

**МБОУ Сукпакская СОШ им. Б.И. Араптана**

**Факультативное занятие в 11 классе:**

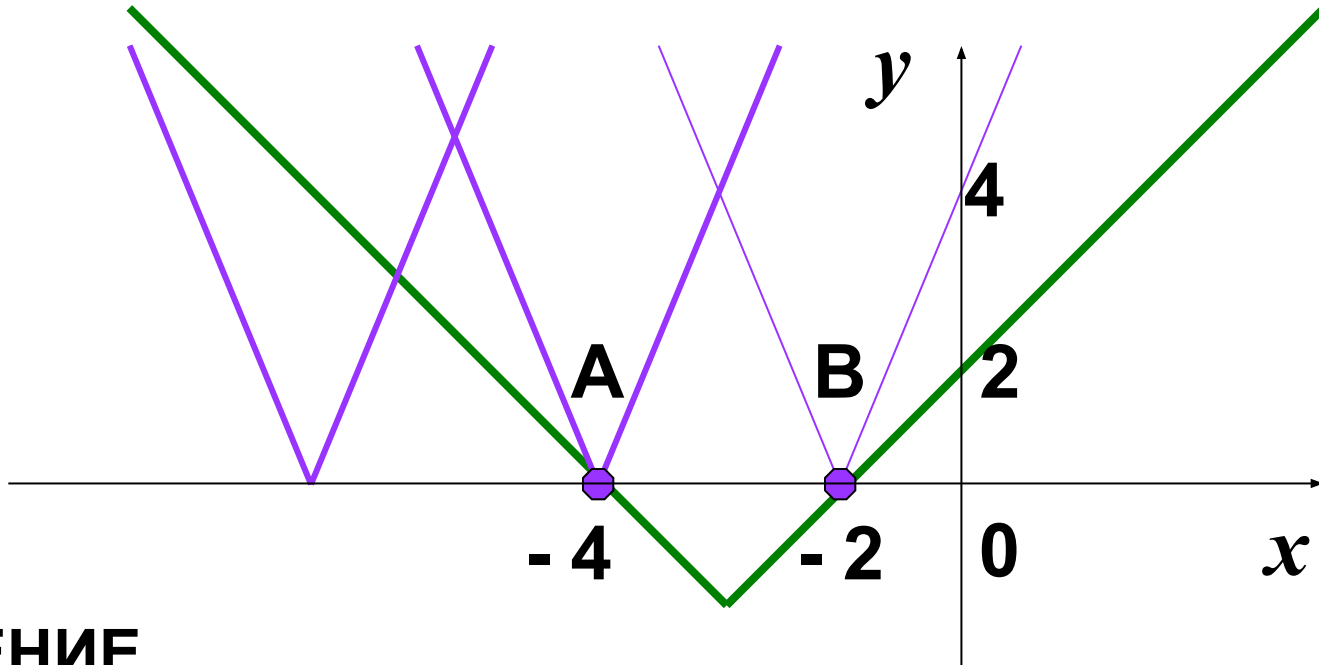
***Графический подход к решению  
задач с параметром и модулем***

**подборка заданий для подготовки к ЕГЭ**

**Сотпа Дарья Саарымбуевна, учитель математики**



Найдите все значения параметра  $a$ , при которых уравнение  $|2x - a| = |x + 3| - 1$  имеет единственное решение.



**РЕШЕНИЕ.**

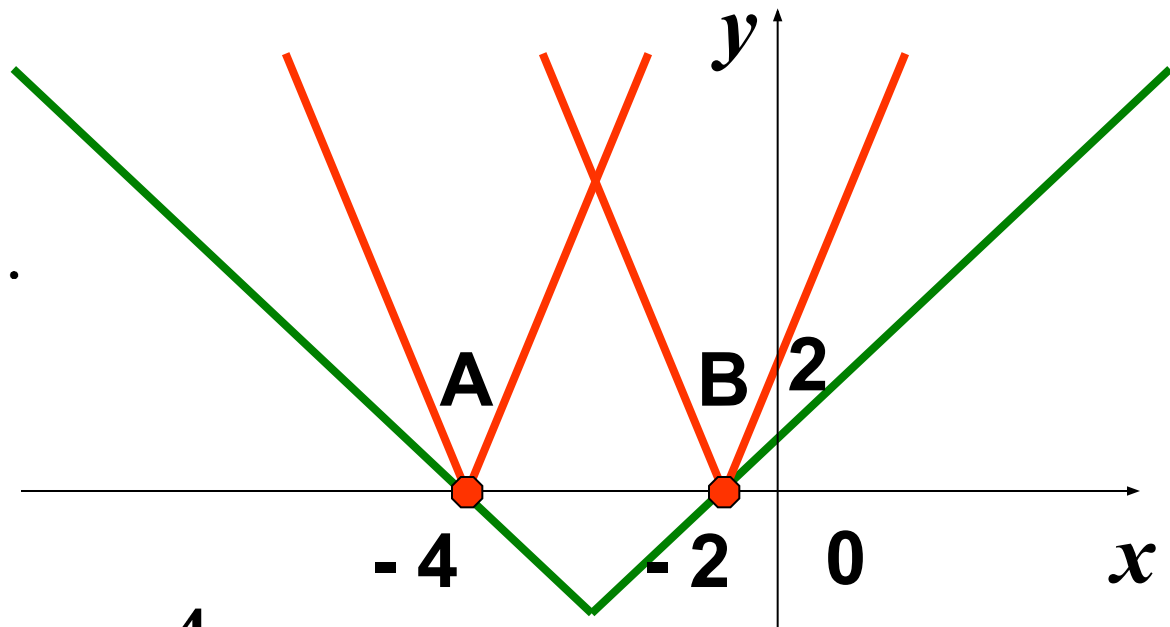
Правая часть этого уравнения задает неподвижный «уголок», левая – «уголок», вершина которого двигается по оси абсцисс.

