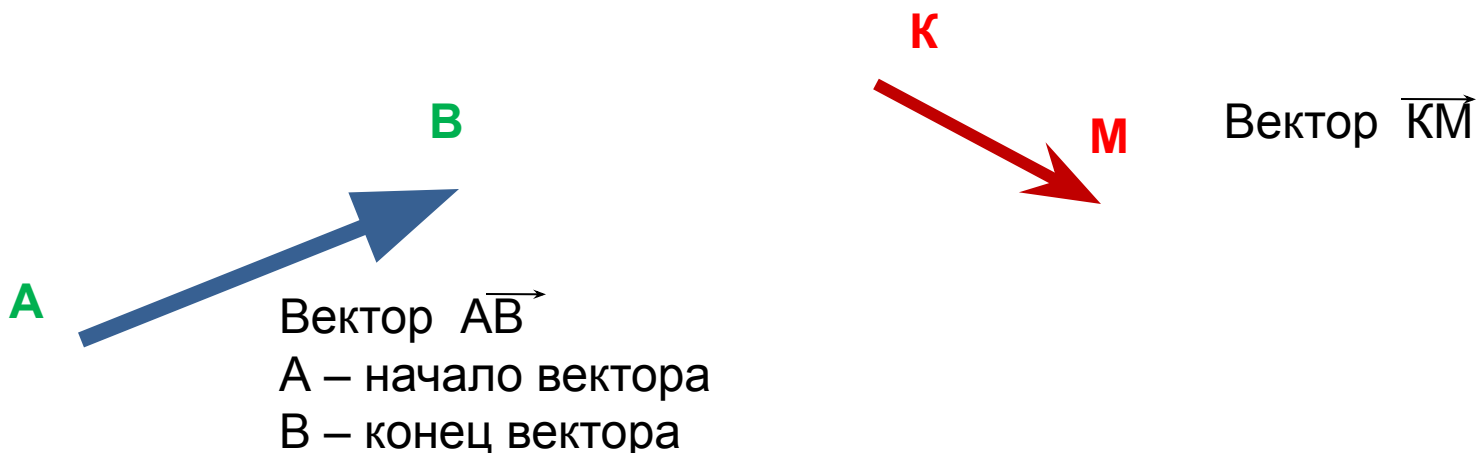


Вектор

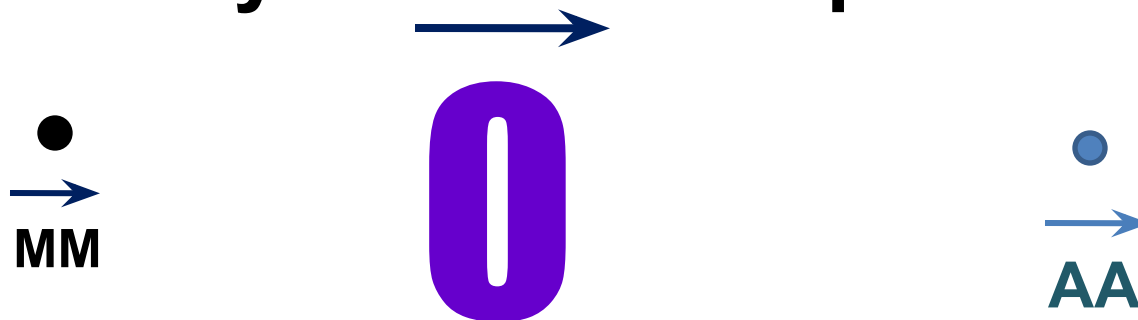
9класс

ОПРЕДЕЛЕНИЕ

Отрезок, для которого указано, какая из его граничных точек считается началом, а какая - концом, называется **направленным отрезком** или **вектором**

