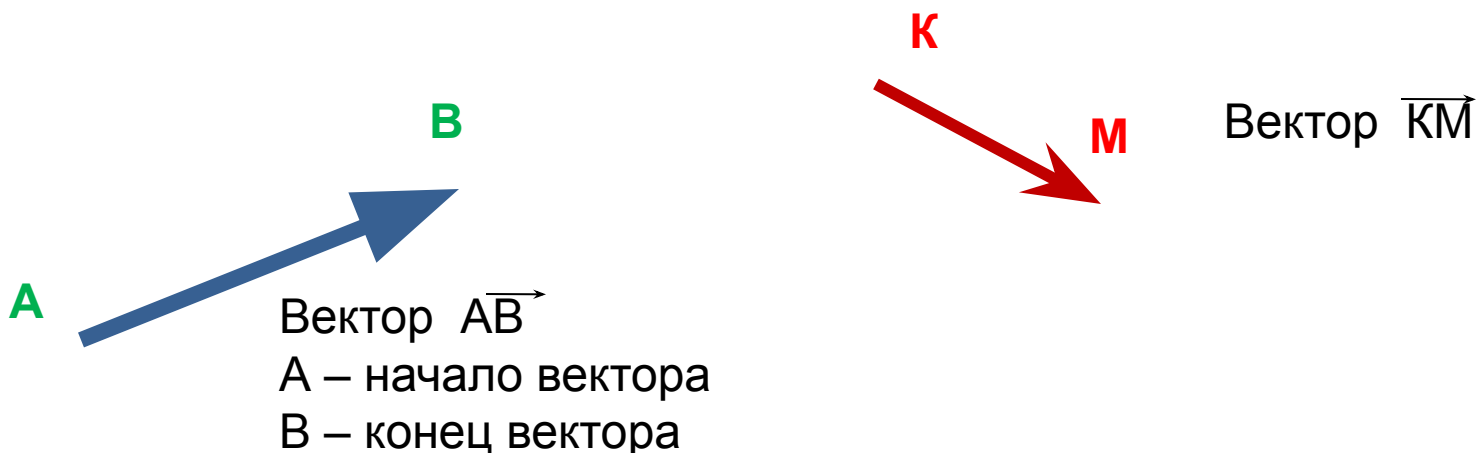


# Вектор

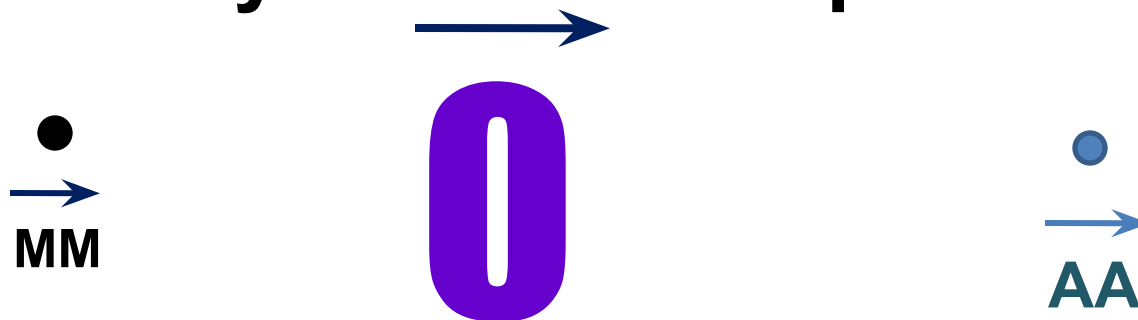
**9класс**

# ОПРЕДЕЛЕНИЕ

Отрезок, для которого указано, какая из его граничных точек считается началом, а какая - концом, называется **направленным отрезком** или **вектором**

