



Прогрессии

9 класс

1.3. Последовательности и прогрессии

1.3.1. Арифметическая прогрессия (b_n) задана условиями: $b_1 = -0,5$, $b_{n+1} = b_n + 1,5$. Найдите b_7 .

1.3.2. Арифметическая прогрессия (b_n) задана условиями: $b_{13} = -3,2$, $b_{n+1} = b_n - 4$. Найдите b_{16} .

1.3.3. Арифметическая прогрессия (b_n) задана условием: $b_n = 3n + 2\frac{1}{2}$. Какое из чисел является членом этой прогрессии?

1) 31,5

2) 54,5

3) 68,5

4) 2,5

1.3.4. Арифметическая прогрессия (b_n) задана условием: $b_n = 6 - 4n$. Какое из чисел не является членом этой прогрессии?

1) -18

2) 2

3) 10

4) -2

1.3.5. В арифметической прогрессии (a_n) : $a_1 = 1$, $a_7 = 7$. Найдите разность арифметической прогрессии.

1.3.6. В арифметической прогрессии (a_n) : $a_{17} = 7,27$, $a_{21} = -4,73$. Найдите разность арифметической прогрессии.

$$\div a_1; a_2; a_3; \dots; a_{n-2}; a_{n-1}; a_n.$$

$$S = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_{n-2} + a_{n-1} + a_n.$$

Докажем, что

$$\underline{a_2 + a_{n-1} = a_1 + a_n}$$

Доказательство: $a_2 = a_1 + d, a_n = a_{n-1} + d,$

$$a_{n-1} = a_n - d, \quad \underbrace{\quad \quad \quad}_{a_2} + d + \underbrace{\quad \quad \quad}_{a_{n-1}} - d = a_1 + a_n.$$

Пример 1. $S = 1 + 2 + 3 + 4 + \dots + 98 + 99 + 100 =$
 $(1 + 100) + (2 + 99) + (3 + 98) + \dots + (50 + 51) =$
 $= 101 + 101 + 101 + \dots + 101 = 101 \times 50 = 5050$

$$S = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_{n-2} + a_{n-1} + a_n$$

$$S = a_n + a_{n-1} + a_{n-2} + \dots + a_3 + a_2 + a_1$$

$$\underline{2S = (a_1 + a_n) + (a_2 + a_{n-1}) + (a_3 + a_{n-2}) + \dots + (a_{n-2} + a_3) + (a_{n-1} + a_2) + (a_n + a_1)}$$

Формула суммы n – членов конечной арифметической прогрессии

$$2 \cdot S = n \cdot (a_1 + a_n)$$

$$S = \frac{n \cdot (a_1 + a_n)}{2}$$

$$a_n = a_1 + (n - 1)d,$$

$$S = \frac{2a_1 + (n - 1)d}{2} \cdot n$$

Геометрическая прогрессия

$\dots (b_n)$; или $\dots b_1; b_2; b_3; \dots; b_{n-2}; b_{n-1}; b_n$.

$$b_1; \quad b_2 = b_1 \cdot q;$$

$$b_3 = b_2 \cdot q = b_1 \cdot q \cdot q = b_1 \cdot q^2;$$

$$b_4 = b_1 \cdot q^3;$$

$$b_5 = b_1 \cdot q^4;$$

.....

$$b_n = b_1 \cdot q^{n-1}$$

- Пример 1: Возьмем некую геометрическую прогрессию, в которой первый член равен 2, а знаменатель геометрической прогрессии равен 1,5. Надо найти 4-й член этой прогрессии.

- Дано:

$$b_1 = 2$$

$$q = 1,5$$

$$n = 4$$

$$b_4 - ?$$

- Решение.

Применяем формулу $b_n = b_1 \cdot q^{n-1}$, вставляя в нее соответствующие значения:

- $b_4 = 2 \cdot 1,5^{4-1} = 2 \cdot 1,5^3 = 2 \cdot 3,375 = 6,75.$

- Ответ: $b_4 = 6,75.$

- Пример 2: Найдем пятый член геометрической прогрессии, если первый и третий члены равны соответственно 12 и 192.

Дано:

$$b_1 = 12$$

$$b_3 = 192$$

$$b_5 = ?$$

Решение.

- 1) Сначала нам надо найти знаменатель геометрической прогрессии, без которой решить задачу невозможно. В качестве первого шага с помощью нашей формулы выводим формулу для b_3 :

$$b_3 = b_1 \cdot q^{3-1} = b_1 \cdot q^2$$

Теперь мы можем найти знаменатель геометрической прогрессии:

$$q^2 \stackrel{b_3}{=} \frac{192}{b_1} = \frac{192}{12} = 16,$$

$$q^2 = 16 \quad q = 4 \text{ или } q = -4.$$

- 2) Осталось найти значение b_5 .