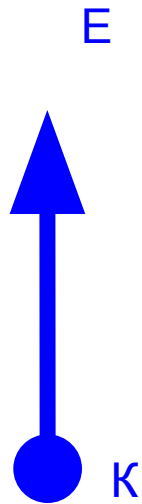


**Любая точка плоскости является
нулевым вектором**



**Начало нулевого вектора
совпадает с его концом**

Длина вектора



Длиной вектора или
модулем ненулевого вектора
называется длина отрезка

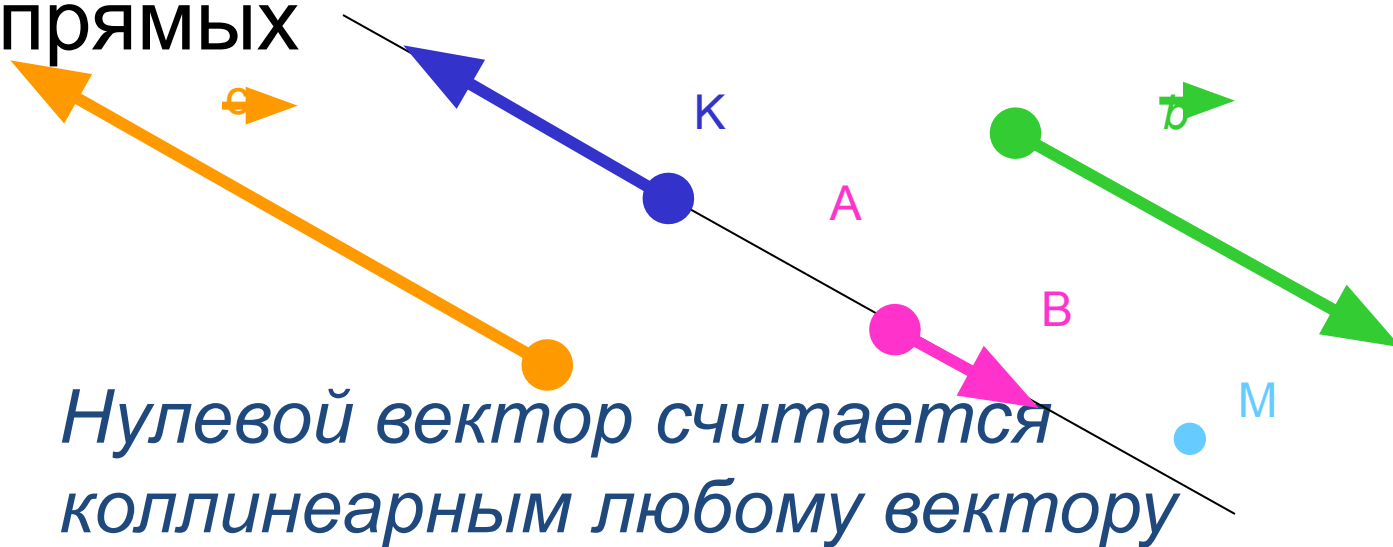
$$|\overrightarrow{KE}| = |KE| \text{ длина вектора } \overrightarrow{KE}$$

вектор \overrightarrow{MM} - нулевой вектор

$$|\overrightarrow{MM}| = 0$$

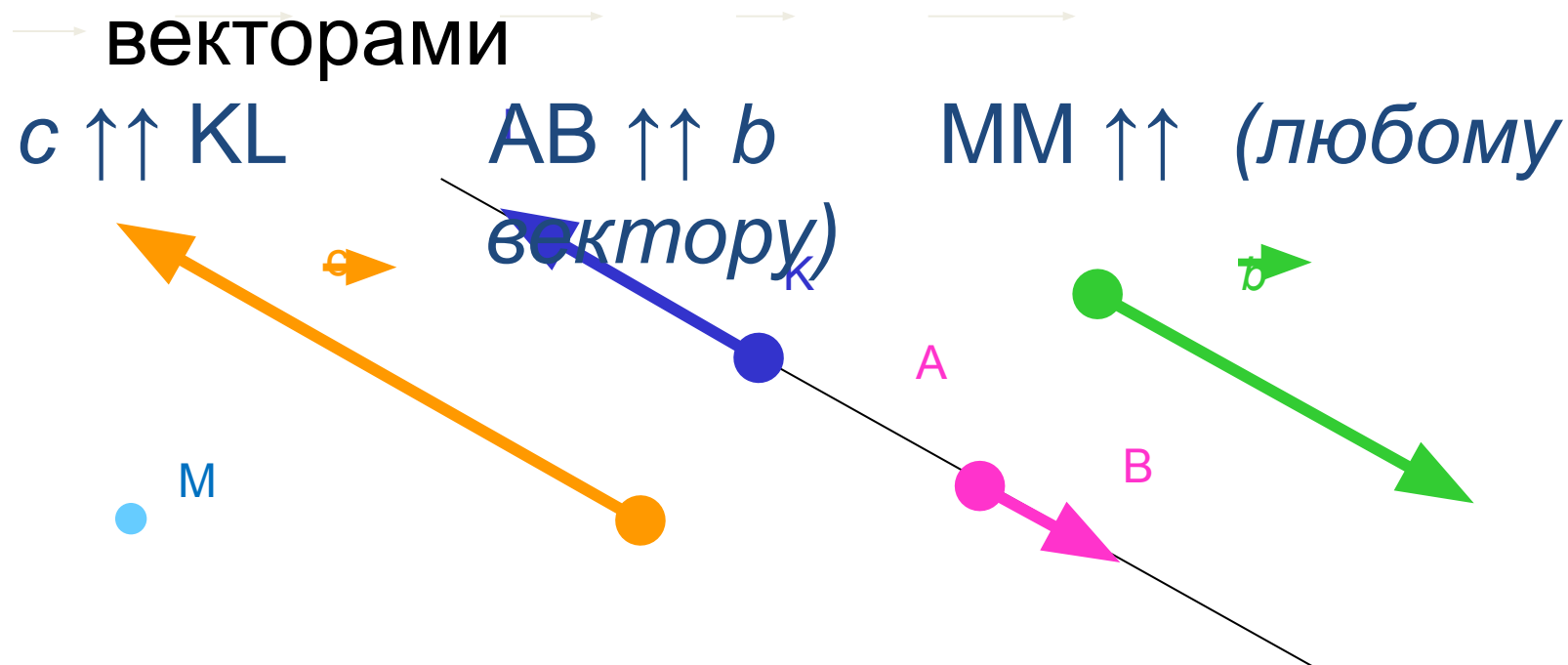
Коллинеарные векторы

Ненулевые векторы называются **коллинеарными**, если они лежат на одной прямой или на параллельных прямых