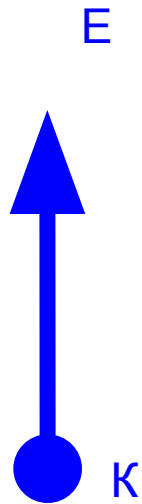


**Любая точка плоскости является  
нулевым вектором**



**Начало нулевого вектора  
совпадает с его концом**

# Длина вектора



Длиной вектора или модулем ненулевого вектора называется длина отрезка

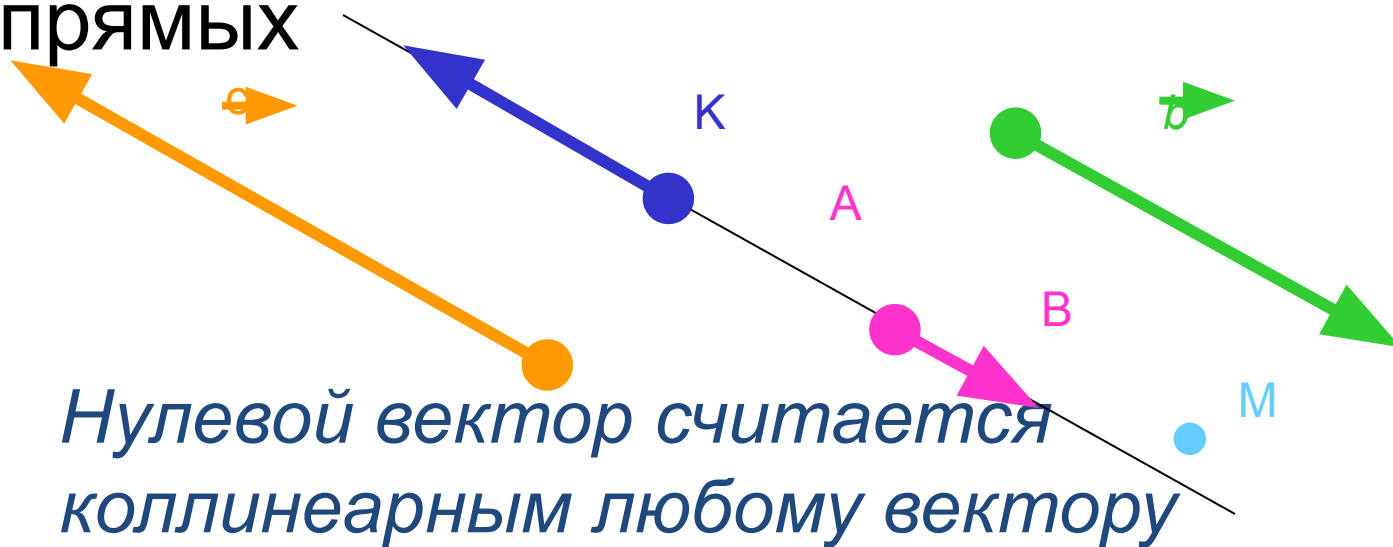
$$|\overrightarrow{KE}| = |KE| \text{ длина вектора } \overrightarrow{KE}$$

вектор  $\overrightarrow{MM}$  - нулевой вектор

$$|\overrightarrow{MM}| = 0$$

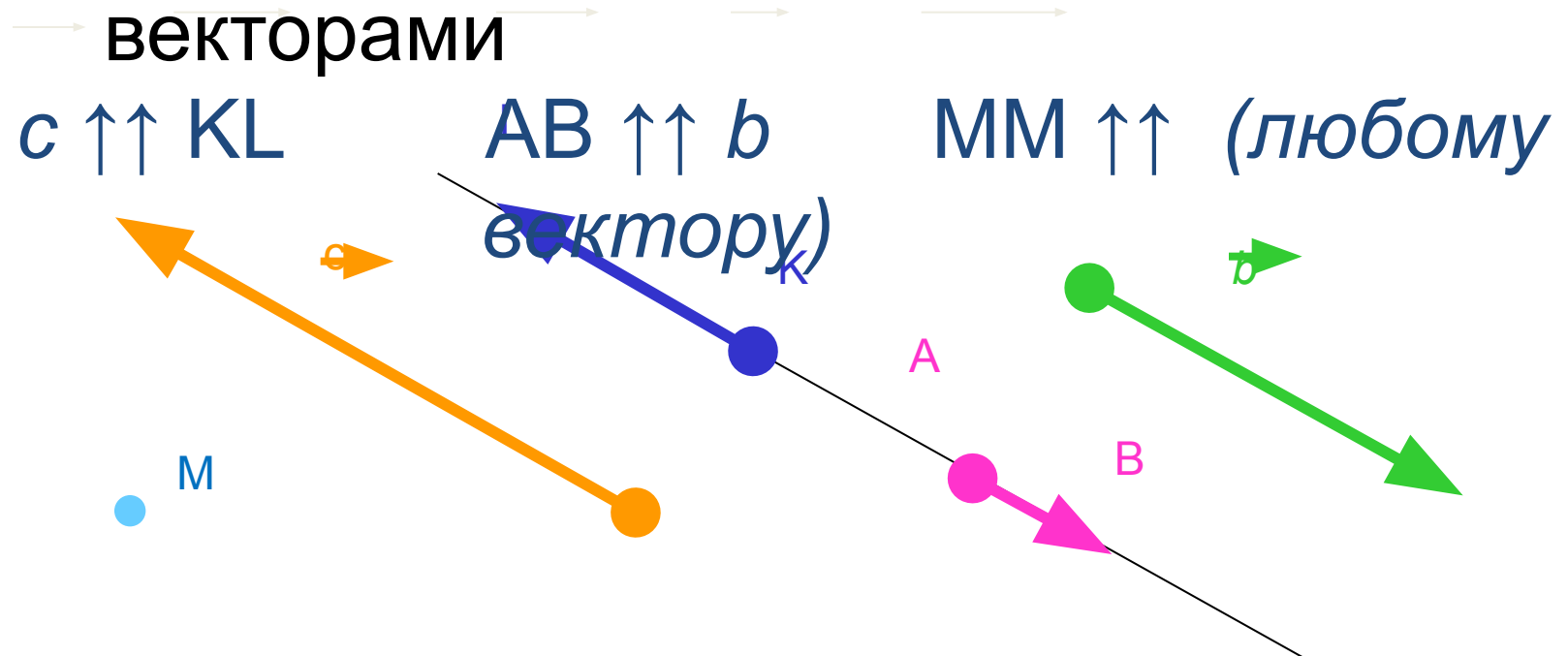
# Коллинеарные векторы

Ненулевые векторы называются **коллинеарными**, если они лежат на одной прямой или на параллельных прямых



