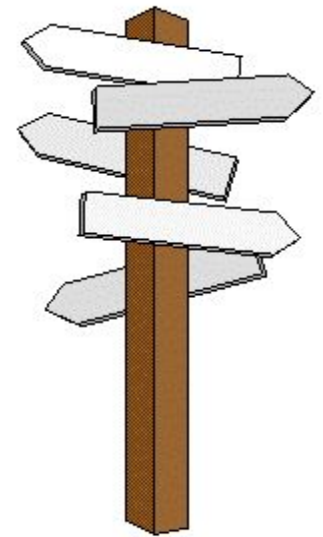


Несобственные интегралы.

Несобственные интегралы

С бесконечными пределами
(1-го рода)

От неограниченных функций
(2-го рода)



Несобственные интегралы с бесконечными пределами интегрирования

Пусть функция $y = f(x)$ определена и
интегрируема на произвольном $[a, b] \Rightarrow$
функция

$$F(t) = \int_a^t f(x) dx$$

определена для произвольного $t \geq a$.

Определение. *Несобственным интегралом*

$$\int_a^{+\infty} f(x) dx$$

от функции $f(x)$ на полуинтервале $[a, +\infty)$ называется предел функции $F(t)$ при t стремящимся к $+\infty$:

$$\int_a^{+\infty} f(x) dx = \lim_{t \rightarrow +\infty} \int_a^t f(x) dx.$$

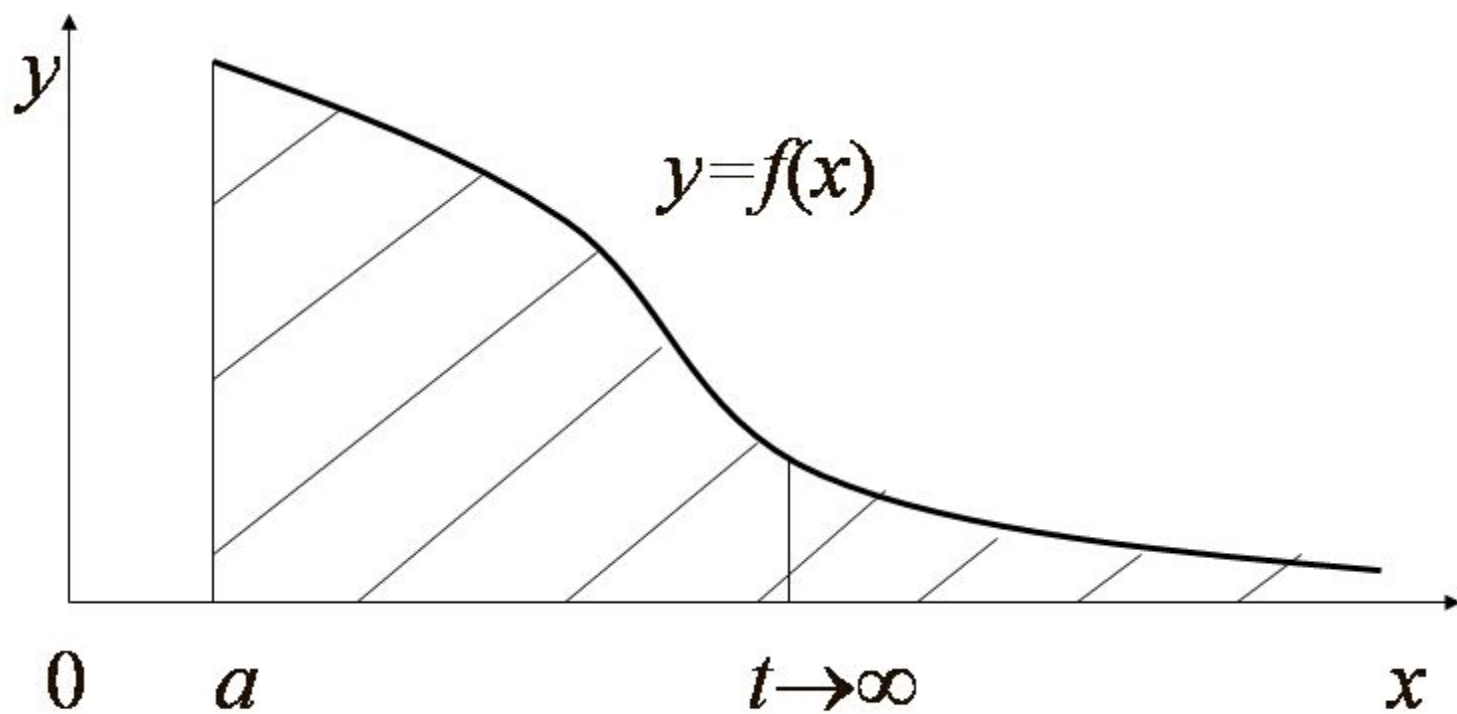
Если предел, стоящий в правой части равенства, существует и конечен, то несобственный интеграл называется *сходящимся*, в противном случае – *расходящимся*.