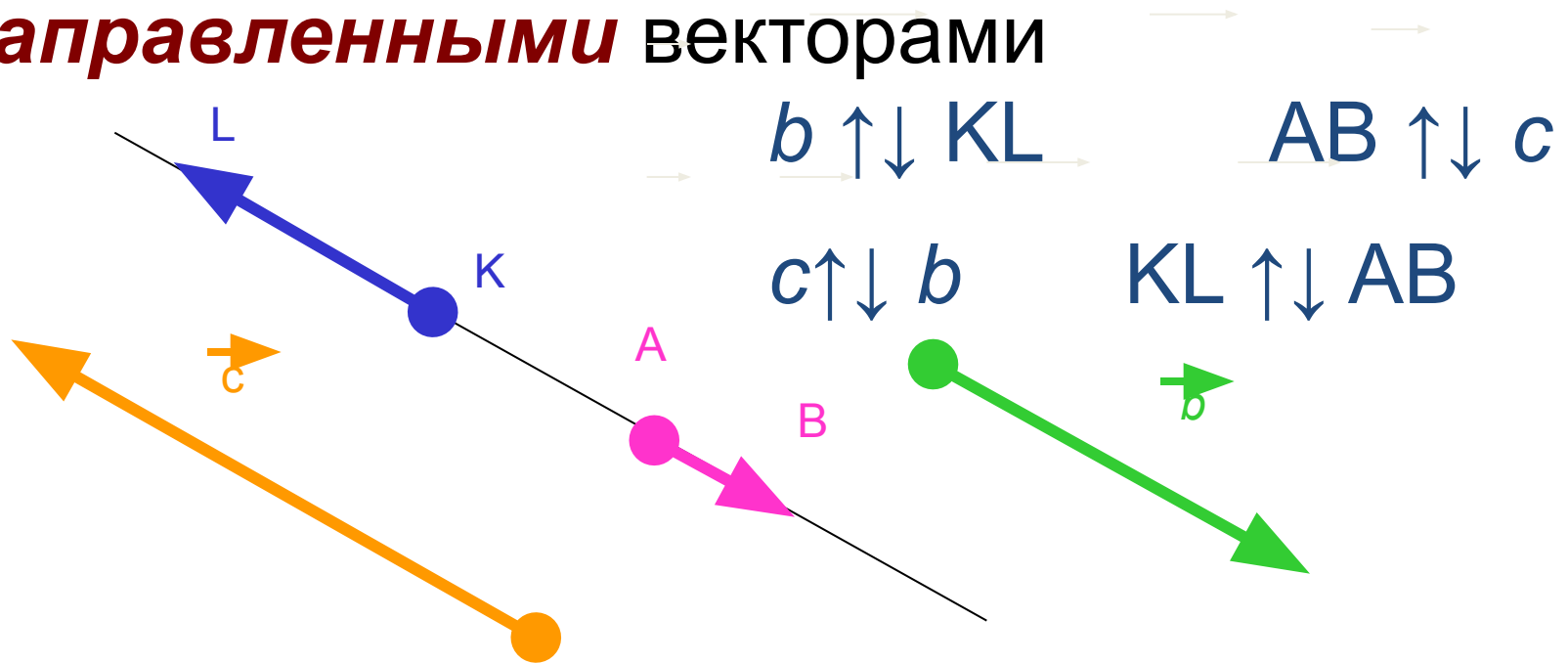
Сонаправленные векторы

Коллинеарные векторы, имеющие одинаковое направление, называются **сонаправленными**



Противоположно направленные векторы

Коллинеарные векторы, имеющие противоположное направление, называются **противоположно направленными** векторами



