МБОУ Сукпакская СОШ им. Б.И. Араптана

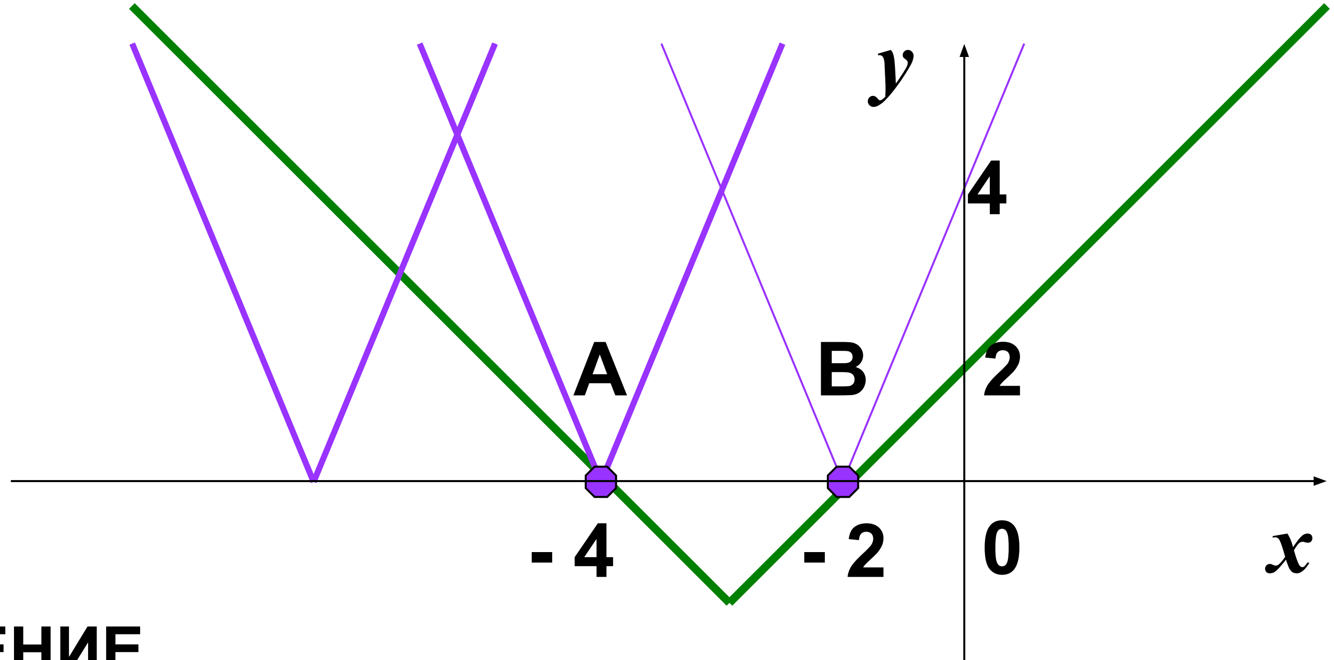
Факультативное занятие в 11 классе:

Графический подход к решению задач с параметром и модулем

подборка заданий для подготовки к ЕГЭ

Сотпа Дарья Саарымбууевна, учитель математики

Найдите все значения параметра *a*, при которых уравнение $\left|2x-a\right|=\left|x+3\right|-1$ имеет единственное решение.



РЕШЕНИЕ.

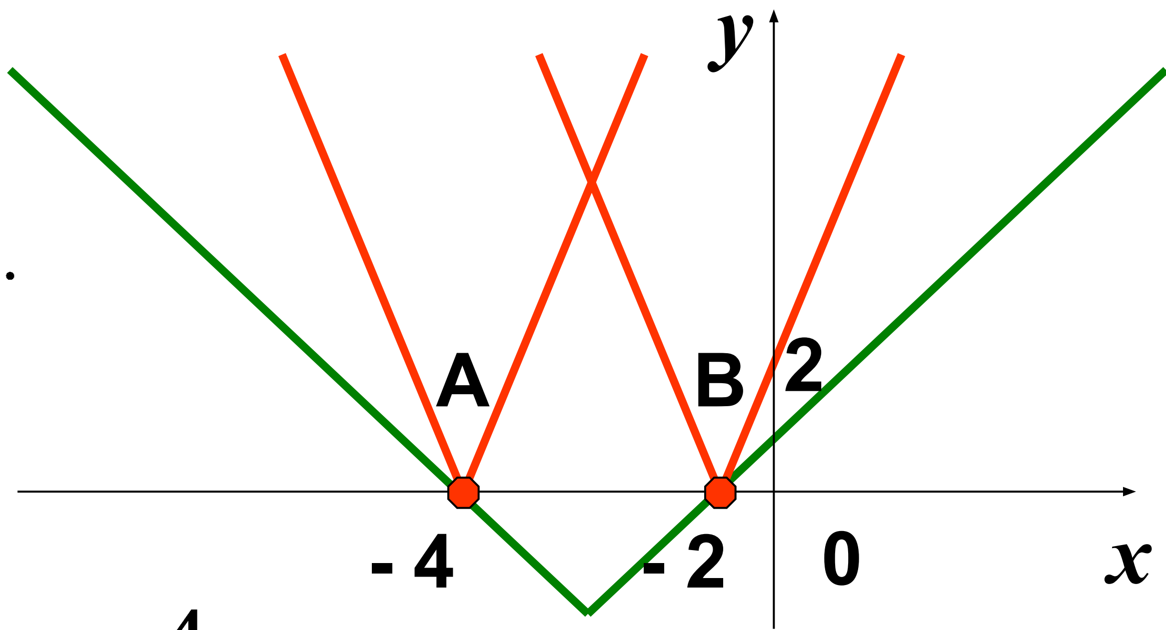
Правая часть этого уравнения задает неподвижный «уголок», левая – «уголок», вершина которого двигается по оси абсцисс.