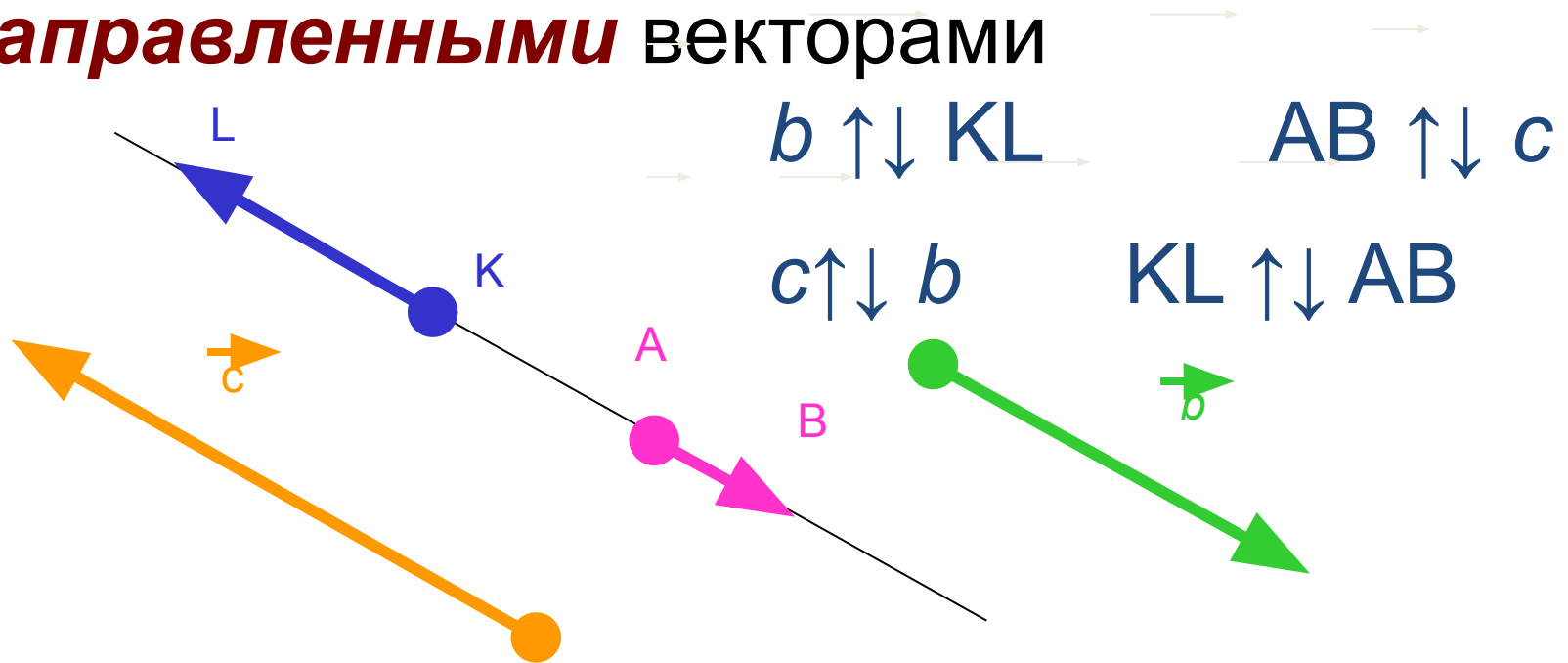
# Сонаправленные векторы

Коллинеарные векторы, имеющие одинаковое направление, называются **сонаправленными**



# Противоположно направленные векторы

Коллинеарные векторы, имеющие противоположное направление, называются **противоположно направленными** векторами