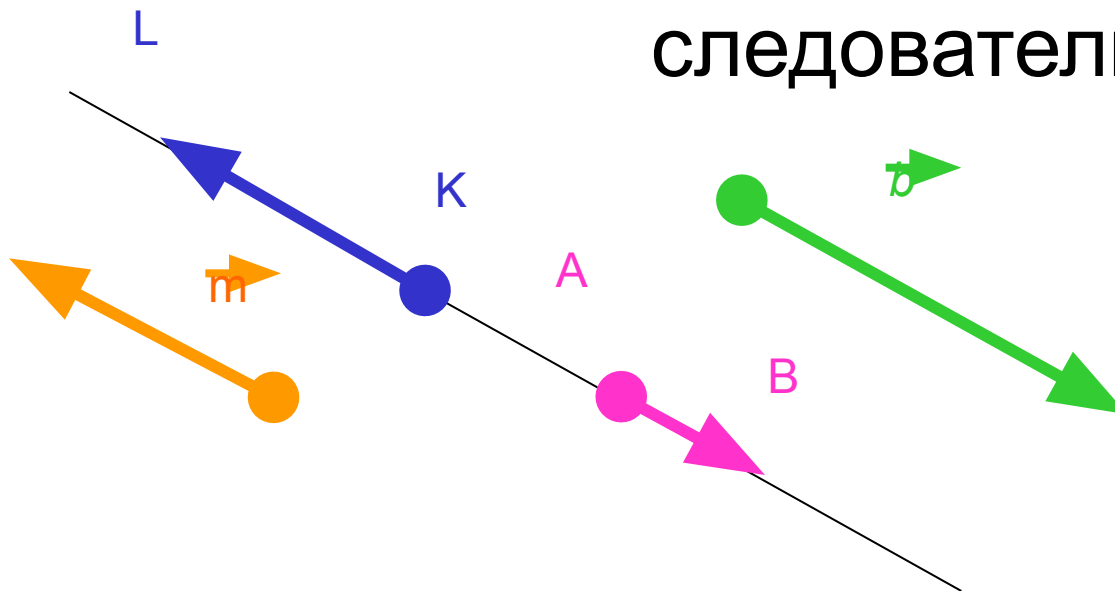
Равенство векторов

Векторы называются *равными*, если:

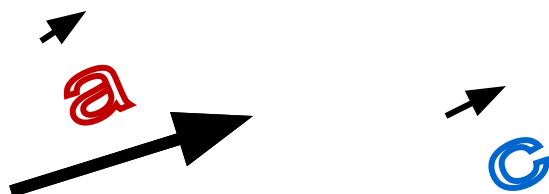
- 1) они сонаправлены ;
- 2) их длины равны.

$$\vec{m} \parallel \vec{KL}, \quad |\vec{m}| = |\vec{KL}|$$

следовательно $\vec{m} = \vec{KL}$



ОТКЛАДЫВАНИЕ ВЕКТОРА ОТ ДАННОЙ ТОЧКИ



М •

От любой точки М
можно отложить вектор,
равный данному
и притом только один

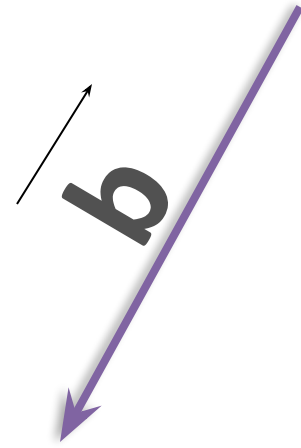
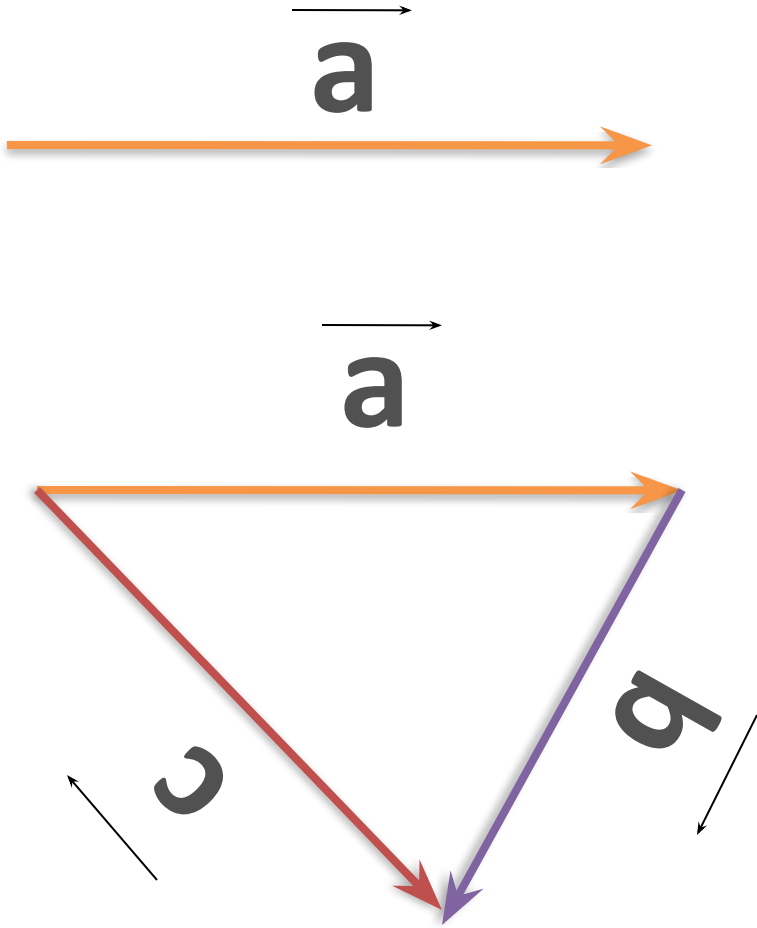
Р •