При работе с несобственными интегралами выделяют следующие две задачи:

А) исследование вопроса о сходимости заданного несобственного интеграла

Б) вычисление значения интеграла в случае, если последний сходится.

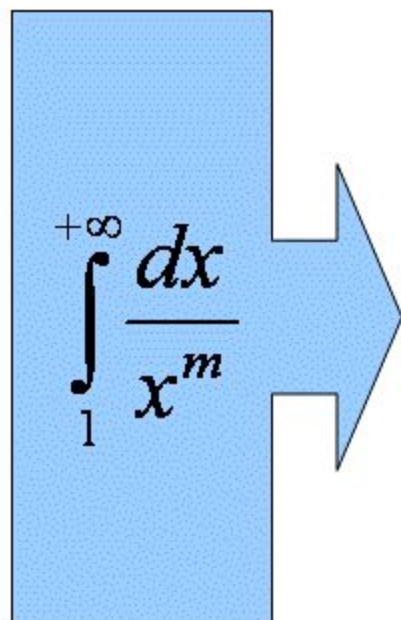
**Геометрический смысл
несобственного интеграла -
площадь полубесконечной
(бесконечной) фигуры.**



Пример. Вычислить $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2}$

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2} = -\lim_{t \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{t} - 1 \right) = -(0 - 1) = 1.$$

Аналогично можно убедиться, что


$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^m}$$

является сходящимся, если $m > 1$

является расходящимся, если $m \leq 1$.

Определение сходимости интеграла

$$\int_{-\infty}^b f(x)dx \quad \text{аналогично.}$$

Введем понятие несобственного интеграла на $(-\infty, +\infty)$. Пусть для некоторого числа a несобственные интегралы

$$\int_{-\infty}^a f(x)dx \quad \text{и} \quad \int_a^{+\infty} f(x)dx$$

сходятся. Тогда положим, что

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^a f(x)dx + \int_a^{+\infty} f(x)dx,$$

При этом интеграл $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$

называется *сходящимся*. Если хотя бы один из интегралов в правой части расходится, то несобственный интеграл

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$$

называется *расходящимся*.

Несобственные интегралы от неограниченных функций

Пусть $y = f(x)$ непрерывна, но не ограничена на полуинтервале $[a, b)$.

Определение. Если существует и конечен предел

$$\lim_{\delta \rightarrow 0^+} \int_a^{b-\delta} f(x) dx,$$

где $\delta > 0$, то он называется **несобственным интегралом от функции $y = f(x)$ на $[a, b)$.**

Обозначается $\int_a^b f(x)dx,$

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\delta \rightarrow 0^+} \int_a^{b-\delta} f(x)dx.$$

В этом случае несобственный интеграл называется *сходящимся*, в противном случае – *расходящимся*.