Очевидно, что данное уравнение будет иметь единственное решение, если вершина движущегося «уголка» попадет в точку А, или точку В. Имеем,

$$|x+3|-1=0 \quad \Leftrightarrow \quad x=-4, \quad x=-2,$$

тогда А(-4; 0), В(-2; 0) и координаты этих точек удовлетворяют уравнению $y=|2x-a|$.

$$\left[\begin{array}{l} |-8-a|=0 \\ |-4-a|=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a=-8 \\ a=-4 \end{array}\right..$$



Ответ: $a=-8, \quad a=-4$

Графический способ решения задач с параметром

Задачу с параметром можно рассматривать как функцию $f\,(x;\,a)$ **=0**

Схема решения :

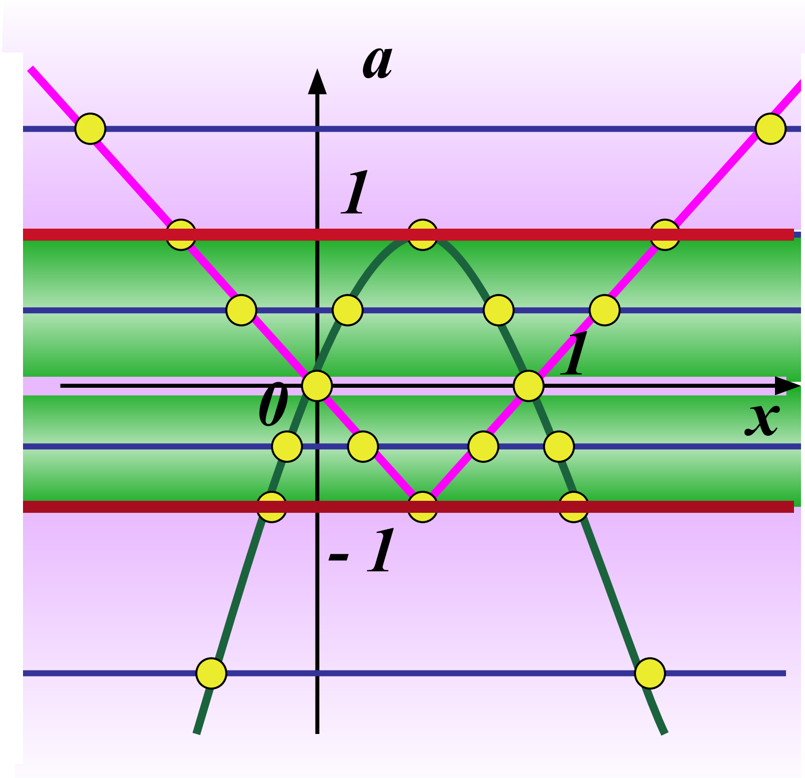
- **1. Строим графический образ**
- **2. Пересекаем полученный график прямыми параллельными оси абсцисс**
- **3. «Считываем» нужную информацию**

Найти количество корней уравнения в зависимости от параметра *a*

$$(a-2x+x^2)(a+1-|x-1|)=0$$

Данное уравнение равносильно совокупности следующих двух уравнений:

$$\left[\begin{array}{l} a=2x-x^2 \\ a=|x-1|-1 \end{array}\right.$$



Количество решений данного уравнения - это число точек пересечения графика данного уравнения с горизонтальной прямой $a=a_0$. По рисунку «считываем» ответ

если $a<-1$, $a=0$ *и* $a>1$, *то два корня*

если $a=\pm1$, *то три корня*

если $-1<a<0$ *и* $0<a<1$, *то четыре корня*

ОБОБЩЕННЫЙ МЕТОД ОБЛАСТЕЙ

(«переход» метода интервалов с прямой на плоскость)

Неравенства с одной переменной

Неравенства с двумя переменной

Метод интервалов:

- 1.ОДЗ
- 2. Корни
- 3. Ось
- 4. Знаки на интервалах
- 5. Ответ.

Метод областей:

- 1. ОДЗ
- 2. Граничные линии
- 3. Координатная плоскость
- 4. Знаки в областях
- 5.Ответ по рисунку.