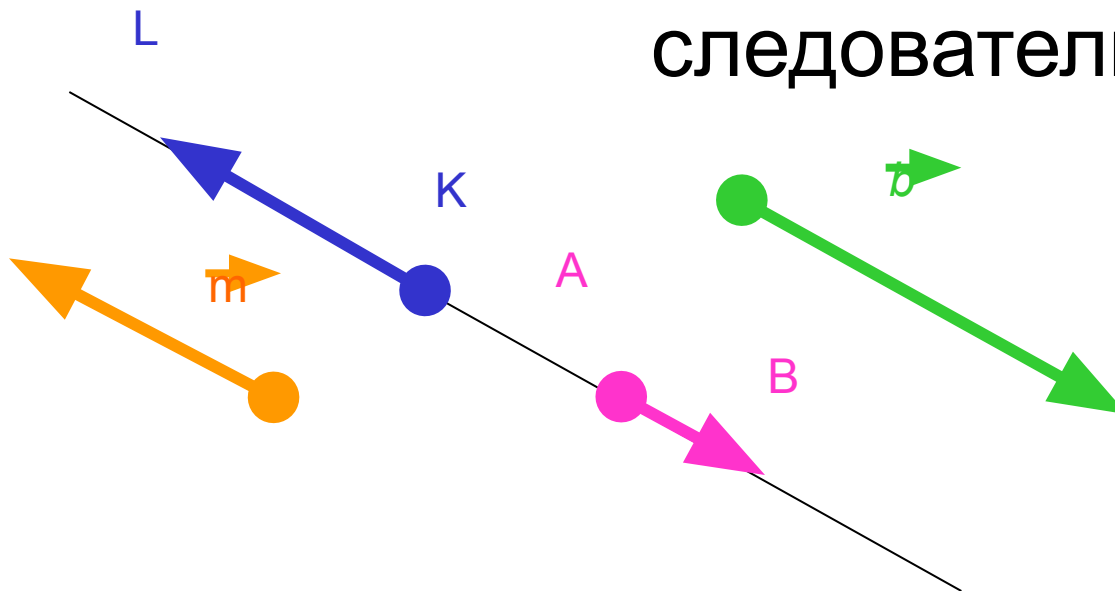
# Равенство векторов

Векторы называются **равными**, если:

- 1) они сонаправлены ;
- 2) их длины равны.

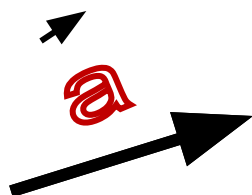
$$\vec{m} \uparrow\uparrow \overline{KL}, \quad |\vec{m}| = |\overline{KL}|$$

следовательно  $\vec{m} = \overline{KL}$





# ОТКЛАДЫВАНИЕ ВЕКТОРА ОТ ДАННОЙ ТОЧКИ



М •

От любой точки М  
можно отложить вектор,  
равный данному  
и притом только один

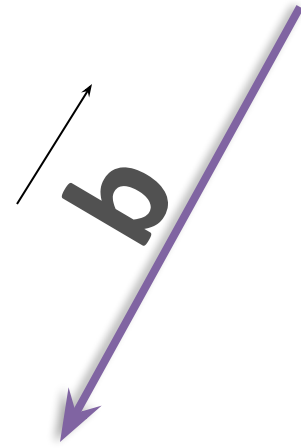
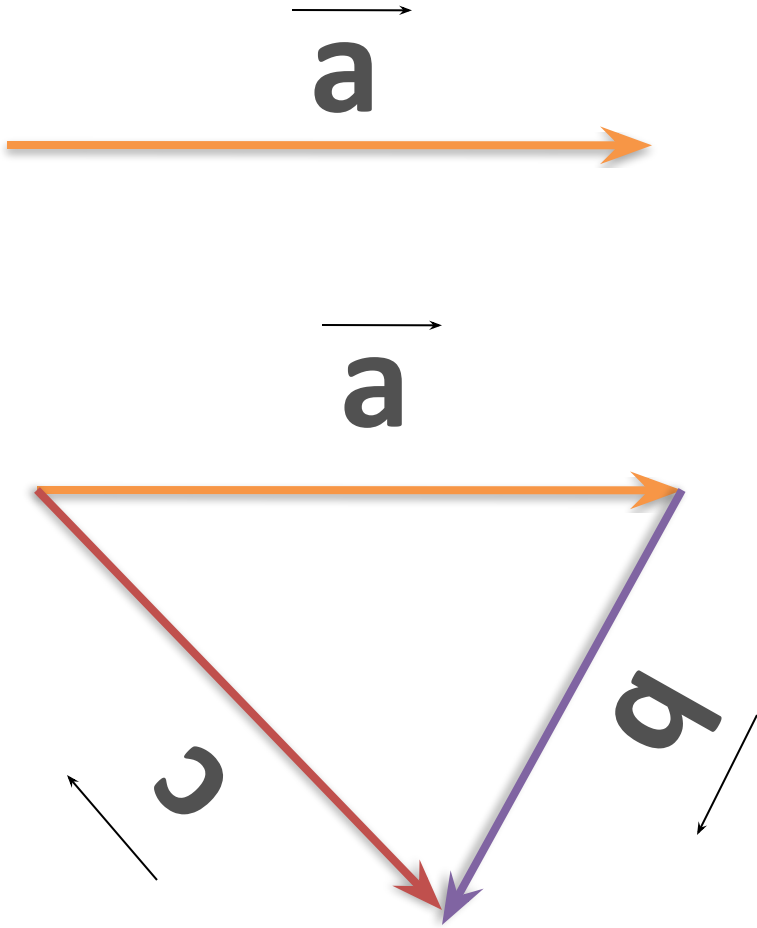
Р •