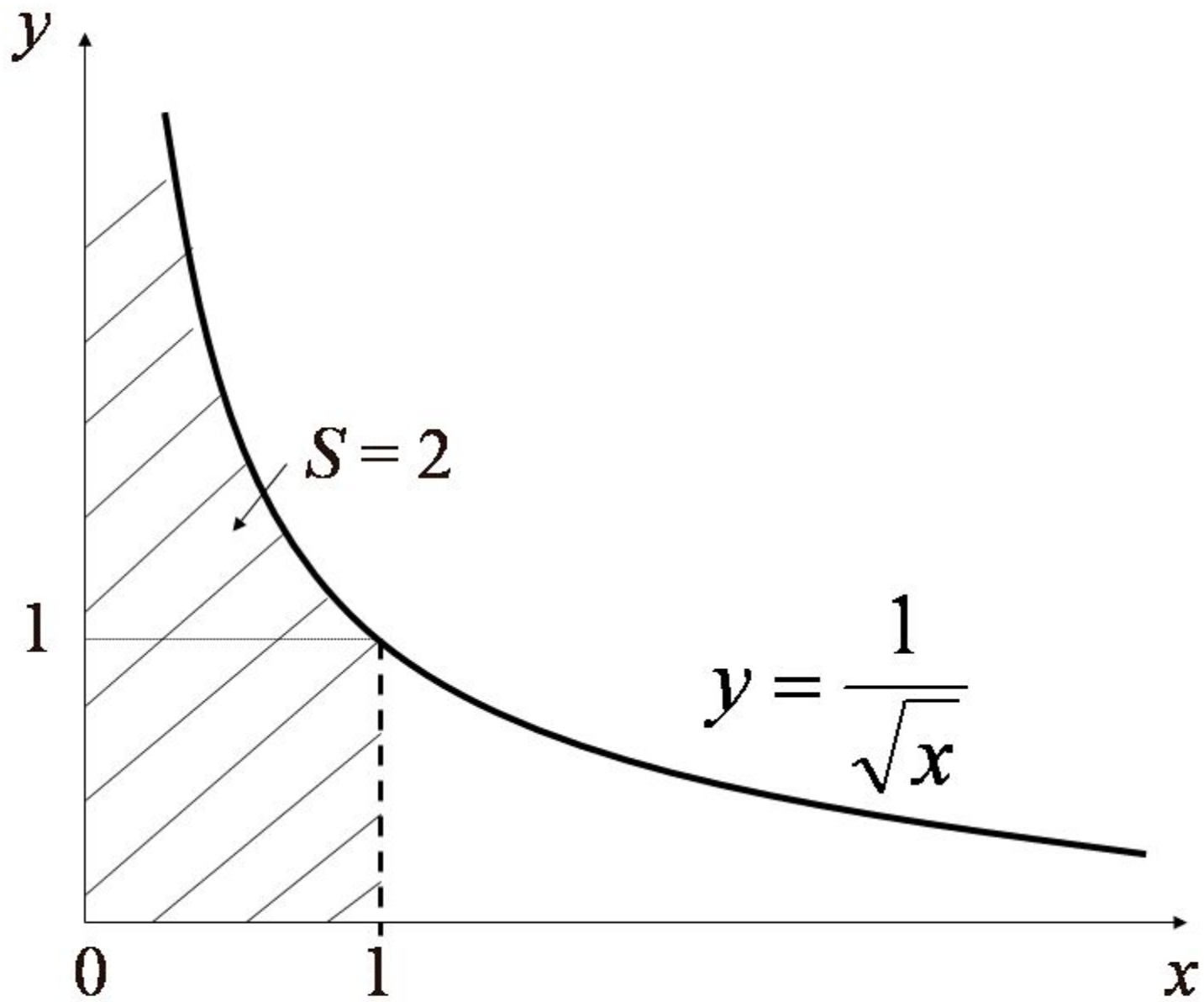
Аналогично вводится понятие несобственного интеграла от функции $y = f(x)$ непрерывной, но ограниченной на $(a, b]$:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\delta \rightarrow 0^+} \int_{a+\delta}^b f(x)dx.$$

Пример. Вычислить $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}}$.

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}} &= \lim_{\delta \rightarrow 0^+} \int_{\delta}^1 x^{-1/2} dx = \lim_{\delta \rightarrow 0^+} 2x^{1/2} \Big|_{\delta}^1 = \\ &= 2 \lim_{\delta \rightarrow 0^+} (1 - \sqrt{\delta}) = 2 \quad \Rightarrow \end{aligned}$$

Полубесконечная фигура, ограниченная осями координат, кривой $y = 1/\sqrt{x}$ и прямой $x = 1$, имеет конечную площадь $S = 2$ кв.ед.



Пример. Найти $\int_0^1 \frac{dx}{x^\alpha}$, где $\alpha > 0$

- некоторое число; $x = 0$ – особая точка.

Рассмотрим два случая для числа α :

а) при $\alpha = 1$

$$\int_0^1 \frac{dx}{x} = \lim_{\delta \rightarrow 0^+} \int_{\delta}^1 \frac{dx}{x} = \lim_{\delta \rightarrow 0^+} \ln x \Big|_{\delta}^1 =$$

$$= 0 - \lim_{\delta \rightarrow 0^+} \ln \delta = \infty \Rightarrow$$

\Rightarrow несобственный интеграл расходится;

б) при $\alpha \neq 1$

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{dx}{x^\alpha} &= \lim_{\delta \rightarrow 0^+} \int_\delta^1 \frac{dx}{x^\alpha} = \\ &= \lim_{\delta \rightarrow 0^+} \frac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha} \Big|_\delta^1 = \frac{1}{1-\alpha} - \left(1 - \lim_{\delta \rightarrow 0^+} \delta^{1-\alpha} \right) = \\ &= \begin{cases} \frac{1}{1-\alpha} & \text{при } 0 < \alpha < 1, \\ \infty & \text{при } \alpha > 1. \end{cases} \end{aligned}$$

т.е. интеграл расходится при $\alpha \geq 1$ и сходится при $0 < \alpha < 1$.