На координатной плоскости изобразите множество точек , координаты которых удовлетворяют неравенству

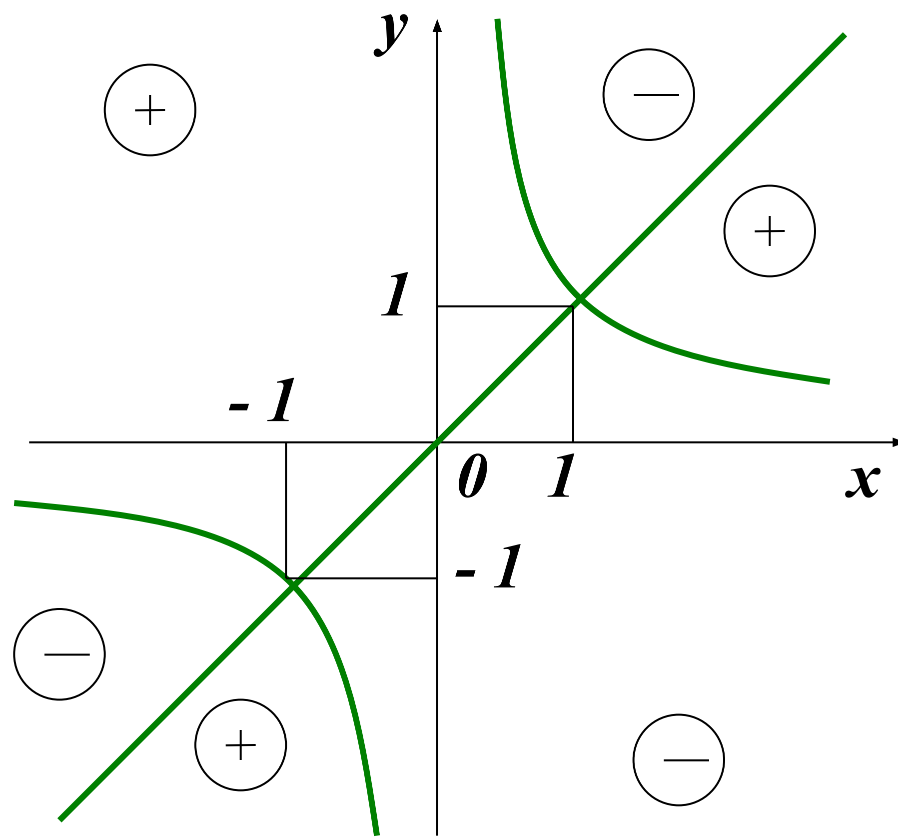
$$(x-y)(xy-1)\ge 0$$

Решение. На координатной плоскости нарисуем линии, определяемые равенствами

$y - x = 0$ и $x \cdot y - 1 = 0$

которые разбивают плоскость на несколько областей.

При $x = 1$, $y = 0$ левая часть неравенства равна -1. Следовательно, в области, содержащей точку (1; 0), она имеет знак минус, а в остальных областях её знаки чередуются.



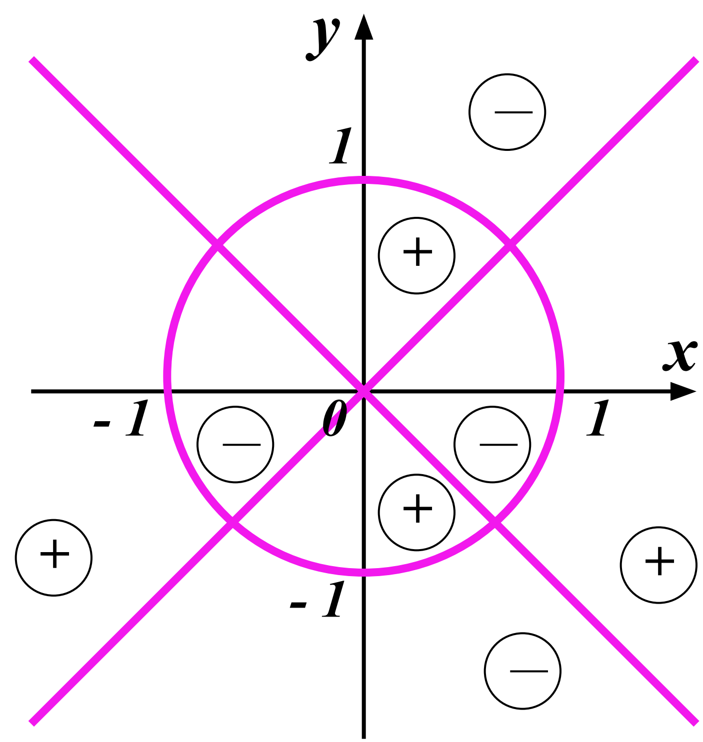
Ответ: заштрихованные области на рисунке.

На координатной плоскости изобразите множество точек, удовлетворяющих неравенству $\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2-1}\le 0$

Найдем ОДЗ: $x^2+y^2-1\ne 0 \Leftrightarrow x^2+y^2\ne 1$

Граничные линии: $x^2-y^2=0 \Leftrightarrow |y|=|x|$ *и* $x^2+y^2=1$

Строим граничные линии.
Они разбивают плоскость на восемь областей, определяя знаки подстановкой в отдельных точках, получаем решение.



Ответ: заштрихованные области на рисунке.

МЕТОД ОБЛАСТЕЙ ПРИ РЕШЕНИИ ЗАДАЧ С ПАРАМЕТРАМИ

Графический прием ← **Ключ решения:** → **Свойства функций**

Параметр – «равноправная» переменная ⇒ отведем ему координатную ось т.е. задачу с параметром будем рассматривать как функцию $f\,(x\,;\,a) > 0$

Общие признаки задач подходящих под рассматриваемый метод

В задаче дан один параметр a и одна переменная x

Они образуют некоторые аналитические выражения $F\,(x;a)$, $G\,(x;a)$

Графики уравнений $F(x;a)=0$, $G(x;a)=0$ строятся несложно

Схема решения:

- **1.Строим графический образ**
- **2.Пересекаем полученный график прямыми перпендикулярными параметрической оси**
- **3.«Считываем» нужную информацию**

Найти все значения параметра *p*, при каждом из которых множество решений неравенства $\left(p-x^2\right)\left(p+x-2\right)<0$ не содержит ни одного решения неравенства $x^2 \le 1$

Применим обобщенный метод областей.

