Сабақтың тақырыбы.

Рационал теңдеулер мен рационал теңсіздіктер

Сабақтың мазмұны.

- Рационал теңдеулерді шешу.
- Рационал теңдеуді көбейткіштерге жіктеу әдісімен шешу.
- Жаңа айнымалы енгізу әдісімен шешу.
- Рационал теңсіздіктерді шешу.

Рационал теңдеулерді шешу.

- Егер P пен Q $\left(Q(x)\neq 0\right)$ көпмүшеліктер болса, онда $\frac{P(x)}{Q(x)}=0$ (1) түріндегі теңдеуді ***рационал теңдеу*** деп атайды. Теңдеуді шешу $P(x)$ теңдеуінің $Q(x)\neq 0$ шартын қанағаттандыратын түбірлерін табуға алып келеді

$$\frac{P(x)}{Q(x)}=0 \Leftrightarrow \begin{cases} P(x)=0 \\ Q(x)\neq 0 \end{cases} \qquad (2)$$

1-мысал. Теңдеуді шешу керек:

$$\frac{2x-3}{3x+5}=0$$

Шешуі: $$\frac{2x-3}{3x+5}=0 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x-3=0 \\ 3x+5\neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\frac{3}{2} \\ x\neq -\frac{5}{3} \end{cases}$$

Жауабы:

x=3/2

2-мысал. Теңдеуді шешу керек:

$$\frac{2}{2-x}+\frac{1}{2}=\frac{4}{x(2-x)}$$

Шешуі: Теңдеуді (1) түрге келтірейік:

$$\frac{2^{2x}}{2-x}+\frac{1^{x(2-x)}}{2}-\frac{4^{2}}{x(2-x)}=0\Leftrightarrow\frac{4x+x(2-x)-8}{2x(2-x)}=0\Leftrightarrow\frac{-x^{2}-6x-8}{2x(2-x)}=0$$

Бұл теңдеуді өзімен мәндес (2) түрдегі теңдеумен алмастырамыз:

$$\begin{cases} -x^2+6x-8=0 \\ x(2-x)\neq 0 \end{cases}$$

Квадрат теңдеудің түбірлері $x_1=2$ және $x_2=4$ Екінші шартты

$x_1=2$ қанағаттандырмайды,өйткені $2(2-2)\neq 0$ 0 $\neq 0$

Ал $x_2=4$ саны оны қанағаттандырады. $4(2-4)\neq 0$

-8 $\neq 0$

Жауабы: x=4

$f(x)=0$ теңдеуін көбейткіштерге жіктеу.

Көбейткіштерге жіктеу әдісі мынаған негізделген: $f(x)$ функциясы егер

$$f(x)=f_1(x)f_2(x).....f_n(x)$$

түріндегі көбейтінді болса, онда

$$f(x)=0 \quad (1)$$

Теңдеудің кез-келген шешімі

$$\left[\begin{array}{l} f_1(x)=0 \\ f_2(x)=0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots \\ f_n(x)=0 \end{array}\right. \qquad (2)$$

Теңдеулер жиынтығының да шешімі болады. Кері тұжырым, жалпы жағдайда дұрыс емес, яғни (2)

теңдеулер жиынтығының шешімдерінің әрбіреуі (1)

теңдеуінің шешімі болмауы мүмкін.

Мысалы.

$$\left[\begin{array}{l} \dfrac{x^2-3x+2}{x}=0 \\ \dfrac{x+2}{x^2-1}+2=0 \end{array}\right. \qquad (3)$$

Теңдеулер жиынтығының шешімдері $x_1=1$ $x_2=2$ $x_3=0$ $x_4=-1/2$

Бірақ x=1 x=0 мәндері $\dfrac{x^2-3x+2}{x}\cdot\left(\dfrac{x+2}{x^2-1}+2\right)=0$

Теңдеуінің түбірі бола алмайды

(1) теңдеуді көбейткіштерге жіктеу әдісімен шешкенде (2) теңдеулер жиынтығынан табылған түбірлердің тек (1) теңдеудің анықталу аймағында жататындығы ғана (1) теңдеудің де түбірлері болады.

1-мысал. Теңдеуді шешу керек: $x^3+2x^2+3x+6=0$

Шешуі: теңдеудің сол жағын көбейткіштерге жіктейміз.

$$x^2(x+2)+3(x+2)=0 \Leftrightarrow (x+2)(x^2-3)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x-2=0 \\ x^2+3=0 \end{array}\right.$$

Бірінші теңдеудің түбірі x=-2. Екінші теңдеудің түбірі жоқ.