Очевидно, что данное уравнение будет иметь единственное решение, если вершина движущегося «уголка» попадет в точку А, или точку В. Имеем,

$$|x + 3| - 1 = 0 \Leftrightarrow x = -4, \quad x = -2,$$

тогда  $A(-4; 0)$ ,  $B(-2; 0)$  и координаты этих точек удовлетворяют уравнению  $y = |2x - a|$ .

$$\begin{cases} |-8 - a| = 0 \\ |-4 - a| = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -8 \\ a = -4 \end{cases}.$$



Ответ:  $a = -8, \quad a = -4$

# Графический способ решения задач с параметром

Задачу с параметром можно рассматривать как функцию  $f(x; a) = 0$



•1. Строим графический образ

•2. Пересекаем полученный график прямыми параллельными оси абсцисс

•3. «Считываем» нужную информацию

Схема

решения

:

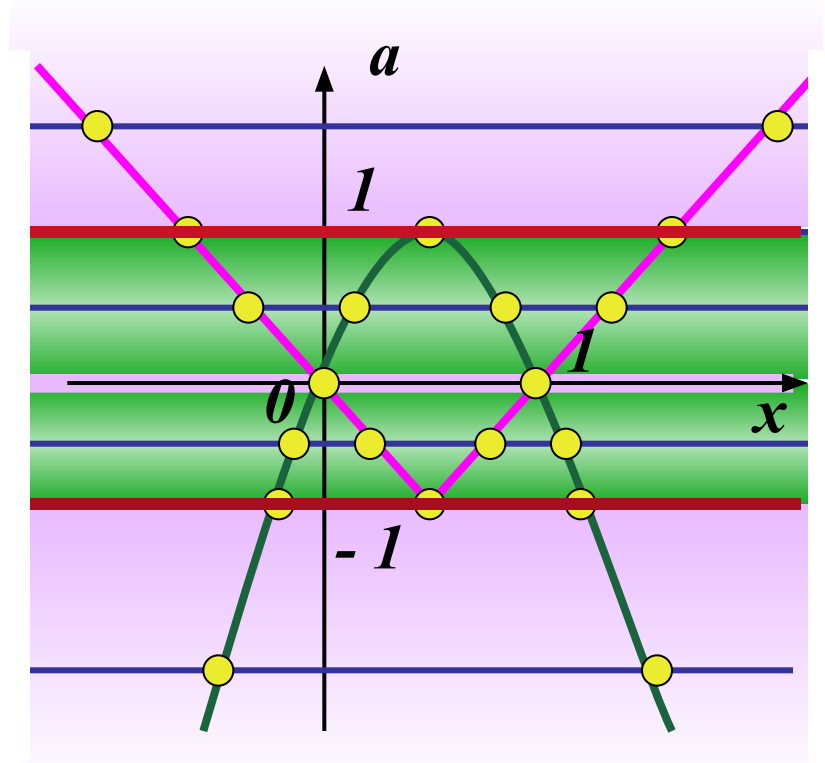
# Найти количество корней уравнения в зависимости от параметра $a$

$$(a - 2x + x^2)(a + 1 - |x - 1|) = 0$$

Данное уравнение равносильно совокупности следующих двух уравнений:

$$\begin{cases} a = 2x - x^2 \\ a = |x - 1| - 1 \end{cases}$$

Количество решений данного уравнения - это число точек пересечения графика данного уравнения с горизонтальной прямой  $a = a_0$ . По рисунку «считываем» ответ



если  $a < -1$ ,  $a = 0$  и  $a > 1$ , то два корня

если  $a = \pm 1$ , то три корня

если  $-1 < a < 0$  и  $0 < a < 1$ , то четыре корня

# ОБОБЩЕННЫЙ МЕТОД ОБЛАСТЕЙ

(«переход» метода интервалов с прямой на плоскость)

Неравенства с  
одной  
переменной

Метод интервалов:

- 1. ОДЗ
- 2. Корни
- 3. Ось
- 4. Знаки на интервалах
- 5. Ответ.



Неравенства с  
двумя  
переменной

Метод областей:

- 1. ОДЗ
- 2. Граничные линии
- 3. Координатная плоскость
- 4. Знаки в областях
- 5. Ответ по рисунку.

На координатной плоскости изобразите множество точек, координаты которых удовлетворяют неравенству

