 100) + (2 + 99) + (3 + 98) + …+ (50 + 51) = = 101 + 101 + 101 + … +101 = 101× 50 =5050

$$S = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_{n-2} + a_{n-1} + a_n$$

$$\underline{S = a_n + a_{n-1} + a_{n-2} + \ldots + a_3 + a_2 + a_1}$$

$$2S = (a_1 + a_n) + (a_2 + a_{n-1}) + (a_3 + a_{n-2}) + \ldots + (a_{n-2} + a_3)$$

$$+ (a_{n-1} + a_2) + (a_n + a_1)$$

Формула суммы n – членов конечной арифметической прогрессии

$$2 \cdot S = n \cdot (a_1 + a_n)$$

$$S = \frac{n \cdot (a_1 + a_n)}{2}$$

$$a_n = a_1 + (n-1)d,$$

$$S = \frac{2a_1 + (n-1)d}{2} \cdot n$$

Геометрическая прогрессия

$\div (b_n)$; или $\div\, b_1; b_2; b_3; \ldots; b_{n-2}; b_{n-1}; b_n$.

$$b_1; \quad b_2 = b_1 \cdot q;$$

$$b_3 = b_2 \cdot q = b_1 \cdot q \cdot q = b_1 \cdot q^2;$$

$$b_4 = b_1 \cdot q^3;$$

$$b_5 = b_1 \cdot q^4;$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$b_n = b_1 \cdot q^{n-1}$$

- Пример 1: Возьмем некую геометрическую прогрессию, в которой первый член равен 2, а знаменатель геометрической прогрессии равен 1,5. Надо найти 4-й член этой прогрессии.
- Дано:
  $b_1 = 2$
  $q = 1{,}5$
  $n = 4$

  ---
  b_4 - ?
- Решение.
  Применяем формулу $b_n = b_1 \cdot q^{n-1}$, вставляя в нее соответствующие значения:
- $b_4 = 2 \cdot 1{,}5^{4-1} = 2 \cdot 1{,}5^3 = 2 \cdot 3{,}375 = 6{,}75.$
- Ответ: $b_4 = 6{,}75.$

- Пример 2: Найдем пятый член геометрической прогрессии, если первый и третий члены равны соответственно 12 и 192.

Дано:

$b_1 = 12$

$b_3 = 192$

b_5 - ?

Решение.

1) Сначала нам надо найти знаменатель геометрической прогрессии, без которой решить задачу невозможно. В качестве первого шага с помощью нашей формулы выводим формулу для b_3:

$$b_3 = b_1 \cdot q^{3-1} = b_1 \cdot q^2$$

Теперь мы можем найти знаменатель геометрической прогрессии:

$$q^2 = \frac{b_3}{b_1} = \frac{192}{12} = 16,$$

$q^2 = 16$ $q = 4$ или $q = -4$.

2) Осталось найти значение b_5.

Если $q = 4$, то

$$b_5 = b_1 q^{5-1} = b_1 q^4 = 12 \cdot 4^4 = 12 \cdot 256 = 3072.$$

При $q = -4$ результат будет тот же. Таким образом, задача имеет одно решение.

Ответ: 3072.

Свойства геометрической прогрессии:

- **1) Квадрат любого члена геометрической прогрессии, начиная со второго, равен произведению двух соседних членов, стоящих перед ним и после него:**
- $b_n^2 = b_{n-1} \cdot b_{n+1}$
- **2) Верно и обратное утверждение: если в последовательности чисел квадрат любого ее члена, начиная со второго, равен произведению двух соседних членов, стоящих перед ним и после него, то эта последовательность является геометрической прогрессией:**
- Пример:

  рассмотрим геометрическую прогрессию: **2, 6, 18, 54, 162.**
- Возьмем четвёртый член и возведем его в квадрат:
- $54^2 = 2916$.
- Теперь перемножим члены, стоящие слева и справа от числа 54:
- $18 \cdot 162 = 2916$.
- Как видим, квадрат четвёртого члена равен произведению соседних третьего и пятого членов.

Геометрическая прогрессия

$$2, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \frac{1}{32}, \frac{1}{64} \ldots$$

Формула суммы n – членов конечной геометрической прогрессии

$$\boxed{b_1; b_2; b_3; \ldots; b_{n-2}; b_{n-1}; b_n.}$$

$$S_n = b_1 + b_2 + b_3 + \ldots + b_{n-2} + b_{n-1} + b_n,$$

$$\underline{S_n \cdot q = (b_1 + b_2 + b_3 + \ldots + b_{n-2} + b_{n-1} + b_n) \cdot q} =$$

$$= b_1 \cdot q + b_2 \cdot q + b_3 \cdot q + \ldots + b_{n-2} \cdot q + b_{n-1} \cdot q + b_n \cdot q =$$

$$= (b_2 + b_3 + \ldots + b_{n-2} + b_{n-1} + b_n) + b_n \cdot q =$$

$$(\underline{b_1} + b_2 + b_3 + \ldots + b_{n-2} + b_{n-1} + b_n) + b_n \cdot q \underline{- b_1} =$$

$$= S_n + b_n \cdot q - b_1;$$

$$S_n \cdot q = S_n + b_n \cdot q - b_1; \qquad \underline{S_n \cdot q = S_n + b_1 \cdot q^n - b_1}; \ \text{т.к.}$$

$$\underline{b_n \cdot q = (b_1 \cdot q^{n-1}) \cdot q = b_1 \cdot q^n, \text{то}}$$

Формула суммы n – членов конечной геометрической прогрессии

$$S_n \cdot q - S_n = b_1 \cdot (q^n - 1);$$

$$S_n \cdot (q - 1) = b_1 \cdot (q^n - 1);$$

$$S_n = \frac{b_1 \cdot (q^n - 1)}{(q - 1)}$$

Формулы суммы n первых членов геометрической прогрессии с $q \neq 1$:

1) $S_n = \dfrac{b_n q - b_1}{q-1}$ 2) $S_n = \dfrac{b_1(q^n - 1)}{q-1}$

Если $q = 1$, то $S_n = n \cdot b_1$

Сумма бесконечной геометрической прогрессии при $|q| < 1$:

$$S_n = \frac{b_1}{1-q}$$

Пример: Найдем сумму первых пяти членов геометрической прогрессии (b_n), в которой первый член равен 2, а знаменатель геометрической прогрессии 3.

Дано:

$b_1 = 2$

$q = 3$

$n = 5$

S_5 – ?

Решение.

$$S_n = \frac{b_1 \cdot (q^n - 1)}{(q - 1)}$$

$$S_5 = \frac{b_1\,(q^5 - 1)}{q - 1} = \frac{2\,(3^5 - 1)}{3 - 1} = \frac{2 \cdot (243 - 1)}{2} = \frac{484}{2} = 242$$

Ответ: 242.