Построим граничные линии

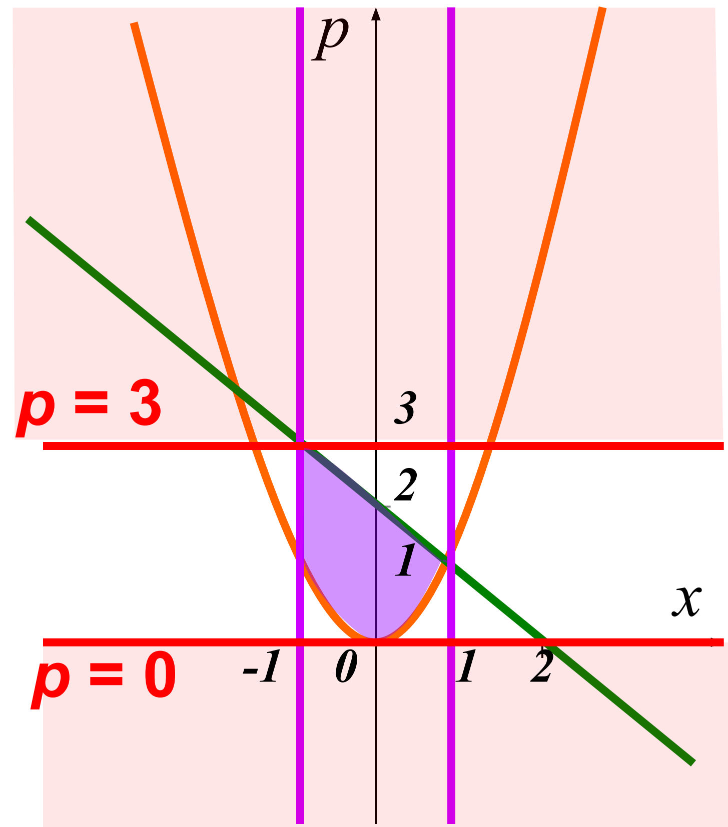
$$p = x^2 \text{ и } \quad p = 2 - x$$

Определим знаки в полученных областях, и получим решение данного неравенства.

Осталось из полученного множества исключить решения неравенства $x^2 \le 1$

По рисунку легко считываем ответ

$$p \le 0, \; p \ge 3$$



Ответ: $p \le 0, \; p \ge 3$

Сколько решений имеет система в зависимости от параметра *а*?