К •

•  
F

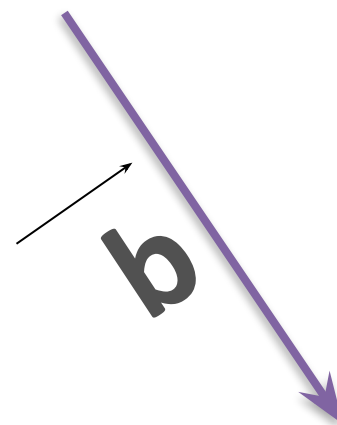
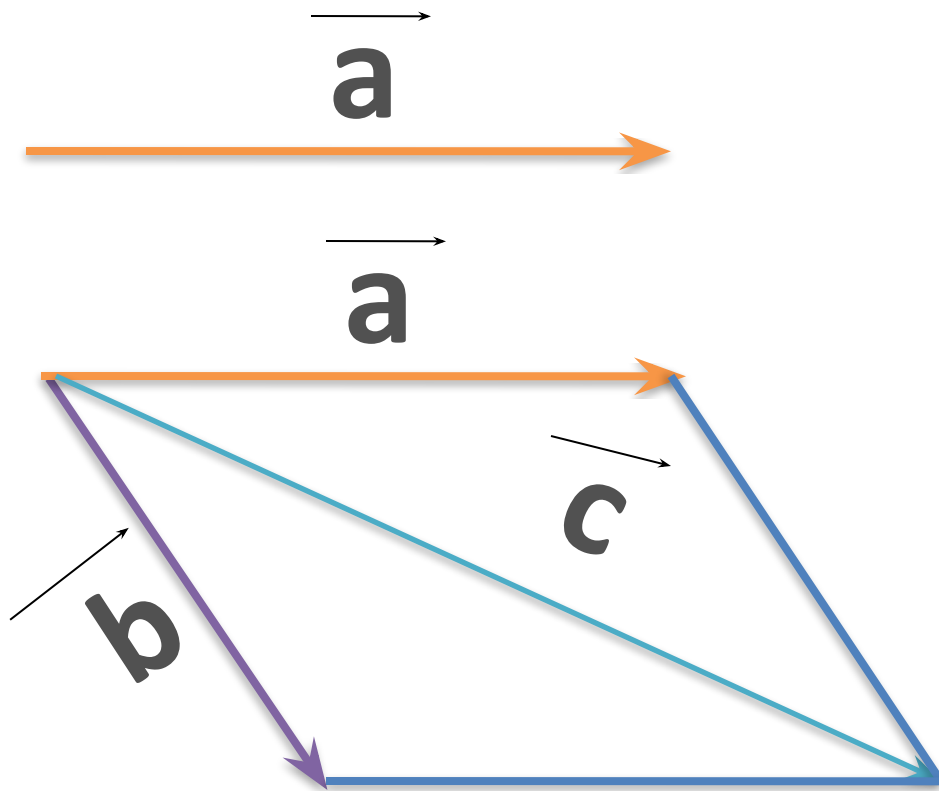
$$\vec{a} = \vec{c}, \text{ так как } \vec{a} \uparrow\uparrow \vec{c} \text{ и } |\vec{a}| = |\vec{c}|$$





$$\vec{a} + \vec{b} = \vec{c}$$

# Сложение векторов по правилу параллелограмма

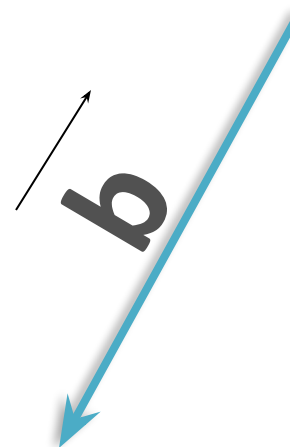
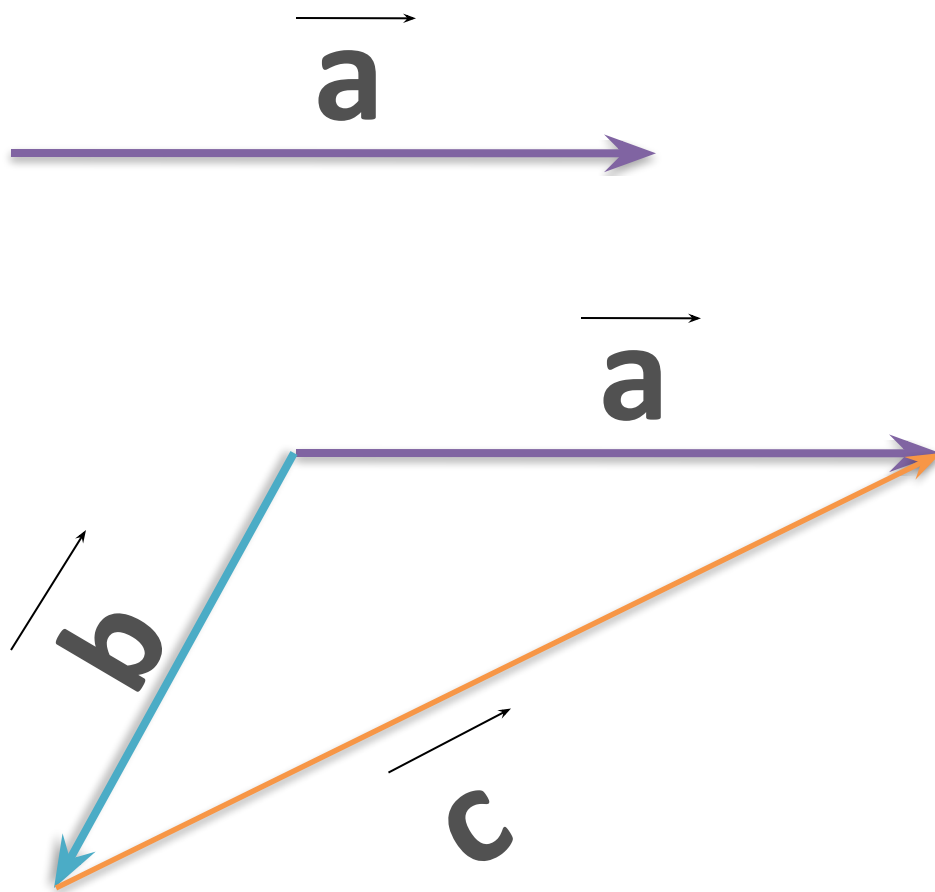