К •

•
F

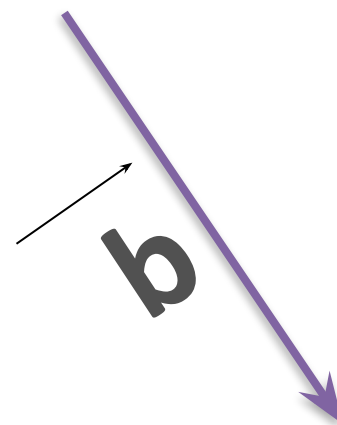
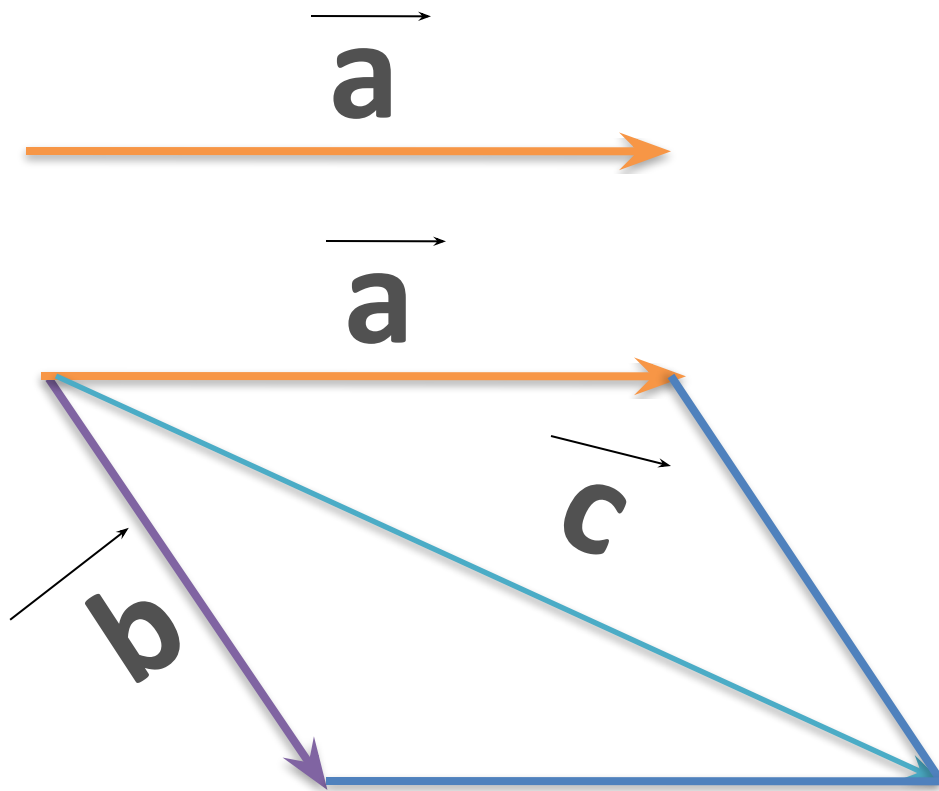
$$\vec{a} = \vec{c}, \text{ так как } \vec{a} \parallel \vec{c} \text{ и } |\vec{a}| = |\vec{c}|$$





$$\vec{a} + \vec{b} = \vec{c}$$

Сложение векторов по правилу параллелограмма

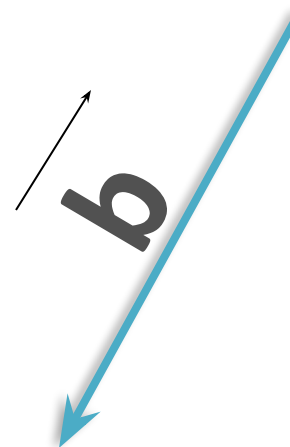
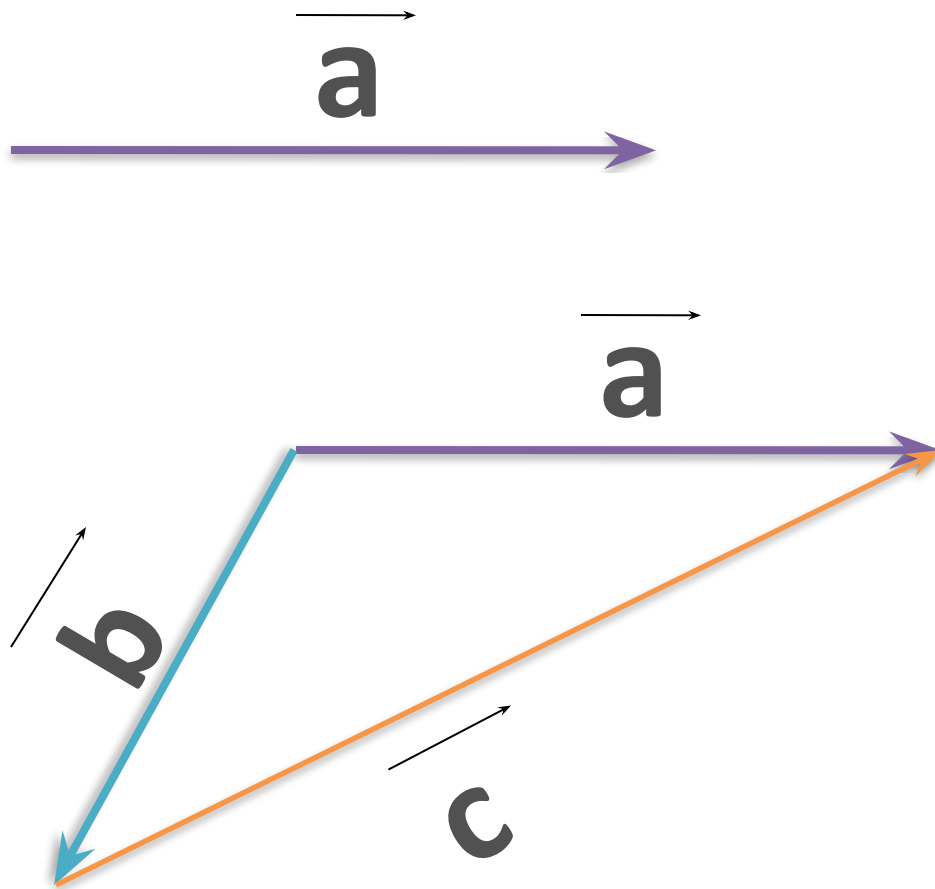


