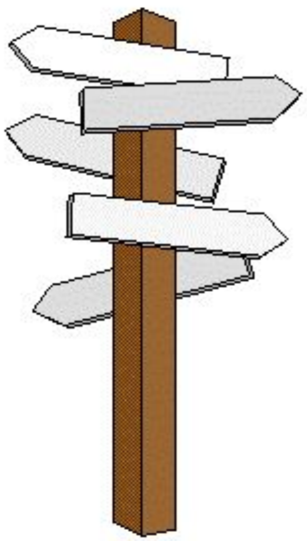
Несобственные интегралы.

Несобственные интегралы

С бесконечными пределами (1-го рода)

От неограниченных функций (2-го рода)



Несобственные интегралы с бесконечными пределами интегрирования

Пусть функция $y = f(x)$ определена и интегрируема на произвольном $[a, b] \Rightarrow$ функция

$$F(t) = \int_a^t f(x)dx$$

определена для произвольного $t \geq a$.

Определение. ***Несобственным интегралом***

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx$$

от функции $f(x)$ на полуинтервале $[a, +\infty)$ называется предел функции $F(t)$ при t стремящимся к $+\infty$:

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx = \lim_{t\to+\infty} \int_a^{t} f(x)dx.$$

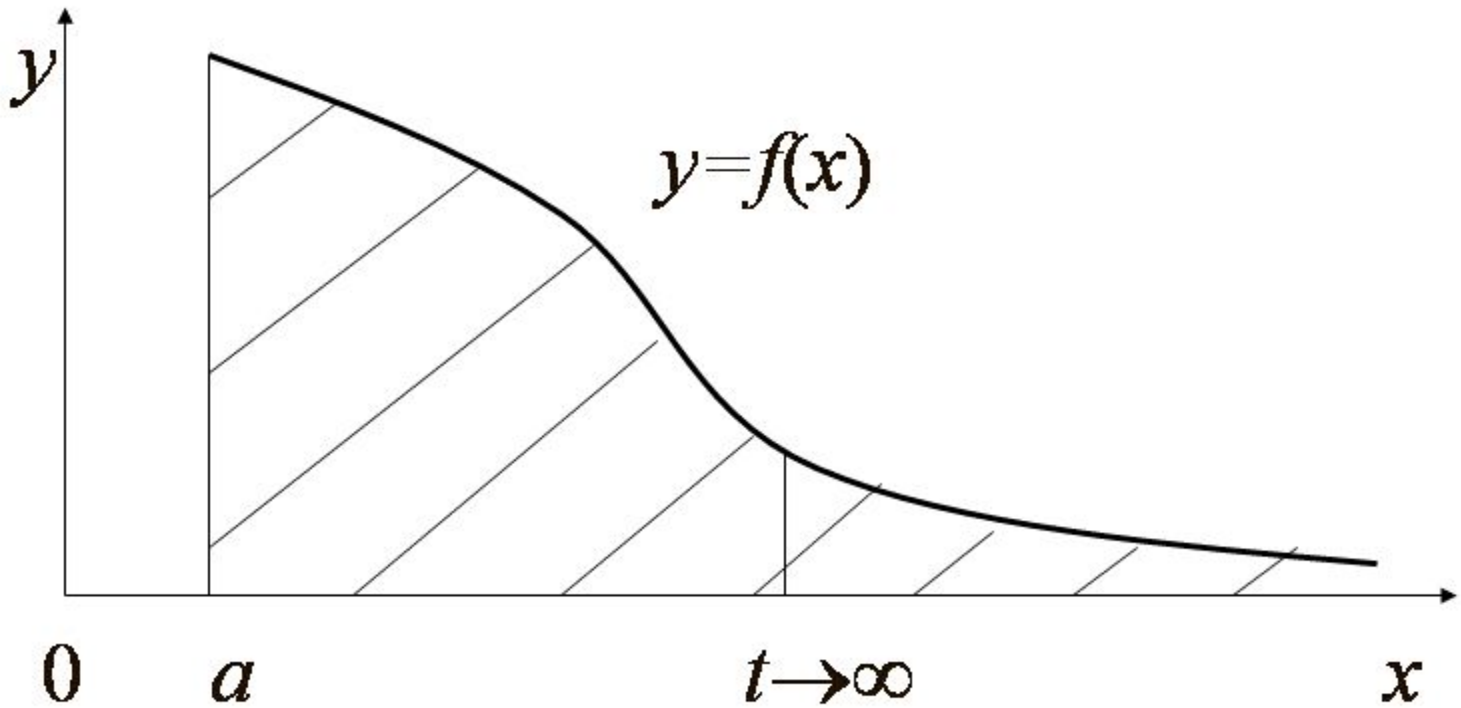
Если предел, стоящий в правой части равенства, существует и конечен, то несобственный интеграл называется ***сходящимся***, в противном случае – ***расходящимся***.