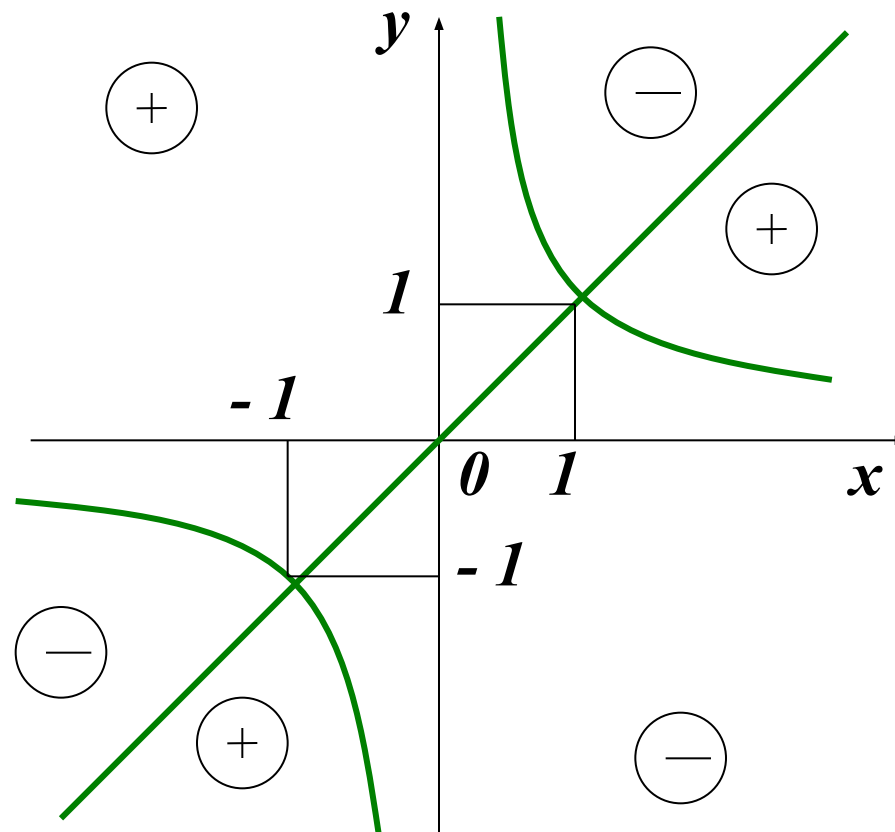


$$(x - y)(xy - 1) \geq 0$$

**Решение.** На координатной плоскости нарисуем линии, определяемые равенствами  $y - x = 0$  и  $x \cdot y - 1 = 0$  которые разбивают плоскость на несколько областей.

При  $x = 1, y = 0$  левая часть неравенства равна  $-1$ .

Следовательно, в области, содержащей точку  $(1; 0)$ , она имеет знак минус, а в остальных областях её знаки чередуются.



**Ответ:** заштрихованные области на рисунке.

На координатной плоскости  
изобразите множество точек,  
удовлетворяющих неравенству

$$\frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2 - 1} \leq 0$$

Найдем ОДЗ:  $x^2 + y^2 - 1 \neq 0 \Leftrightarrow x^2 + y^2 \neq 1$

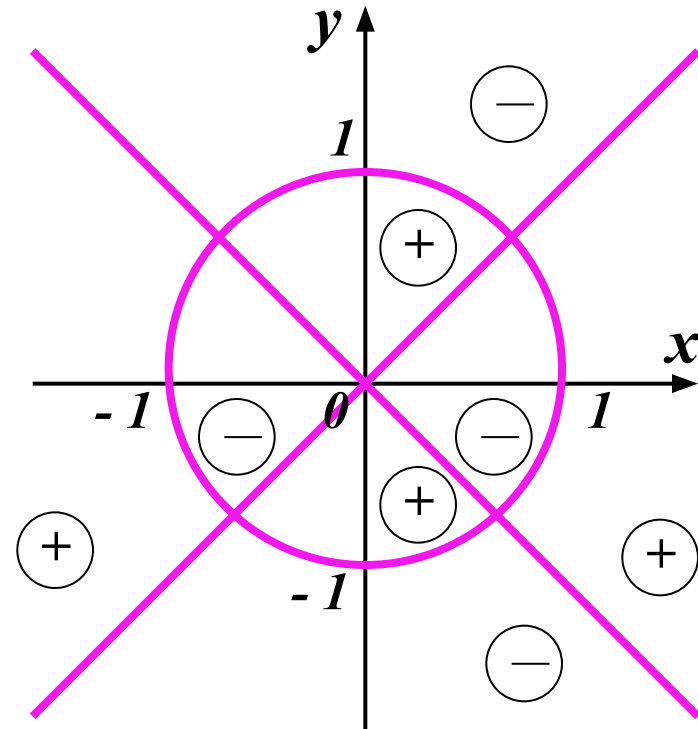
Граничные

$$x^2 - y^2 = 0 \Leftrightarrow |y| = |x| \text{ и } x^2 + y^2 = 1$$

линии:  
Строим граничные  
линии.

Они разбивают  
плоскость на восемь  
областей, определяя  
знаки подстановкой в  
отдельных точках,  
получаем решение.

**Ответ:** заштрихованные  
области на рисунке.





# МЕТОД ОБЛАСТЕЙ ПРИ РЕШЕНИИ ЗАДАЧ С ПАРАМЕТРАМИ



Графический прием ← **Ключ решения:** → Свойства функций

*Параметр – «равноправная» переменная  $\Rightarrow$  отведем ему координатную ось т.е. задачу с параметром будем рассматривать как функцию  $f(x; a) > 0$*

Общие признаки задач подходящих под рассматриваемый метод

В задаче дан один параметр  $a$  и одна переменная  $x$

Они образуют некоторые аналитические выражения  $F(x;a), G(x;a)$

Графики уравнений  $F(x;a)=0, G(x;a)=0$  строятся несложно

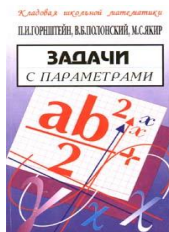
•1. Строим графический образ

•2. Пересекаем полученный график прямыми перпендикулярными параметрической оси

•3. «Считываем» нужную информацию

Схема

решения:



# Найти все значения параметра $p$ , при каждом из которых множество решений неравенства $(p - x^2)(p + x - 2) < 0$ не содержит решений неравенства $x^2 \leq 1$

Применим обобщенный метод областей.

