

# «Степень вершины» (графы)

Внеурочная деятельность по математике

Выполнила : учитель математики МБОУ Бурмакинской СОШ №1

Короткова О.М.

# Теоретическая часть

- ▶ Число рёбер, выходящих из одной вершины, называют степенью этой вершины.
- ▶ Лемма 1: «Число рёбер в графе ровно в два раза меньше, чем сумма степеней вершин.»
- ▶ Докажем, что это верно для любого графа.
- ▶ Любое ребро графа связывает две вершины.
- ▶ Значит, если будем складывать число степеней всех вершин графа, то получим удвоенное число рёбер, т. к. каждое ребро было подсчитано дважды.

# Задача №1

- ▶ В деревне 10 домов, и из каждого выходит по 7 тропинок, идущих к другим домам.
- ▶ Сколько всего тропинок проходит между домами?

# Решение задачи №1

- ▶ Пусть дома - вершины графа, тропинки - рёбра.
- ▶ Тогда степень каждой вершины равна 7, всего сумма степеней вершин  $7 \cdot 10 = 70$ , тогда число рёбер (тропинок)  $70 : 2 = 35$ .
- ▶ Ответ: 35.

# Теоретическая часть

- ▶ Лемма 2: «Сумма степеней вершин графа чётна».
- ▶ Это утверждение становится понятным, если вспомнить, что по лемме 1 эта сумма равна удвоенному количеству рёбер.
- ▶ Эта лемма доказывает, что если нам задан набор степеней с нечётной суммой, то он не может отвечать никакому графу.

## Задача №2

- ▶ Между 7 планетами звёздной системы установлено ракетное сообщение.
- ▶ Министр отрапортовал, что с каждой планеты существует прямой рейс ровно на 5 других планет системы.
- ▶ Докажите, что министр ошибся.

# Решение задачи №2

- ▶ Пусть планеты - вершины графа, а маршруты - рёбра.
- ▶ Если министр прав, то сумма степеней вершин этого графа равна  $7 * 5 = 35$ , а нечётной она быть не может.
- ▶ Значит, министр ошибся.

# Теоретическая часть

- ▶ Если степень вершины чётная, то вершина называется чётной, если степень нечётная, то вершина нечётная.
- ▶ Докажем следующее утверждение.
- ▶ Лемма: «Число нечётных вершин графа чётно.»
- ▶ Если в графе есть  $a$  чётных и  $b$  нечётных вершин, то сумма степеней чётных вершин чётна как сумма чётных чисел
- ▶ Сумма степеней нечётных вершин нечётна, если их количество « $b$ » нечётно.
- ▶ Но тогда общее число степеней вершин тоже нечётно, чего не может быть. Значит « $b$ » чётно.



## Задача №3

- ▶ Маша сказала своей подруге Лене: «У нас в классе 25 человек. Каждый из них дружит ровно с 7-ю одноклассниками». «Не может этого быть», - ответила Лена.
- ▶ Почему она так решила?

# Решение задачи №3

- ▶ Представим себе, что между каждыми двумя друзьями протянута верёвочка.
- ▶ Тогда каждый из 25 учеников будет привязан к 11 концам верёвочек.
- ▶ Значит всего у протянутых верёвочек будет  $25 * 7 = 175$  концов.
- ▶ Но их общее число не может быть нечётным, так как у каждой верёвочки два конца.