$$\vec{a} + \vec{b} = \vec{c}$$

Суммой векторов  $\vec{a}\{x_1; y_1\}$  и  $\vec{b}\{x_2; y_2\}$  называется вектор  $\vec{c}\{x_1 + x_2; y_1 + y_2\}$ , т. е.

$$\vec{a}\{x_1; y_1\} + \vec{b}\{x_2; y_2\} = \vec{c}\{x_1 + x_2; y_1 + y_2\}$$

# Вычитание векторов



$$\overrightarrow{\quad} - \overrightarrow{\quad} = \overrightarrow{\quad}$$

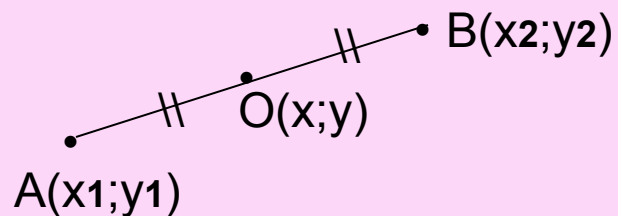
$\mathbf{a} - \mathbf{b} = \mathbf{c}$

Разностью векторов  $\vec{a}\{x_1 ; y_1\}$  и  $\vec{b}\{x_2 ; y_2\}$  называется вектор  $\vec{c}\{x_1 - x_2 ; y_1 - y_2\}$ , т. е.

$$\vec{a}\{x_1 ; y_1\} - \vec{b}\{x_2 ; y_2\} = \vec{c}\{x_1 - x_2 ; y_1 - y_2\}$$

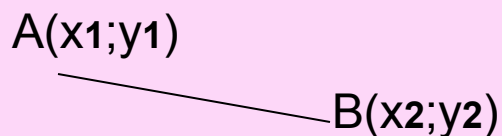
# Формулы в координатах.

## 1. Координаты середины отрезка



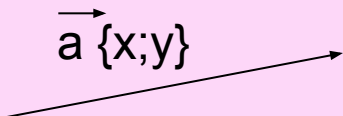
$$x = \frac{x_1 + x_2}{2} \quad y = \frac{y_1 + y_2}{2}$$

## 2. Расстояние между двумя точками



$$AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

## 3. Вычисление длины вектора



$$|\vec{a}| = \sqrt{x^2 + y^2}$$



# Умножение вектора на число.

Произведением ненулевого вектора  $\vec{a}$  на число  $k$  называется такой вектор  $\vec{b}$ , длина которого равна  $|k| \cdot |\vec{a}|$ , причем векторы  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$  сонаправлены при  $k \geq 0$  и противоположно направлены при  $k < 0$ .

1. Произведение любого вектора на число ноль есть нулевой вектор;
2. Для любого числа  $k$  и любого вектора  $\vec{a}$  векторы  $\vec{a}$  и  $k\vec{a}$  коллинеарны.

Свойства:

Для любых чисел  $k, l$  и любых векторов  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$  справедливы равенства

$$1. (kl)\vec{a} = k(l\vec{a}) \text{ (сочетательный закон)}$$

$$2. (k+l)\vec{a} = k\vec{a} + l\vec{a} \text{ (первый распределительный закон)}$$

$$3. k(\vec{a} + \vec{b}) = k\vec{a} + k\vec{b} \text{ (второй распределительный закон)}$$