Построим граничные линии

$$p = x^2 \text{ и } p = 2 - x$$

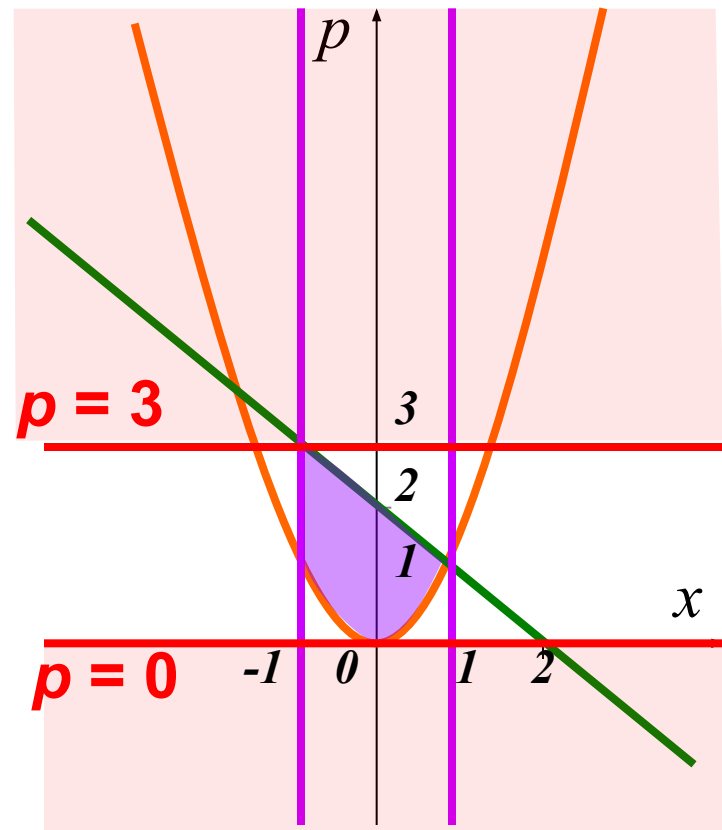
Определим знаки в полученных областях, и получим решение данного неравенства.

Осталось из полученного множества исключить решения неравенства  $x^2 \leq 1$

По рисунку легко считываем ответ

$$p \leq 0, p \geq 3$$

Ответ:  $p \leq 0, p \geq 3$





Сколько решений имеет система  
в зависимости от параметра  $a$ ?