$$\vec{a} + \vec{b} = \vec{c}$$

Суммой векторов $\vec{a}\{x_1; y_1\}$ и $\vec{b}\{x_2; y_2\}$ называется вектор $\vec{c}\{x_1 + x_2; y_1 + y_2\}$, т. е.

$$\vec{a}\{x_1; y_1\} + \vec{b}\{x_2; y_2\} = \vec{c}\{x_1 + x_2; y_1 + y_2\}$$

Вычитание векторов



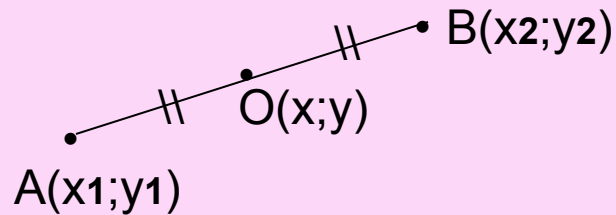
$$\vec{a} - \vec{b} = \vec{c}$$

Разностью векторов $\vec{a}\{x_1 ; y_1\}$ и $\vec{b}\{x_2 ; y_2\}$ называется вектор $\vec{c}\{x_1 - x_2 ; y_1 - y_2\}$, т. е.

$$\vec{a}\{x_1 ; y_1\} - \vec{b}\{x_2 ; y_2\} = \vec{c}\{x_1 - x_2 ; y_1 - y_2\}$$

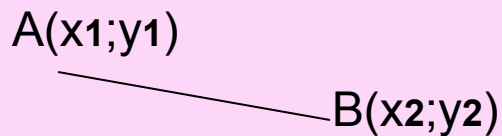
Формулы в координатах.

1. Координаты середины отрезка



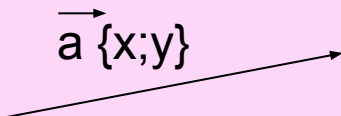
$$x = \frac{x_1 + x_2}{2} \quad y = \frac{y_1 + y_2}{2}$$

2. Расстояние между двумя точками



$$AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

3. Вычисление длины вектора



$$|\vec{a}| = \sqrt{x^2 + y^2}$$



Умножение вектора на число.

Произведением ненулевого вектора \vec{a} на число k называется такой вектор \vec{b} , длина которого равна $|k| \cdot |\vec{a}|$, причем векторы \vec{a} и \vec{b} сонаправлены при $k \geq 0$ и противоположно направлены при $k < 0$.

1. Произведение любого вектора на число ноль есть нулевой вектор;
2. Для любого числа k и любого вектора \vec{a} векторы \vec{a} и $k\vec{a}$ коллинеарны.

Свойства:

Для любых чисел k, l и любых векторов \vec{a} и \vec{b} справедливы равенства

$$1. (kl)\vec{a} = k(l\vec{a}) \text{ (сочетательный закон)}$$

$$2. (k+l)\vec{a} = k\vec{a} + l\vec{a} \text{ (первый распределительный закон)}$$

$$3. k(\vec{a} + \vec{b}) = k\vec{a} + k\vec{b} \text{ (второй распределительный закон)}$$