# Угол между векторами

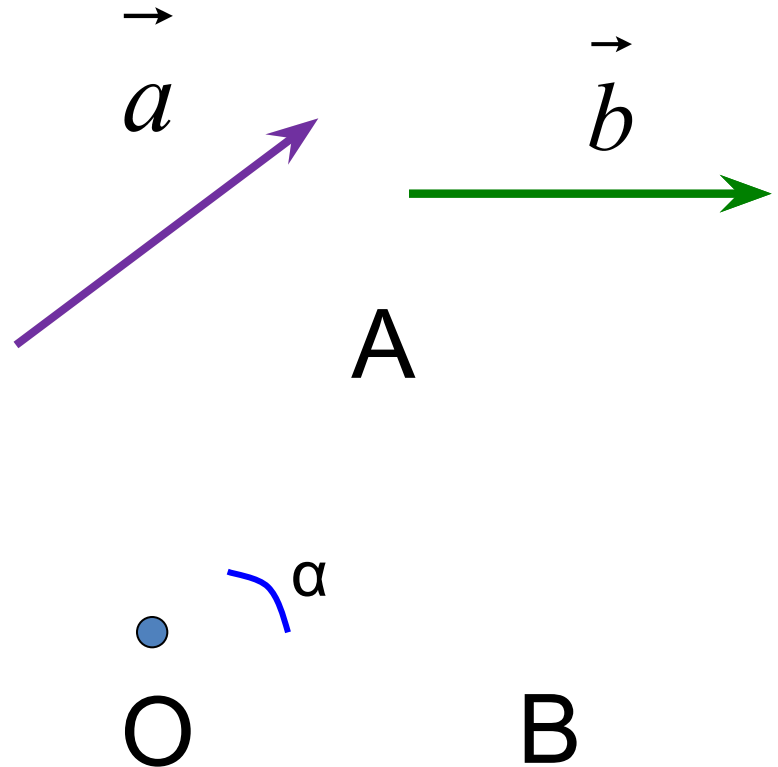
$\vec{a}$  и  $\vec{b}$  не являются  
сонаправленными

$O$  – произвольная точка

$$\vec{OA} = \vec{a}, \quad \vec{OB} = \vec{b}$$

$$\angle AOB = \alpha$$

$$\widehat{\vec{a} \ \vec{b}} = \alpha$$



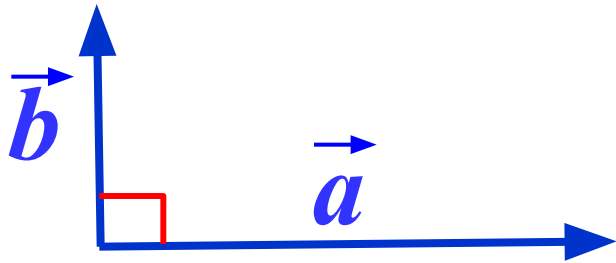
## Определение

Скалярным произведением двух векторов называется произведение их длин на косинус угла между ними.

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos(\widehat{\vec{a} \vec{b}})$$

Скалярное произведение векторов – **число!**

## Частный случай №1



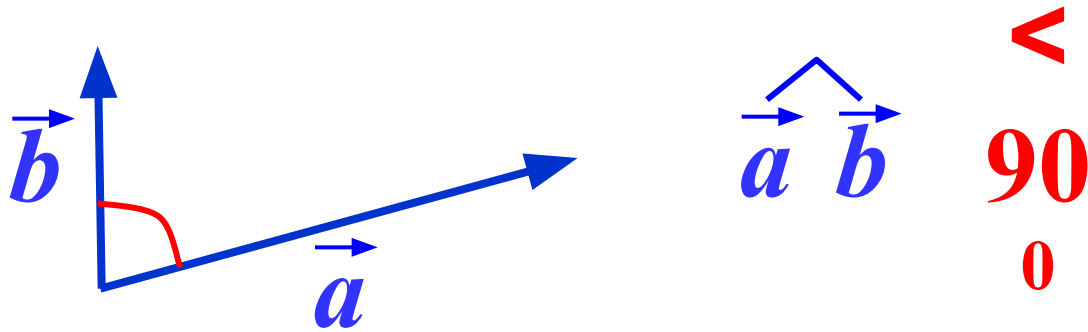
$$\widehat{\vec{a} \vec{b}} = 90^\circ$$

$$= 0$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos 90^\circ = 0$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \iff \vec{a} \perp \vec{b}$$

## Частный случай №2

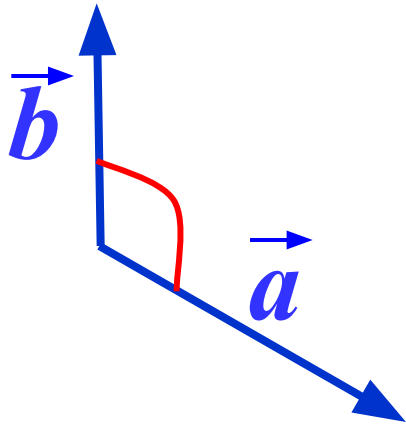


$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos 90^\circ = 0$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos \alpha$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} > 0 \iff \vec{a} \cdot \vec{b} > |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos 90^\circ = 0$$

### Частный случай №3



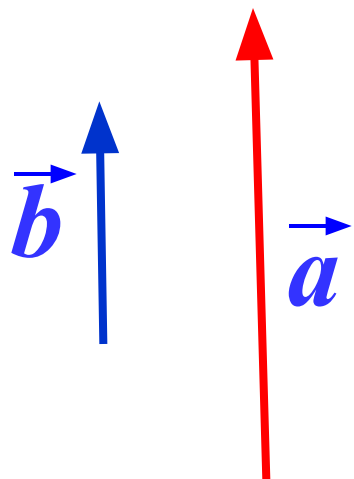
$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos \alpha$$