$$\begin{cases} |x|+|y|=a, \\ x^2+y^2=1 \end{cases}$$

решений нет при  $a < 1$

4 решения при  $a = 1$

8 решений при  $1 < a < \sqrt{2}$

4 решения при  $a = \sqrt{2}$

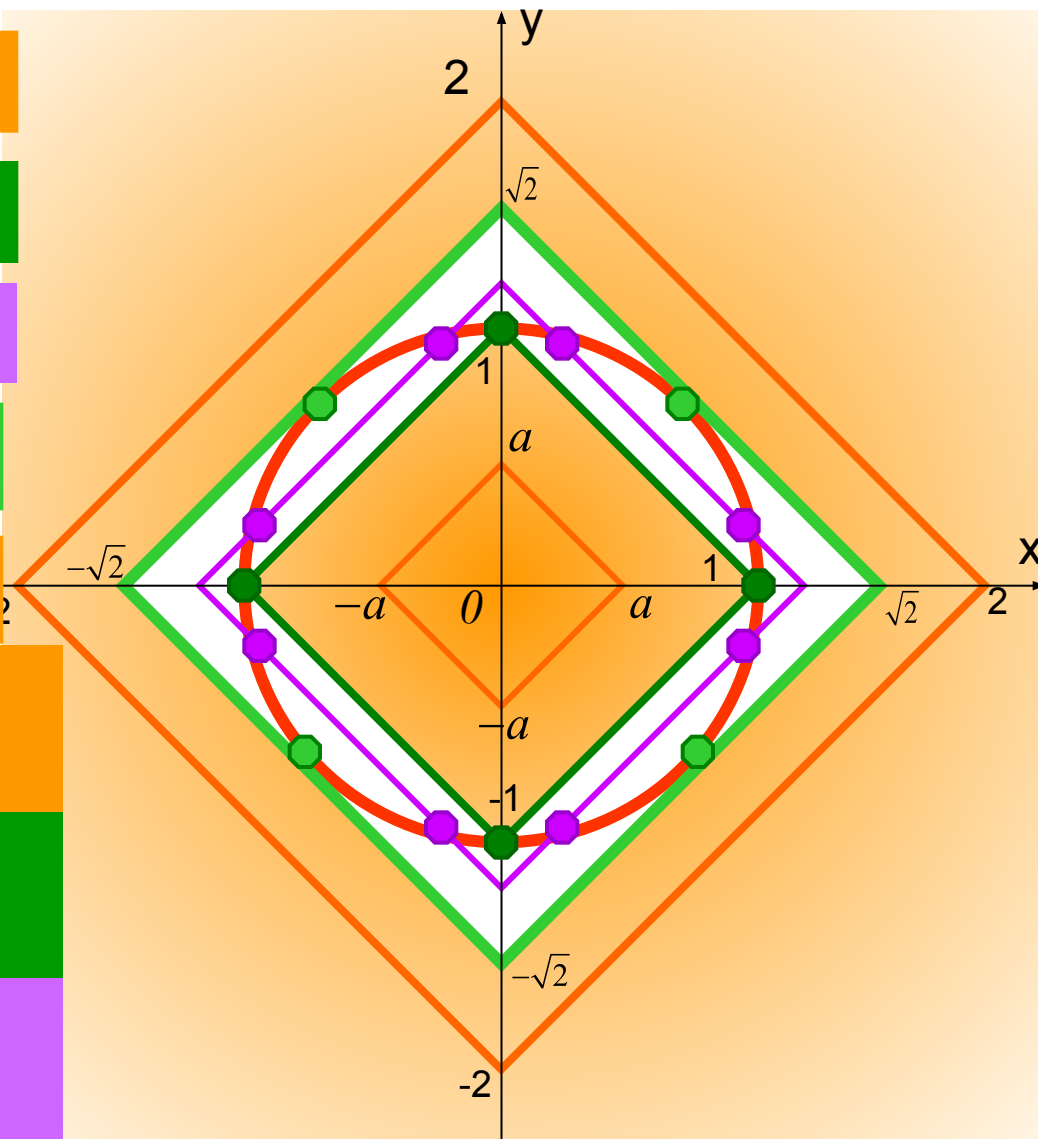
решений нет при  $a > \sqrt{2}$

граф  
уравн  
непод  
центр  
коорд

решений нет, если  
 $a < 1$  или  $a > 2\sqrt{2}$

4 решения, если  
 $a = 1$  или  $a = 2\sqrt{2}$

8 решений, если  
 $1 < a < \sqrt{2}$



При каких положительных значениях параметра  $a$ , система уравнений имеет ровно четыре решения?

$$\begin{cases} |4 - |x - 2|| - |y| = 0 \\ x^2 + y^2 = a^2 + 4(x - 1) \end{cases}$$

Запишем  $|4 - |x - 2|| = |y|$

решений нет при  $a < 2\sqrt{2}$ .

Построим графики обоих уравнений.

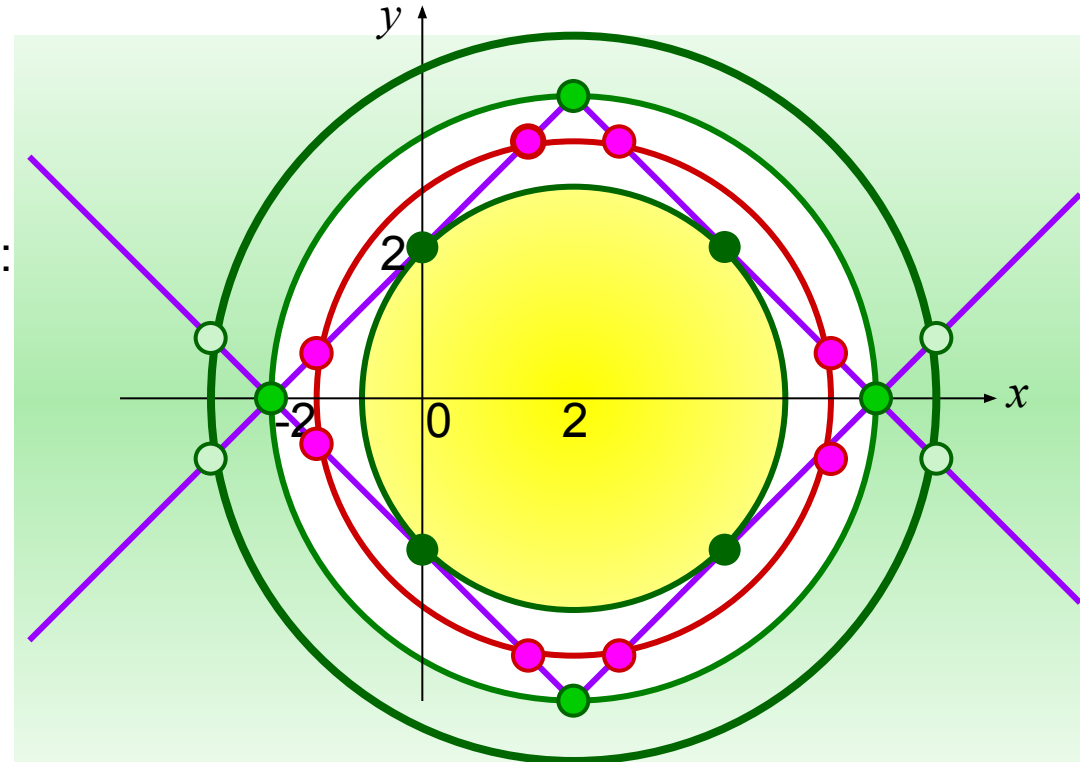
4 решения при  $a = 2\sqrt{2}$ .

$y = |4 - |x - 2||$  и симметрично

8 решений при  $2\sqrt{2} < a < 4$ .

Второе уравнение задает семейство

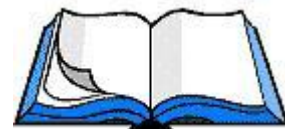
4 решения при  $a \geq 4$ .



Итак:

при  $a < 2\sqrt{2}$  решений нет; при  $a = 2\sqrt{2}$  и  $a \geq 4$  система имеет 4 решения; система имеет 8 решений при  $2\sqrt{2} < a < 4$ .