Угол между векторами

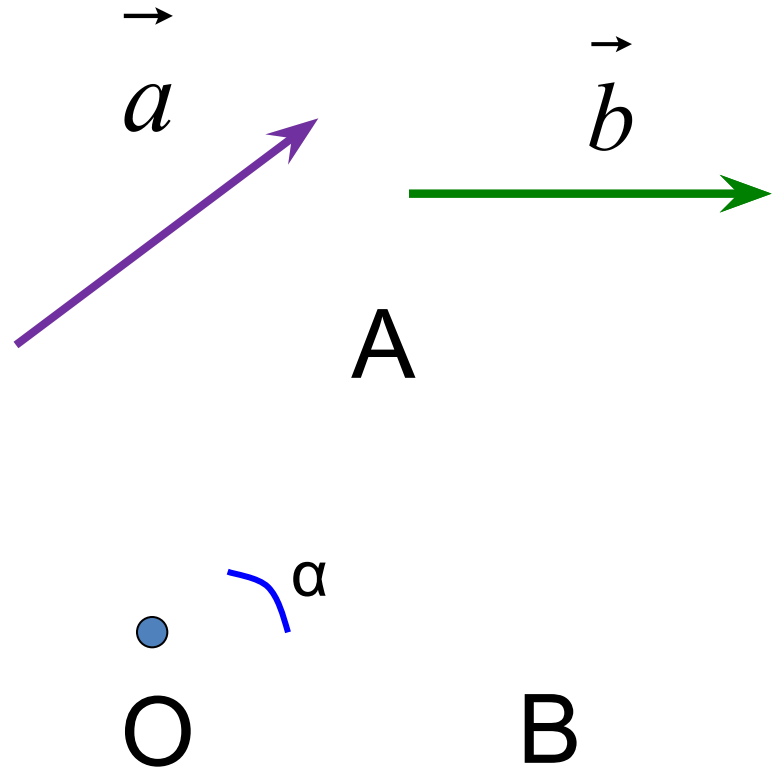
\vec{a} и \vec{b} не являются
сонаправленными

O – произвольная точка

$$\vec{OA} = \vec{a}, \quad \vec{OB} = \vec{b}$$

$$\angle AOB = \alpha$$

$$\widehat{\vec{a} \ \vec{b}} = \alpha$$



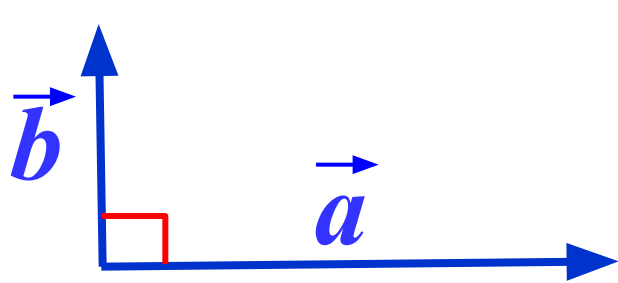
Определение

Скалярным произведением двух векторов называется произведение их длин на косинус угла между ними.

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos(\widehat{\vec{a} \vec{b}})$$

Скалярное произведение векторов – **число!**

Частный случай №1



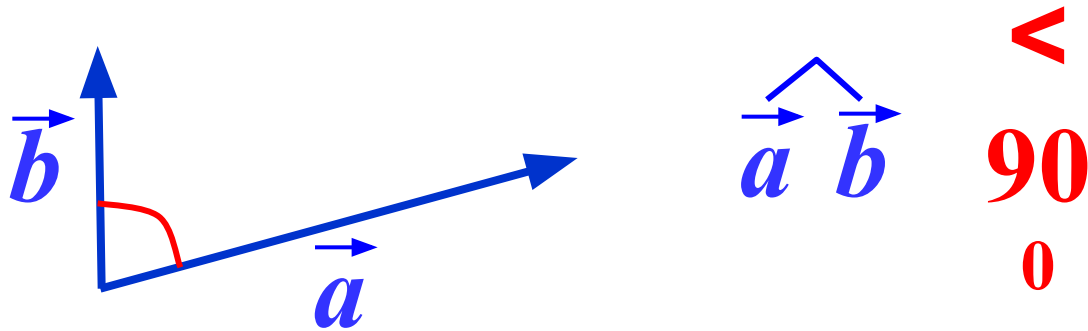
$$\widehat{\vec{a} \vec{b}} = 90^\circ$$

$$= 0$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos 90^\circ = 0$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \iff \vec{a} \perp \vec{b}$$

Частный случай №2



$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos 90^\circ = 0$$

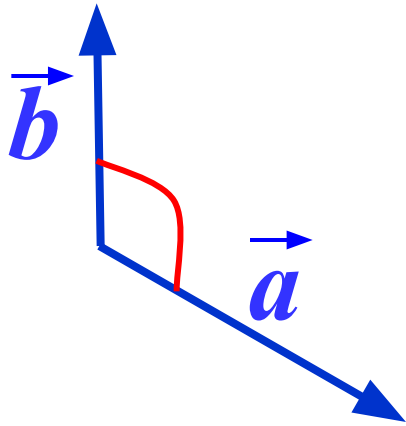
$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos \alpha$$

The angle α is circled in red, with a red arrow pointing to the right, indicating $\alpha > 90^\circ$.

$$\vec{a} \cdot \vec{b} > 0 \iff \vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos \alpha > 0$$

The angle α is circled in red, with a red arrow pointing to the left, indicating $\alpha < 90^\circ$.