$$\begin{cases} |x|+|y|=a, \\ x^2+y^2=1 \end{cases}$$

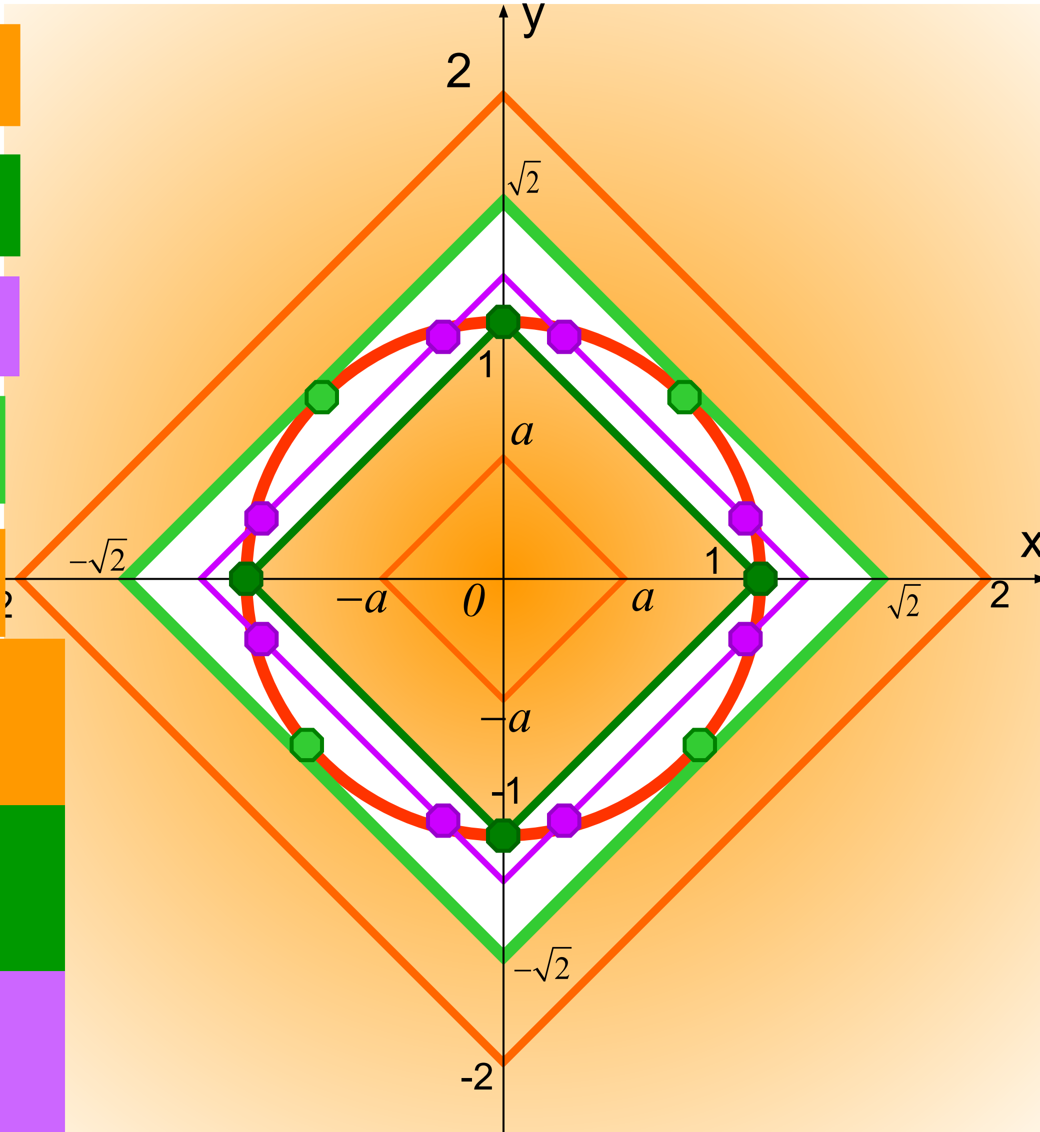
решений нет при $a<1$

4 решения при $a=1$

8 решений при $1<a<\sqrt{2}$

4 решения при $a=\sqrt{2}$

решений нет при $a>\sqrt{2}$



Ответ:

решений нет, если $a<1$ или $a>\sqrt{2}$

4 решения, если $a=1$ или $a=\sqrt{2}$

8 решений, если $1<a<\sqrt{2}$

При каких положительных значениях параметра *а*, система уравнений имеет ровно четыре решения?

$$\begin{cases} \left|4-|x-2|\right|-|y|=0 \\ x^2+y^2=a^2+4(x-1) \end{cases}$$

Запишем

$$\left|4-|x-2|\right|=|y|$$

решений нет при $a<2\sqrt{2}$

Построим графики обоих уравнений.

ния:

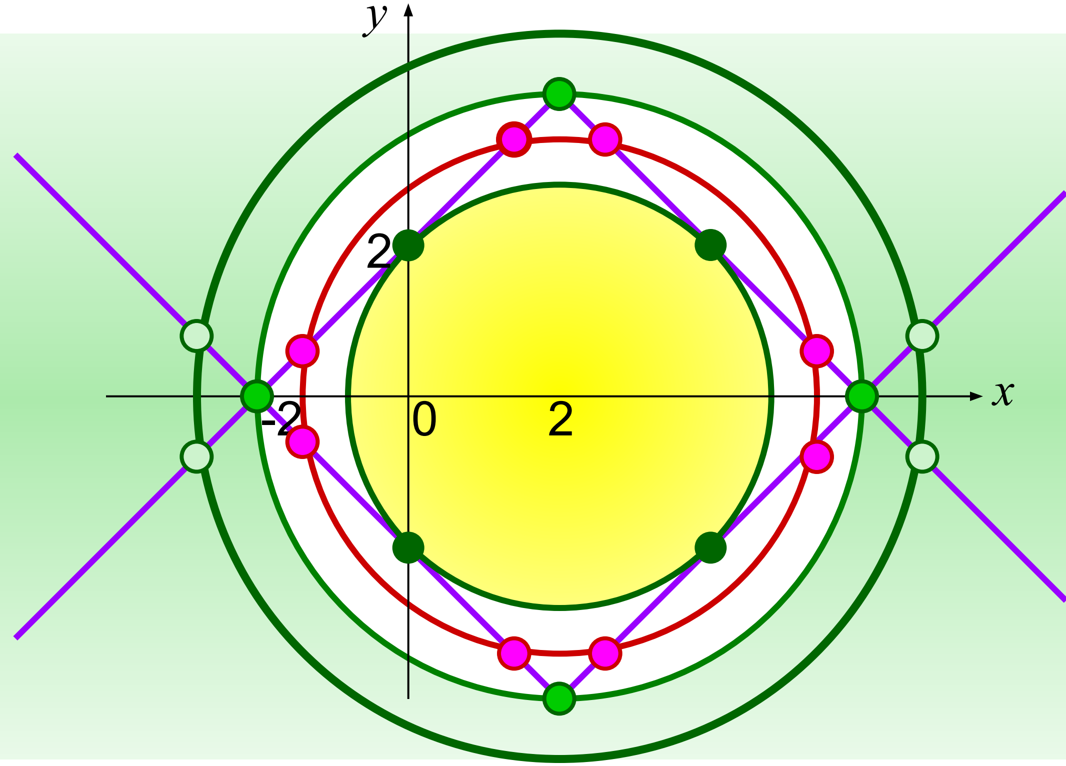
4 решения при $a=2\sqrt{2}$

$y=\left|4-|x-2|\right|$ и симметрично

8 решений при $2\sqrt{2}<a<4.$

Второе уравнение задает семейство

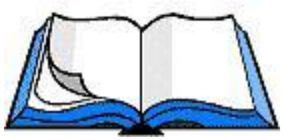
4 решения при $a\geq 4$ и



Итак:

при $a<2\sqrt{2}$ решений нет; при $a=2\sqrt{2}$ и $a\geq 4$ система имеет 4 решения; система имеет 8 решений при $2\sqrt{2}<a<4.$

Ответ: $a=2\sqrt{2}$ 4 $a\geq$



Задачи,
взятые из материалов ЕГЭ
прошлых лет

При каких значениях параметра a сумма $\log_a(\cos^2 x+1)$ и $\log_a(\cos^2 x+5)$ равна 1 хотя бы при одном значении x?