Ответ:  $a = 2\sqrt{2}$   $4 a \geq$



# Задачи, взятые из материалов ЕГЭ прошлых лет



**При каких значениях параметра  $a$  сумма  $\log_a(\cos^2 x + 1)$  и  $\log_a(\cos^2 x + 5)$  равна 1 хотя бы при одном значении  $x$ ?**

**Решение.** Рассмотрим сумму данных выражений

$$\log_a(\cos^2 x + 1) + \log_a(\cos^2 x + 5) = 1.$$

Пусть  $t = \cos^2 x + 1$ ,  $t \in [1; 2]$  тогда уравнение примет вид

$$\log_a t \cdot (t + 4) = 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow t^2 + 4t = a, (a > 0, a \neq 1).$$

Построим в прямоугольной системе координат график

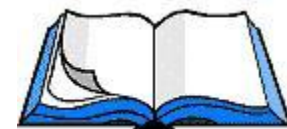
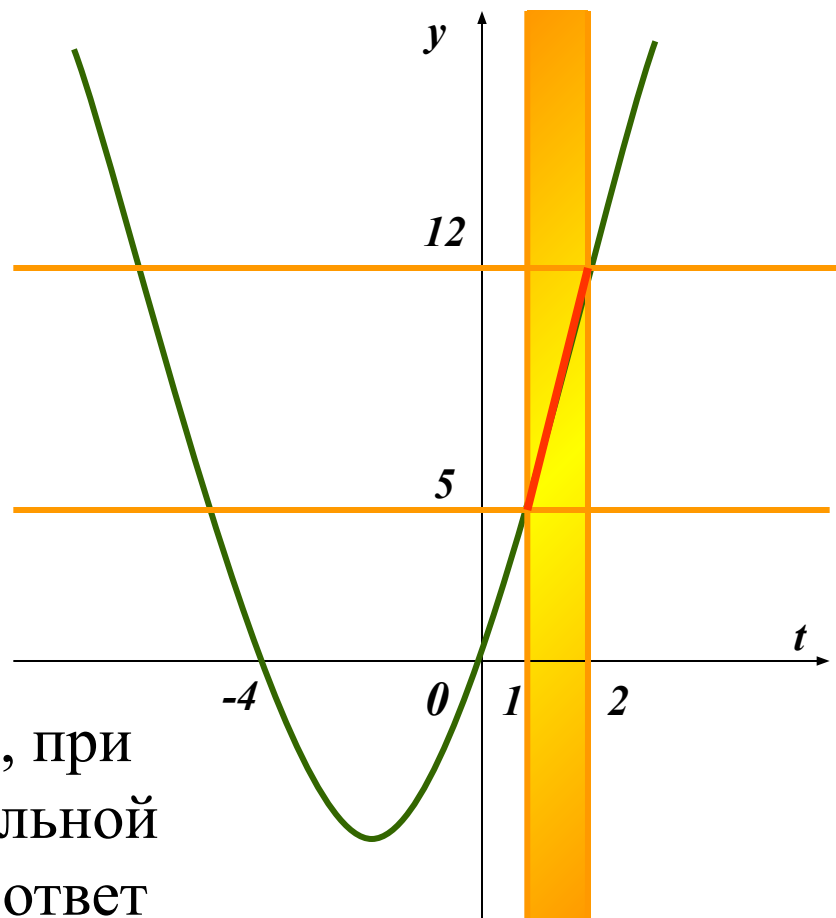
параболы  $y(t) = t^2 + 4 \cdot t$ ,

и прямые  $y = a$ , учитывая

ОДЗ:  $t \in [1; 2]$ .

Сумма данного выражения равна 1, при пересечении параболы с горизонтальной прямой. По рисунку «считываем» ответ

**Ответ:**  $a \in [5; 12]$



Найдите все значения параметра  $a$ , при которых количество корней уравнения  $(5-a)x^3 - 4x^2 + x = 0$  равно количеству общих точек линий  $x^2 + y^2 = a^2$  и  $y = 5 - |x - 1|$