Частный случай №3



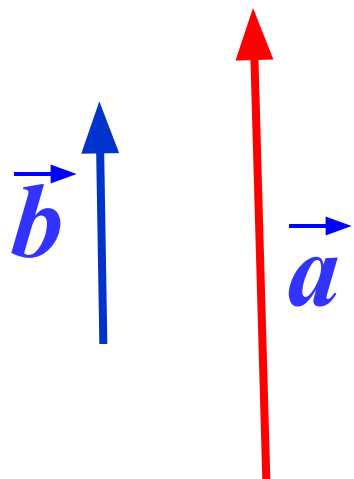
$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos \alpha$$

$\alpha > 90^\circ$
 $\cos \alpha < 0$

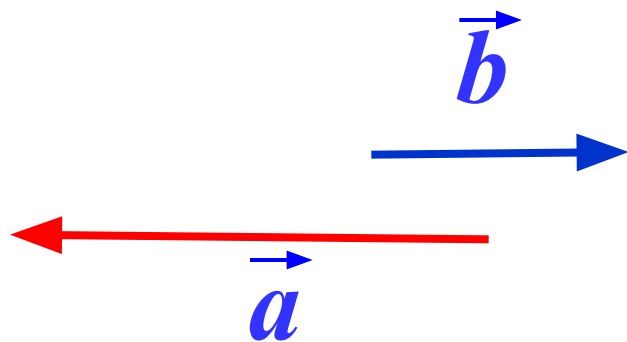
$$\vec{a} \cdot \vec{b} < 0$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} < 0 \iff \alpha > 90^\circ$$

Частный случай №4



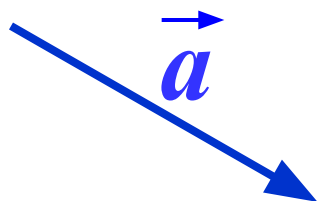
$$\begin{aligned} \widehat{a \ b} &= 0^\circ \\ \vec{a} \cdot \vec{b} &= |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos 0^\circ = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} \widehat{a \ b} &= 180^\circ \\ \vec{a} \cdot \vec{b} &= |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos 180^\circ = -|\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \end{aligned}$$

Частный случай №5

$$\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{a} = 0^0$$



$$\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{a} = |\overrightarrow{a}| \cdot |\overrightarrow{a}| \cos \overset{\textcircled{1}}{0^0} = |\overrightarrow{a}| \cdot |\overrightarrow{a}| = |\overrightarrow{a}|^2$$

Скалярное произведение $\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{a}$ называется
скалярным квадратом вектора \overrightarrow{a} и обозначается \overrightarrow{a}^2

$$\overrightarrow{a}^2 = |\overrightarrow{a}|^2$$

Вектор \overline{AB} с началом в точке $A(3, 2)$ имеет координаты $(-6, 6)$. Найдите абсциссу точки B .

Вектор \overline{AB} с началом в точке $A(9, 2)$ имеет координаты $(6, 2)$. Найдите ординату точки B .

Вектор \overline{AB} с концом в точке $B(9, 1)$ имеет координаты $(5, 3)$. Найдите ординату точки A .

Вектор \overline{AB} с концом в точке $B(8, 1)$ имеет координаты $(5, 4)$. Найдите абсциссу точки A .

Вектор \overline{AB} с концом в точке $B(8, -3)$ имеет координаты $(4, -11)$. Найдите сумму координат точки A .

Найдите длину вектора $\vec{a}(-12, -9)$.

Две стороны прямоугольника $ABCD$ равны 4 и 3. Найдите длину вектора \overline{AC} .

Две стороны прямоугольника $ABCD$ равны 3 и 4. Найдите длину суммы векторов \overline{AB} и \overline{AD} .

Две стороны прямоугольника $ABCD$ равны 5 и 12. Найдите длину разности векторов \overline{AB} и \overline{AD} .

Две стороны прямоугольника $ABCD$ равны 4 и 21. Найдите скалярное произведение векторов \overline{AB} и \overline{AD} .

В прямоугольнике $ABCD$ известны стороны $AB = 17$ и $AD = 34$. Диагонали пересекаются в точке O . Найдите длину суммы векторов \overline{AO} и \overline{BO} .

В ромбе $ABCD$ известны диагонали $AC = 33$ и $BD = 58$. Найдите длину вектора $\overline{AB} + \overline{AD}$.

В ромбе $ABCD$ известны диагонали $AC = 33$ и $BD = 58$. Найдите длину вектора $\overline{AB} - \overline{AD}$.

Диагонали ромба $ABCD$ пересекаются в точке O и равны 24 и 10. Найдите длину вектора $\overline{AO} + \overline{BO}$.

Диагонали ромба $ABCD$ пересекаются в точке O и равны 14 и 48. Найдите длину вектора $\overline{AO} - \overline{BO}$.

Диагонали ромба $ABCD$ пересекаются в точке O и равны 4 и 19. Найдите скалярное произведение векторов \overline{AO} и \overline{BO} .

Стороны правильного треугольника ABC равны $40\sqrt{3}$. Найдите длину вектора $\overline{AB} + \overline{AC}$.

Стороны правильного треугольника ABC равны 28. Найдите длину вектора $\overline{AB} - \overline{AC}$.

Стороны правильного треугольника ABC равны 40. Найдите скалярное произведение векторов \overline{AB} и \overline{AC} .