Жауабы:-2

2-мысал. Теңдеуді шешу керек: $x^3 + 4x^2 - 24 = 0$

Шешуі: мұнда $4x^2 = -2x^2 + 6x^2$ деп алып теңдеудің сол жағын көбейткіштерге жіктеуге болар еді. Біз теңдеудің
бүтін түбірін табуға мүмкіндік беретін таңдау әдісін көрсетеміз. Бүтін түбірдің
бар болуының қажетті шартын пайдаланып, бос мүшенің бөлгіштерін жазып $\alpha = \pm1; \pm2; \pm3; \pm4; \pm6; \pm8; \pm12; \pm24.$ шығарамыз.

Енді іріктеуді бастаймыз. Берілген теңдеудегі х-тің орнына $\alpha = 1$ қоямыз: $1^3 + 4 * 1^2 - 24 \neq 0.$ Демек, x=1 теңдеудің түбірі емес, іріктеуді жалғастырамыз

$$\alpha = -1, (-1)^3 + 4(-1)^3 - 24 \neq 0; \quad \alpha = 2, 2^3 + 4 * 2^2 - 24 = 0$$

Бұдан $x_1 = 2$ теңдеудің түбірі болатынын көреміз.

Енді $x^3 + 4x^2 - 24$

көпмүшенің ‘x-2’-ге қалдықсыз бөлінетінін пайдаланамыз.

$$\begin{array}{r|l} x^3+4x^2-24 & x-2 \\ \cline{2-2} x^3-2x^2 & x^2+6x+12 \\ \cline{1-1} 6x^2 & \\ -6x^2-12x & \\ \hline 12x-24 & \\ -12x-24 & \\ \hline 0 & \end{array}$$

Сонымен $x^3+4x^2-24=(x-2)(x^2+6x+12)$ олай болса бастапқы теңдеу мына түрге ие болады:

$$(x-2)(x^2+6x+12)=0 \quad (5)$$

Одан әрі,

$$(x-2)(x^2+6x+12)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x-2=0 \\ x^2+6x+12=0 \end{array}\right.$$

Екінші теңдеудің түбірі жоқ $(D\langle 0)$ ал біріншіден x=2 аламыз.

Жауабы: x=2.

Теңдеуді жаңа айнымалы енгізу әдісімен шешу

1-мысал. Теңдеуді шешу керек:

$$3x^4 - 2x^3 + 4x^2 - 4x + 12 = 0$$

Шешуі: Бұл теңдеудің ерекшелігі- оның бірінші коэффицентінің бос мүшеге қатынасы,екінші коэффицентінің соңының алдындағы коэффицентке қатынасының квадратына тең $\frac{3}{12} = \left(\frac{-2}{-4}\right)^2$

Мұндай ерекшелігі бар теңдеуді *Қайтымды* деп айтады.

Симметриялы теңдеулер қайтымды теңдеулердің дербес түрі. Қайтымды теңдеулерді шешу әдісі симметриялы теңдеулерді шешу әдісіндей.

Теңдеудің екі жағын x^2 -қа бөлеміз:

$$3x^2 - 2x + 4 - \frac{4}{x} + \frac{12}{x^2} = 0 \Leftrightarrow 3\left(x^2 + \frac{4}{x^2}\right) - 2\left(x + \frac{2}{x} + 4 = 0\right) \qquad (6)$$

Енді $x + \frac{2}{x} = y$ деп алсақ $x^2 + \frac{4}{x^2} = y^2 - 4$ болады. Бұларды (6)-теңдеуге қоямыз.

$3(y^2 - 4) - 2y + 4 = 0$ немесе $3y^2 - 2y - 8 = 0$

Бұл теңдеудің түбірлері: $y_1 = 2$ және $y_2 = -4/37$

Сонымен берілген теңдеу келесі теңдеулер жиынтығына мәндес екен:

$$\left[\begin{array}{l} x + \dfrac{2}{x} = y \\ x + \dfrac{2}{x} = -\dfrac{4}{3} \end{array}\right.$$

Бұл теңдеулердің түбірі жоқ.