Решение. Рассмотрим сумму данных выражений

$\log_a(\cos^2 x+1)+\log_a(\cos^2 x+5)=1.$

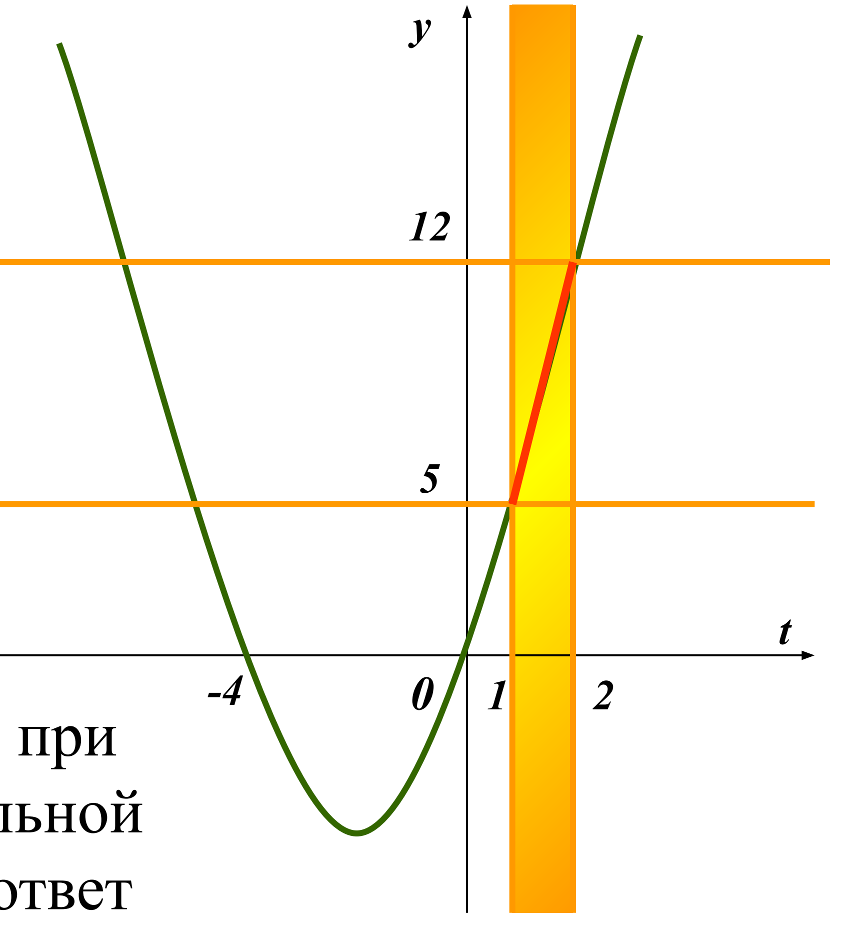
Пусть $t=\cos^2 x+1, \quad t\in[1;2]$ тогда уравнение примет вид

$\log_a t\cdot(t+4)=1 \;\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow t^2+4t=a \;,(a>0, a\neq 1)$.

Построим в прямоугольной системе координат график параболы $y(t)=t^2+4\cdot t,$

и прямые $y = a,$ учитывая ОДЗ: $t\in[1;2].$



Сумма данного выражения равна 1, при пересечения параболы с горизонтальной прямой . По рисунку «считываем» ответ

Ответ: $a\in[5;12]$

Найдите все значения параметра *а*, при которых количество корней уравнения $(5-a)x^3-4x^2+x=0$ равно количеству общих точек линий $x^2+y^2=a^2$ и $y=5-|x-1|$