1 решение при  $|a| = 2\sqrt{2}$

задает неподвижный

2 решения при  $2\sqrt{2} < |a| < 3\sqrt{2}$

3 решения при  $|a| = 3\sqrt{2}$

задает семейство

4 решения при  $3\sqrt{2} < |a| < \sqrt{26}$

3 решения при  $|a| = \sqrt{26}$

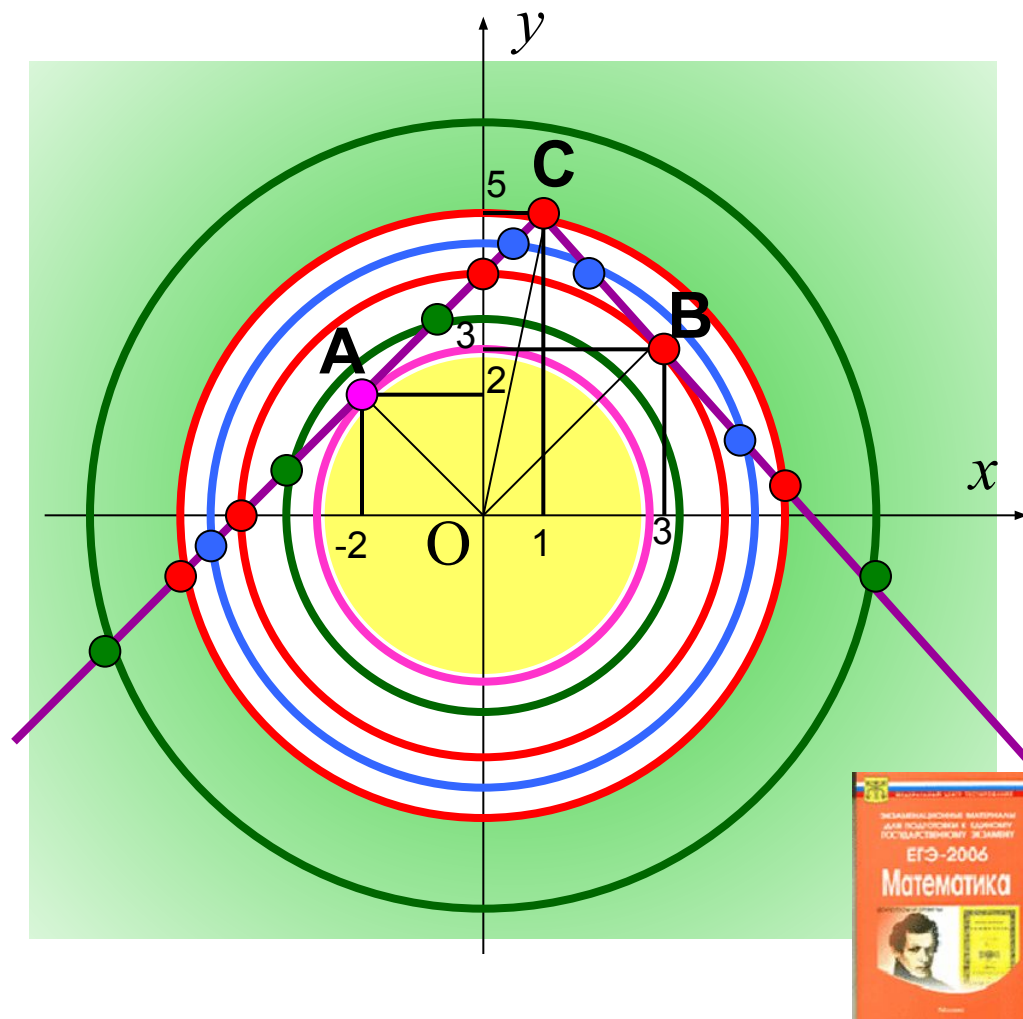
2 реш. при  $a < -\sqrt{26}, a > \sqrt{26}$

Построим эскиз этих линий и определим из

рисунка количество их общих точек.

$a_1 = OA = \sqrt{2^2 + 2^2} = 2\sqrt{2}$   
 $a_2 = OB = \sqrt{3^2 + 3^2} = 3\sqrt{2}$   
 $a_3 = OC = \sqrt{1^2 + 5^2} = \sqrt{26}$

нет решение при  $|a| < 2\sqrt{2}$



Запишем первое уравнение в виде  $x \cdot ((5 - a)x^2 - 4x + 1) = 0$

Заметим, что  $x = 0$  – корень не зависимо от параметра  $a$ .

Уравнение  $(5 - a)x^2 - 4x + 1 = 0$  может иметь 0, 1 или 2 решения в зависимости от параметра  $a$  и дискриминанта  $D = 4(a - 1)$

	<i>одно решение</i>	<i>Два решения</i>	<i>Три решения</i>
<i>первое уравнение</i>	$a < 1$	$a = 5; a = 1$	$a > 1$
<i>совокупность линий</i>	$a = 2\sqrt{2}$ $a = -2\sqrt{2}$	$-3\sqrt{2} < a < -2\sqrt{2},$ $2\sqrt{2} < a < 3\sqrt{2},$ $a < -\sqrt{26}, a > \sqrt{26}$	$a = -3\sqrt{2}, a = -\sqrt{26}$ $a = 3\sqrt{2},$ $a = \sqrt{26}$

Осталось заметить, что условие задачи выполняется только в трех точках при  $a = -\sqrt{2}, a = 3\sqrt{2}, a = \sqrt{26}$

**Ответ:**  $a = -\sqrt{2}, a = 3\sqrt{2}, a = \sqrt{26}$



Найти все положительные значения параметра  $a$  при

каждом из которых данная система имеет хотя бы одно решение.

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 6|x| - 6|y| + 17 \leq 0 \\ x^2 - a^2 = -y^2 \end{cases}$$

Решение.