$\alpha > 90^\circ$

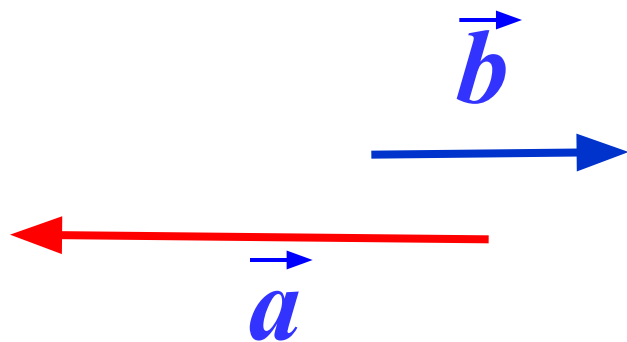
$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos \alpha$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} < 0 \iff \alpha > 90^\circ$$

## Частный случай №4



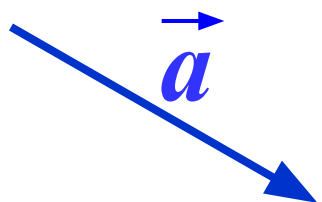
$$\begin{aligned} \widehat{a \ b} &= 0^\circ \\ \vec{a} \cdot \vec{b} &= |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos 0^\circ = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} \widehat{a \ b} &= 180^\circ \\ \vec{a} \cdot \vec{b} &= |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos 180^\circ = -|\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \end{aligned}$$

## Частный случай №5

$$\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{a} = 0^0$$



$$\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{a} = |\overrightarrow{a}| \cdot |\overrightarrow{a}| \cos \overset{\textcircled{1}}{0^0} = |\overrightarrow{a}| \cdot |\overrightarrow{a}| = |\overrightarrow{a}|^2$$

Скалярное произведение  $\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{a}$  называется  
**скалярным квадратом** вектора  $\overrightarrow{a}$  и обозначается  $\overrightarrow{a}^2$

$$\overrightarrow{a}^2 = |\overrightarrow{a}|^2$$

Вектор  $\overline{AB}$  с началом в точке  $A(3, 2)$  имеет координаты  $(-6, 6)$ . Найдите абсциссу точки  $B$ .

Вектор  $\overline{AB}$  с началом в точке  $A(9, 2)$  имеет координаты  $(6, 2)$ . Найдите ординату точки  $B$ .

Вектор  $\overline{AB}$  с концом в точке  $B(9, 1)$  имеет координаты  $(5, 3)$ . Найдите ординату точки  $A$ .

Вектор  $\overline{AB}$  с концом в точке  $B(8, 1)$  имеет координаты  $(5, 4)$ . Найдите абсциссу точки  $A$ .

Вектор  $\overline{AB}$  с концом в точке  $B(8, -3)$  имеет координаты  $(4, -11)$ . Найдите сумму координат точки  $A$ .



Найдите длину вектора  $\vec{a}(-12, -9)$ .

Две стороны прямоугольника  $ABCD$  равны 4 и 3. Найдите длину вектора  $\vec{AC}$ .

Две стороны прямоугольника  $ABCD$  равны 3 и 4. Найдите длину суммы векторов  $\vec{AB}$  и  $\vec{AD}$ .

Две стороны прямоугольника  $ABCD$  равны 5 и 12. Найдите длину разности векторов  $\vec{AB}$  и  $\vec{AD}$ .

Две стороны прямоугольника  $ABCD$  равны 4 и 21. Найдите скалярное произведение векторов  $\vec{AB}$  и  $\vec{AD}$ .

В прямоугольнике  $ABCD$  известны стороны  $AB = 17$  и  $AD = 34$ . Диагонали пересекаются в точке  $O$ . Найдите длину суммы векторов  $\vec{AO}$  и  $\vec{BO}$ .

В ромбе  $ABCD$  известны диагонали  $AC = 33$  и  $BD = 58$ . Найдите длину вектора  $\vec{AB} + \vec{AD}$ .

В ромбе  $ABCD$  известны диагонали  $AC = 33$  и  $BD = 58$ . Найдите длину вектора  $\overline{AB} - \overline{AD}$ .

Диагонали ромба  $ABCD$  пересекаются в точке  $O$  и равны 24 и 10. Найдите длину вектора  $\overline{AO} + \overline{BO}$ .

Диагонали ромба  $ABCD$  пересекаются в точке  $O$  и равны 14 и 48. Найдите длину вектора  $\overline{AO} - \overline{BO}$ .

Диагонали ромба  $ABCD$  пересекаются в точке  $O$  и равны 4 и 19. Найдите скалярное произведение векторов  $\overline{AO}$  и  $\overline{BO}$ .

Стороны правильного треугольника  $ABC$  равны  $40\sqrt{3}$ . Найдите длину вектора  $\overline{AB} + \overline{AC}$ .

Стороны правильного треугольника  $ABC$  равны 28. Найдите длину вектора  $\overline{AB} - \overline{AC}$ .

Стороны правильного треугольника  $ABC$  равны 40. Найдите скалярное произведение векторов  $\overline{AB}$  и  $\overline{AC}$ .