1 решение при $|a|=2\sqrt{2}$

нет решение при $|a|<2\sqrt{2}$

задает неподвижный

2 решения при $2\sqrt{2}<|a|<3\sqrt{2}$

3 решения при $|a|=3\sqrt{2}$

задаёт семейство

4 решения при $3\sqrt{2}<|a|<\sqrt{26}$

3 решения при $|a|=\sqrt{26}$

радиусом

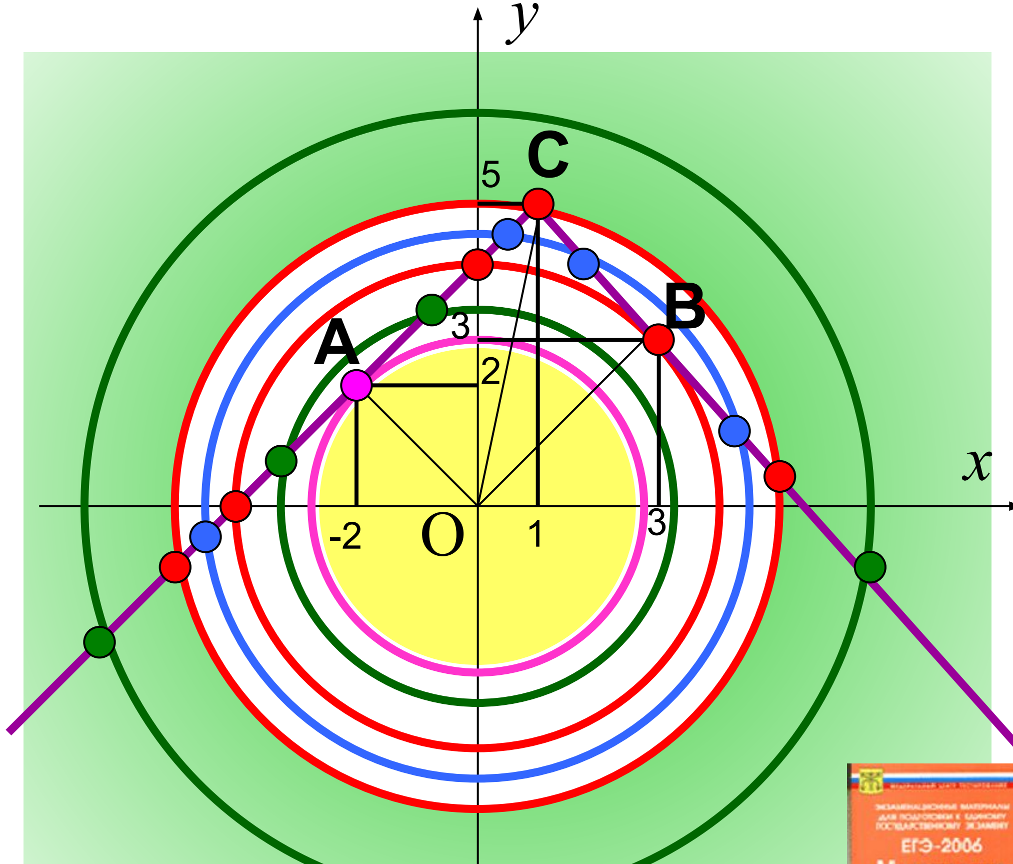
2 реш. при $a<-\sqrt{26}, a>\sqrt{26}$

Построим эскизы этих линий и определим из рисунка количество их общих точек.

$$a_1=OA=\sqrt{2^2+2^2}=2\sqrt{2}$$

$$a_2=OB=\sqrt{3^2+3^2}=3\sqrt{2}$$

$$a_3=OC=\sqrt{1^2+5^2}=\sqrt{26}$$



Запишем первое уравнение в виде $x\cdot\left(\left(5-a\right)x^2-4x+1\right)=0$

Заметим, что *x* = 0 – корень не зависимо от параметра *a*.

Уравнение $\left(5-a\right)x^2-4x+1=0$ может иметь 0, 1 или 2 решения в зависимости от параметра a и дискриминанта $D=4\left(a-1\right)$

	одно решение	Два решения	Три решения
первое уравнение	$a<1$	*a* = 5; *a* = 1	$a>1$
совокупность линий	$a=2\sqrt{2}$ $a=-2\sqrt{2}$	$-3\sqrt{2}<a<-2\sqrt{2},$ $2\sqrt{2}<a<3\sqrt{2},$ $a<-\sqrt{26},\ \ a>\sqrt{26}$	$a=-3\sqrt{2},\ a=-\sqrt{26}$ $a=3\sqrt{2},$ $a=\sqrt{26}$

Осталось заметить, что условие задачи выполняется только в трех точках при $a=-2\sqrt{2},\ a=3\sqrt{2}\quad a=\sqrt{26}$