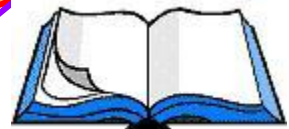
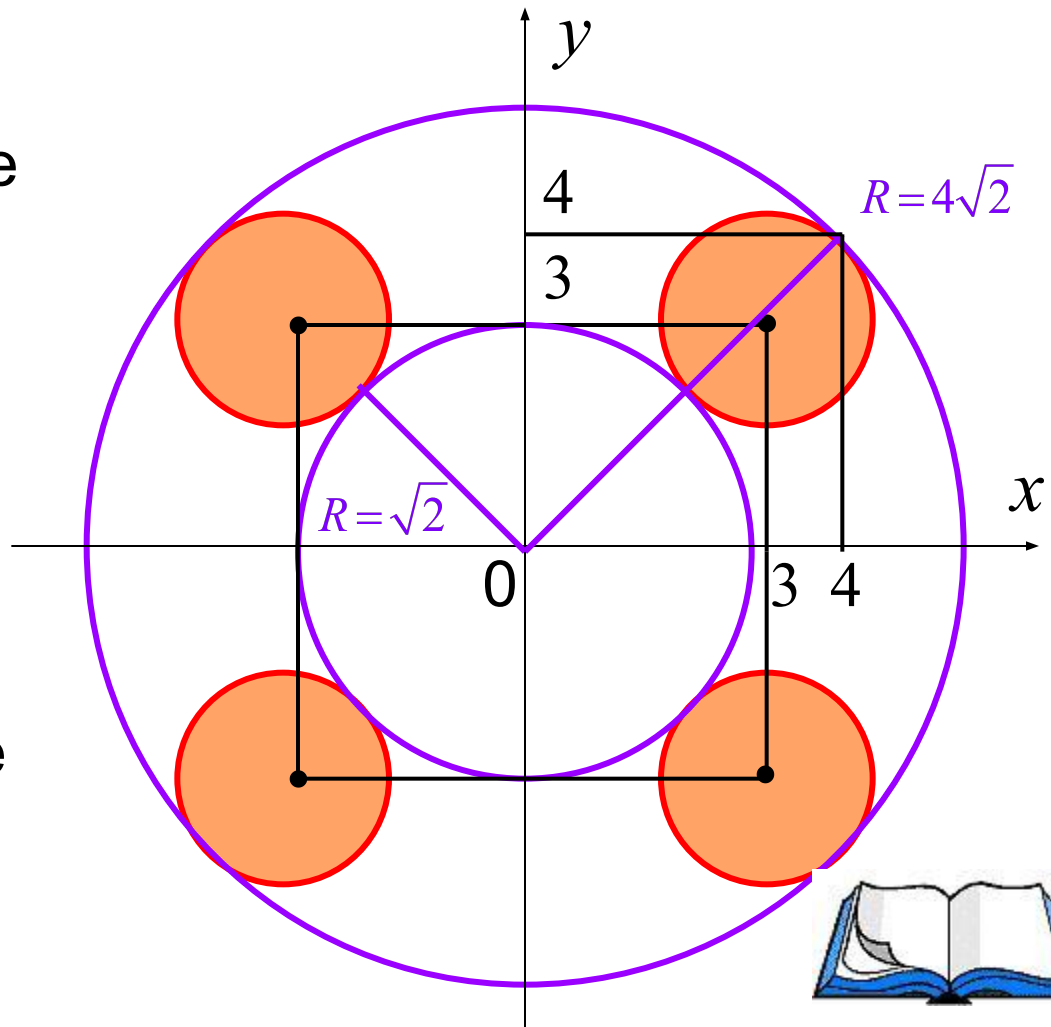
Запишем систему в виде

$$\begin{cases} (|x| - 3)^2 + (|y| - 3)^2 \leq 2 \\ x^2 + a^2 = -y^2 \end{cases}$$

Построим графический образ соответствий, входящих в систему.

Очевидно, что условие задачи выполняется при

**Ответ:**  $\sqrt{2} \leq a \leq 4\sqrt{2}$



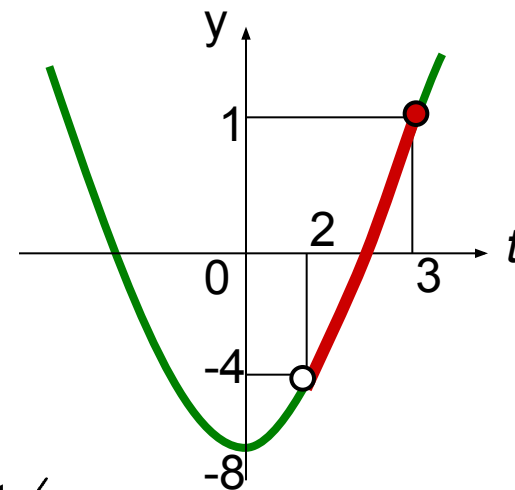
Найдите все значения параметра  $a$ , для которых при каждом  $x$  из промежутка  $(4;8]$  значение выражения  $\log_2^2 x - 8$  не равно значению выражения  $(2a - 1)\log_2 x$

*Решим задачу при условии равенства данных выражений.*

Введем новую переменную  $\log_2 x = t, t \in (2;3]$

тогда уравнение примет вид:  $t^2 - 8 = (2a - 1)t$

График левой части – парабола  $f(t)$ ,  
график правой части – прямая  $g(t)$ .



$$f(2) = 2^2 - 8 = -4, \quad g(2) = (2a - 1) \cdot 2 = -4, \quad a \neq -\frac{1}{2}$$

$$f(3) = 3^2 - 8 = 1, \quad g(3) = (2a - 1) \cdot 3 = 1, \quad a = \frac{2}{3}$$

$$\Rightarrow a \in \left( -\frac{1}{2}; \frac{2}{3} \right]$$

Значит условие исходной задачи выполняется при

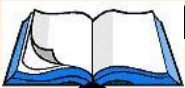
$$a \in \left( -\infty; -\frac{1}{2} \right] \cup \left( \frac{2}{3}; \infty \right)$$

# Литература

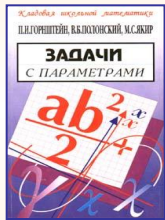


Анимация с сайта: <http://badbad-girl.narod.ru/zelenie.html>

## Задачи для решения из книг:



1. Внеурочная работа по математике в контексте реализации инновационных технологий. Дидактические материалы для организации деятельности обучаемых: учеб. пособие/авт.-сост.: А.Т. Лялькина, Е.В. Чудаева и др. – Саранск, 2007



2. П.И. Горнштейн, В. Б. Полонский, М.С. Якир. Задачи с параметрами. – М.: Илекса, Харьков: Гимназия, 2003.



3. Б.М.Ивлев, А.М.Абрамов, Ю.П.Дудницен, С.И.Шварцбургд. Задачи повышенной трудности по алгебре и началам анализа: Учеб. Пособие для 10-11 кл.сред.шк. - М.: Просвещение, 1990.



4. Экзаменационные материалы для подготовки к единому государственному экзамену. Математика. ЕГЭ – 2006. Составитель: Клово А.Г. – 2005.