Если $q = 4$, то

$$b_5 = b_1 q^{5-1} = b_1 q^4 = 12 \cdot 4^4 = 12 \cdot 256 = 3072.$$

При $q = -4$ результат будет тот же. Таким образом, задача имеет одно решение.

Ответ: 3072.

Свойства геометрической прогрессии:

- 1) Квадрат любого члена геометрической прогрессии, начиная со второго, равен произведению двух соседних членов, стоящих перед ним и после него:
$$b_n^2 = b_{n-1} \cdot b_{n+1}$$
- 2) Верно и обратное утверждение: если в последовательности чисел квадрат любого ее члена, начиная со второго, равен произведению двух соседних членов, стоящих перед ним и после него, то эта последовательность является геометрической прогрессией:
- Пример:
рассмотрим геометрическую прогрессию: 2, 6, 18, 54, 162.
- Возьмем четвертый член и возведем его в квадрат:
- $54^2 = 2916.$
- Теперь перемножим члены, стоящие слева и справа от числа 54:
- $18 \cdot 162 = 2916.$
- Как видим, квадрат четвертого члена равен произведению соседних третьего и пятого членов.

Геометрическая прогрессия

$$2, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \frac{1}{32}, \frac{1}{64} \dots$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ И СВОЙСТВА



b_1 – первый член q – знаменатель прогрессии

$(b_n): -1; 3; -9; 27 \dots \Leftrightarrow b_1 = -1; q = -3$

Формулы n -го члена

$$b_n = b_{n-1} \cdot q$$
$$b_n = b_1 \cdot q^{n-1}$$

$b_n^2 = b_{n-1} \cdot b_{n+1}$ Характеристическое свойство

□ **Формула суммы n – членов конечной геометрической прогрессии**

$$b_1; b_2; b_3; \dots; b_{n-2}; b_{n-1}; b_n.$$

$$S_n = b_1 + b_2 + b_3 + \dots + b_{n-2} + b_{n-1} + b_n,$$

$$\begin{aligned} S_n \cdot q &= \underline{(b_1 + b_2 + b_3 + \dots + b_{n-2} + b_{n-1} + b_n)} \cdot q = \\ &= b_1 \cdot q + b_2 \cdot q + b_3 \cdot q + \dots + b_{n-2} \cdot q + b_{n-1} \cdot q + b_n \cdot q = \\ &= (b_2 + b_3 + \dots + b_{n-2} + b_{n-1} + b_n) + b_n \cdot q = \\ &= \underline{b_1} + b_2 + b_3 + \dots + b_{n-2} + b_{n-1} + b_n + b_n \cdot q - \underline{b_1} = \\ &= S_n + b_n \cdot q - b_1; \end{aligned}$$

$$S_n \cdot q = S_n + b_n \cdot q - b_1; \quad \underline{S_n \cdot q = S_n + b_1 \cdot q^n - b_1}; \text{ м.к.}$$

$$\underline{b_n \cdot q = (b_1 \cdot q^{n-1}) \cdot q = b_1 \cdot q^n}, \text{ мо}$$

- **Формула суммы n – членов конечной геометрической прогрессии**

$$S_n \cdot q - S_n = b_1 \cdot (q^n - 1);$$

$$S_n \cdot (q - 1) = b_1 \cdot (q^n - 1);$$

$$S_n = \frac{b_1 \cdot (q^n - 1)}{(q - 1)}$$

Формулы суммы n первых членов
геометрической прогрессии с $q \neq 1$:

$$1) S_n = \frac{b_n q - b_1}{q - 1} \quad 2) S_n = \frac{b_1 (q^n - 1)}{q - 1}$$

Если $q = 1$, то $S_n = n \cdot b_1$

Сумма бесконечной
геометрической
прогрессии
при $|q| < 1$:

$$S_n = \frac{b_1}{1 - q}$$

Пример: Найдем сумму первых пяти членов геометрической прогрессии (b_n), в которой первый член равен 2, а знаменатель геометрической прогрессии 3.

Дано:

$$b_1 = 2$$

$$q = 3$$

$$n = 5$$

$$S_5 - ?$$

Решение.

$$S_n = \frac{b_1 \cdot (q^n - 1)}{(q - 1)}$$

$$S_5 = \frac{b_1 (q^5 - 1)}{q - 1} = \frac{2 (3^5 - 1)}{3 - 1} = \frac{2 \cdot (243 - 1)}{2} = \frac{484}{2} = 242$$

Ответ: 242.