Ответ: $a=-2\sqrt{2},\ a=3\sqrt{2}\quad a=\sqrt{26}$

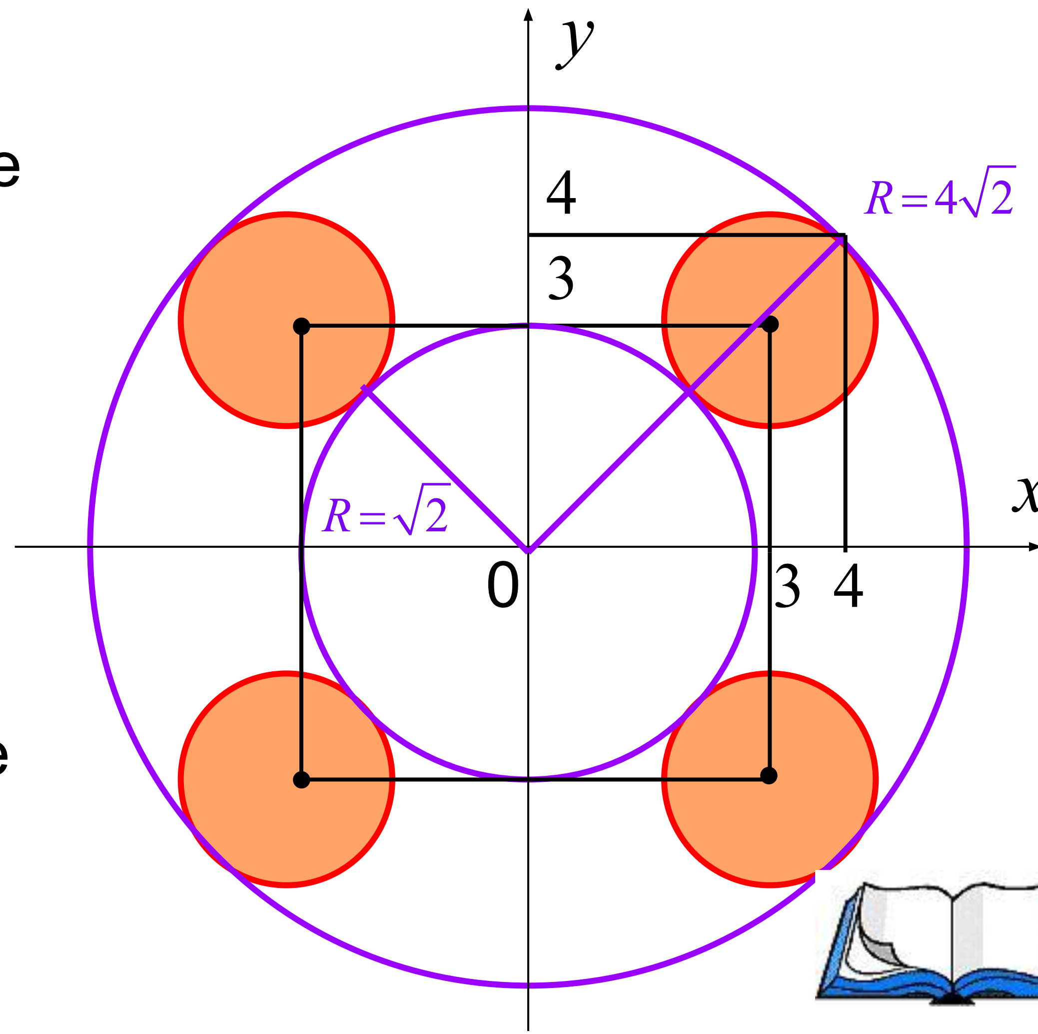
Найти все положительные значения параметра a при каждом из которых данная система $\begin{cases} x^2 + y^2 - 6|x| - 6|y| + 17 \le 0 \\ x^2 - a^2 = -y^2 \end{cases}$ **имеет хотя бы одно решение.**

Решение.

Запишем систему в виде

$$\begin{cases} (|x| - 3)^2 + (|y| - 3)^2 \le 2 \\ x^2 + a^2 = {}^2 \end{cases}$$

Построим графический образ соответствий, входящих в систему.



Очевидно, что условие задачи выполняется при

Ответ: $\sqrt{2} \le a \le 4\sqrt{2}$

Найдите все значения параметра а, для которых при каждом х из промежутка (4;8] значение выражения $\log_2^2 x - 8$ <u>не равно</u> значению выражения $(2a-1)\log_2 x$

Решим задачу при условии равенства данных выражений.

Введем новую переменную $\log_2 x = t, t \in (2;3]$

тогда уравнение примет вид: $t^2 - 8 = (2a-1)t$

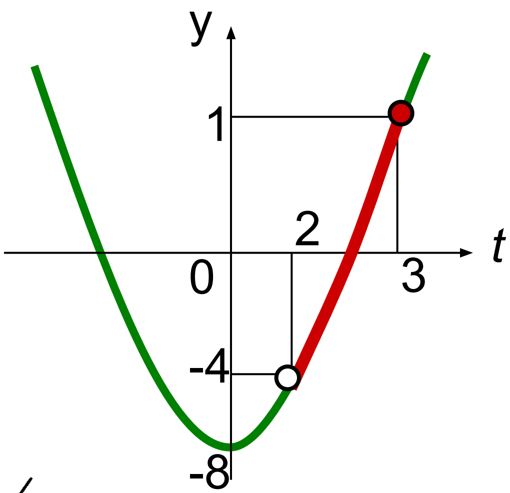


График левой части – парабола *f (t),*
график правой части – прямая *g(t).*

$$f(2) \neq 2^2 - 8 = -4, \quad g(2) \neq (2a-1)\cdot 2 = -4, \quad a \neq -1/2$$

$$f(3) = 3^2 - 8 = 1, \quad g(3) = (2a-1)\cdot 3 = 1, \quad a = 2/3$$

$$\Rightarrow a \in \left(-\frac{1}{2}; \frac{2}{3}\right]$$

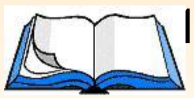
Значит условие исходной задачи выполняется при

$$a \in \left(-\infty; -\frac{1}{2}\right] \cup \left(\frac{2}{3}; \infty\right)$$

Литература

Анимация с сайта: http://badbad-girl.narod.ru/zelenie.html

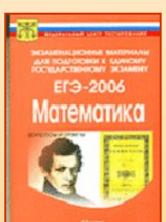
Задачи для решения из книг:



1. Внеурочная работа по математике в контексте реализации инновационных технологий. Дидактические материалы для организации деятельности обучаемых: учеб. пособие⁄авт.-сост.: А.Т. Лялькина, Е.В. Чудаева и др. – Саранск, 2007

2. П.И. Горнштейн, В. Б. Полонский, М.С. Якир. Задачи с параметрами. – М.: Илекса, Харьков: Гимназия, 2003.

3. Б.М.Ивлев, А.М.Абрамов, Ю.П.Дудницен, С.И.Шварцбурд. Задачи повышенной трудности по алгебре и началам анализа: Учеб. Пособие для 10-11 кл.сред.шк. - М.: Просвещение, 1990.



4. Экзаменационные материалы для подготовки к единому государственному экзамену. Математика. ЕГЭ – 2006. Составитель: Клово А.Г. – 2005.