При работе с несобственными интегралами выделяют следующие две задачи:

А) исследование вопроса о сходимости заданного несобственного интеграла

Б) вычисление значения интеграла в случае, если последний сходится.

Геометрический смысл несобственного интеграла - *площадь полубесконечной (бесконечной) фигуры.*



Пример. Вычислить $\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x^2}$

$$\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x^2}=-\lim_{t\to+\infty}\left(\frac{1}{t}-1\right)=-(0-1)=1.$$

Аналогично можно убедиться, что

$$\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x^m}$$

является сходящимся, если $m>1$

является расходящимся, если $m\le 1.$

Определение сходимости интеграла

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)dx$$ аналогично.

Введем понятие несобственного интеграла на (-∞ , +∞). Пусть для некоторого числа *a* несобственные интегралы

$$\int_{-\infty}^{a} f(x)dx \text{ и } \int_{a}^{+\infty} f(x)dx$$

сходятся. Тогда положим, что

$$\boxed{\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{a} f(x)dx + \int_{a}^{+\infty} f(x)dx,}$$

При этом интеграл $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$

называется ***сходящимся***. Если хотя бы один из интегралов в правой части расходится, то несобственный интеграл

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$$

называется ***расходящимся***.

Несобственные интегралы от неограниченных функций

Пусть $y = f(x)$ непрерывна, но не ограничена на полуинтервале $[a, b)$.

Определение. Если существует и конечен предел

$$\lim_{\delta \to 0+} \int_a^{b-\delta} f(x)dx,$$

где $\delta > 0$, то он называется **несобственным интегралом от функции** $y = f(x)$ на $[a, b)$.

Обозначается $\int_a^b f(x)dx$,

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\delta \to 0+} \int_a^{b-\delta} f(x)dx.$$

В этом случае несобственный интеграл называется ***сходящимся***, в противном случае – ***расходящимся***.

Аналогично вводится понятие несобственного интеграла от функции $y = f(x)$ непрерывной, но ограниченной на $(a, b]$:

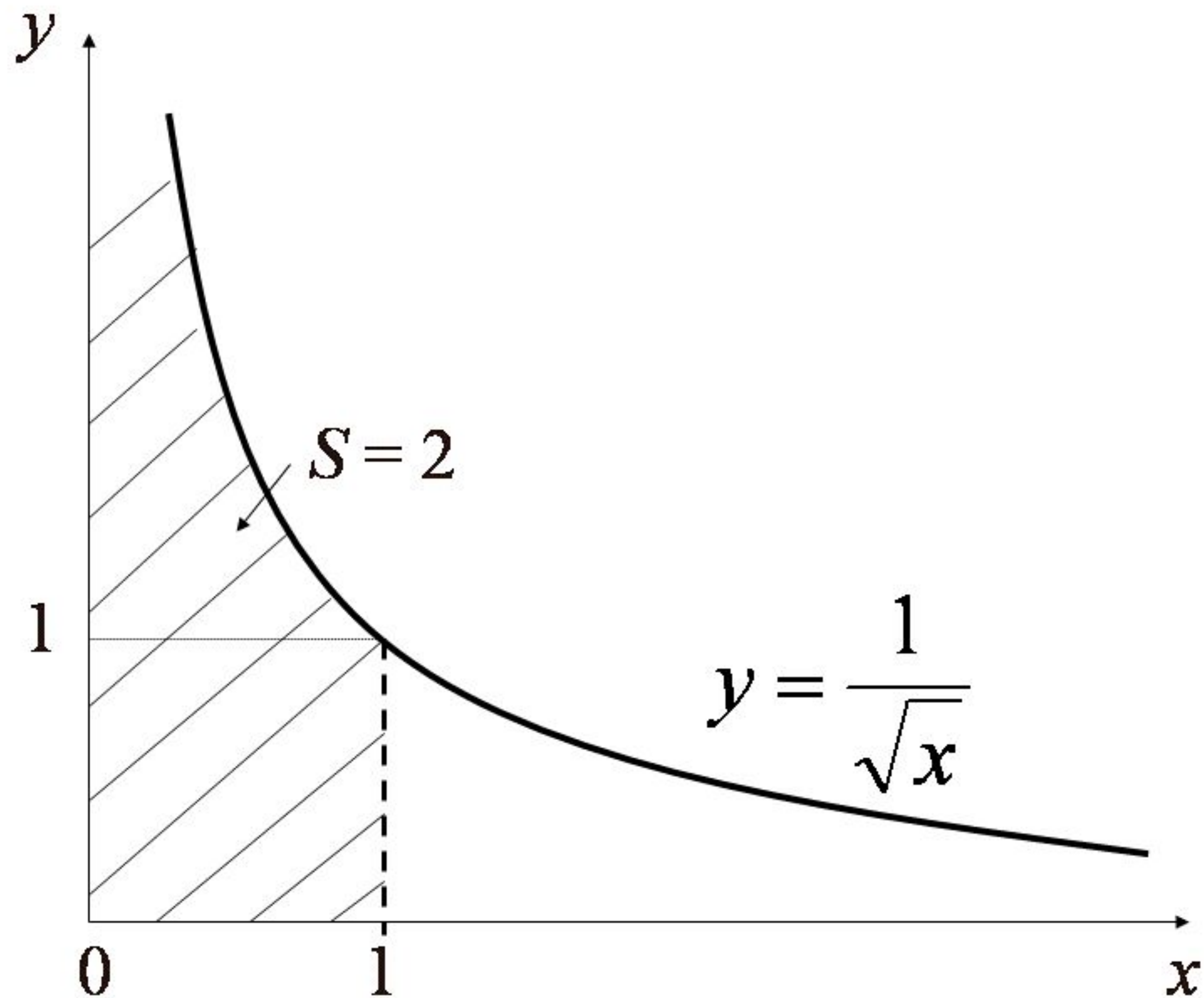
$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\delta \to 0+} \int_{a+\delta}^{b} f(x)dx.$$

Пример. Вычислить $\int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}}$.

$$\int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}} = \lim_{\delta\to 0+} \int\limits_\delta^1 x^{-1/2} dx = \lim_{\delta\to 0+} 2\, x^{1/2}\Big|_\delta^1 =$$

$$= 2 \lim_{\delta\to 0+} \left(1 - \sqrt{\delta}\right) = 2 \quad \Rightarrow$$

Полубесконечная фигура, ограниченная осями координат, кривой $y = 1/\sqrt{x}$ и прямой $x = 1$, имеет конечную площадь $S = 2$ кв.ед.


y
S = 2
1
y = 1/√x
0
1
x

Пример. Найти $\int\limits_0^1 \frac{dx}{x^\alpha}$, где $\alpha > 0$

- некоторое число; $x = 0$ – особая точка.

Рассмотрим два случая для числа α:

а) при $\alpha = 1$

$$\int\limits_0^1 \frac{dx}{x} = \lim_{\delta \to 0+} \int\limits_\delta^1 \frac{dx}{x} = \lim_{\delta \to 0+} \ln x \Big|_\delta^1 =$$

$$= 0 - \lim_{\delta \to 0+} \ln \delta = \infty \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ несобственный интеграл расходится;

б) при $\alpha \neq 1$

$$\int_0^1 \frac{dx}{x^\alpha} = \lim_{\delta\to 0+} \int_\delta^1 \frac{dx}{x^\alpha} =$$

$$= \lim_{\delta\to 0+} \frac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha}\bigg|_\delta^1 = \frac{1}{1-\alpha} \cdot \left(1 - \lim_{\delta\to 0+} \delta^{1-\alpha}\right) =$$

$$= \begin{cases} \dfrac{1}{1-\alpha} & \text{при } 0<\alpha<1, \\ \infty & \text{при } \alpha>1. \end{cases}$$

т.е. интеграл расходится при $\alpha \geq 1$ и сходится при $0 < \alpha < 1$.