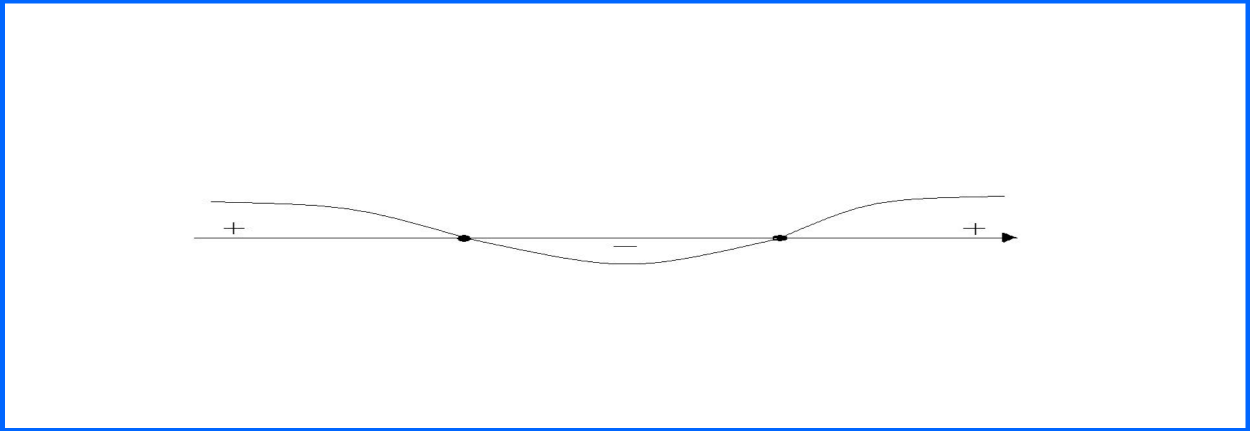
Жауабы: θ

Рационал теңсіздіктерді шешу.

1-мысал. Теңсіздікті шешу керек: $x^2 - 1 \le 0$

Шешуі: $x^2 - 1 = (x-1)(x+1)$ болғандықтан: $x^2 - 1 \le 0 \Leftrightarrow (x-1)(x+1) \le 0$

Мұндағы функцияның нөлдер $x_1 = -1 \quad x_2 = 1$ үзіліс нүтелері жоқ. Сан өсіне $x_1 = -1$ мен $x_2 = 1$ мәндерін боялған дөңгелекшелермен белгілейміз де жоғарыдағы схеманың 3п бойынша толқын тәрізді жүргіземіз.



Бұл суреттен теңсіздіктің шешімі $-1 \le x \le 1$ екенін көреміз.

Жауабы: $[-1 . +1]$

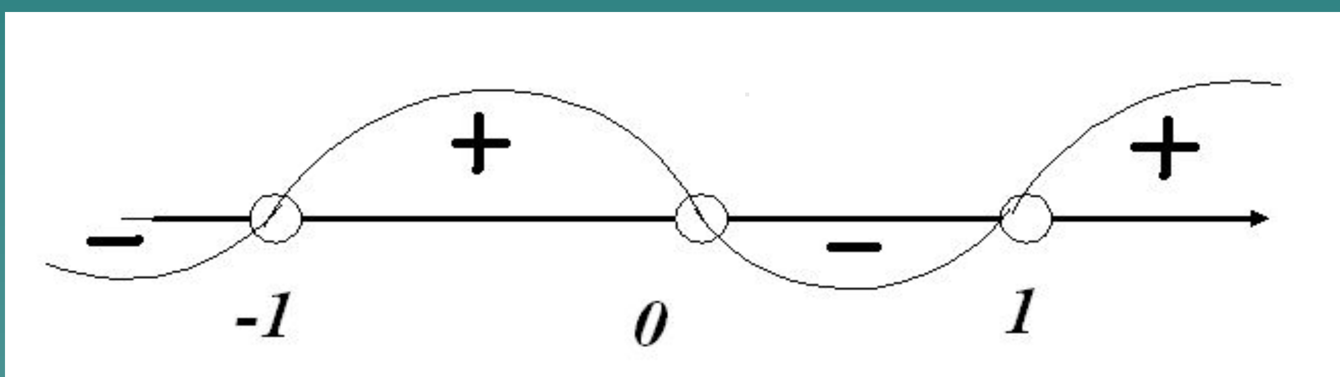
Рационал теңсіздіктер жүйелері мен жиынтықтарын шешу мысалдары

1-Мысал. Теңсіздіктер жүйесін шешу керек:

$$\begin{cases} \dfrac{x^2+x-1}{x} < 1 \\ x^2 < 64 \end{cases}$$

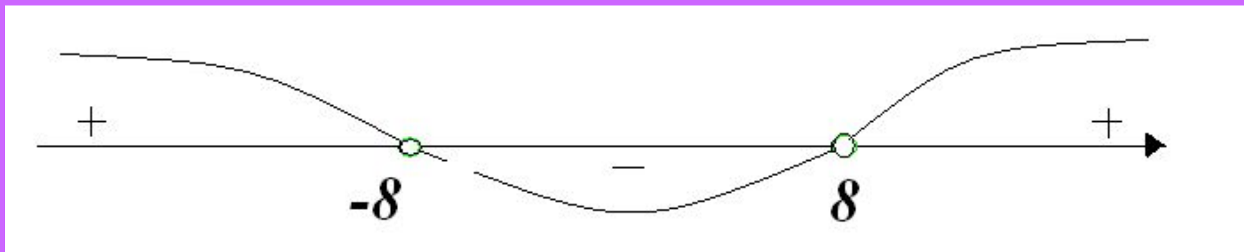
Шешуі: Теңсіздіктерді жеке-жеке шешеміз

$$\frac{x^2+x-1}{x} < 1 \Leftrightarrow \frac{x^2+x-1}{x} - 1 < 0 \Leftrightarrow \frac{x^2-1}{x} < 0 \Leftrightarrow \frac{(x-1)(x-1)}{x} < 0$$

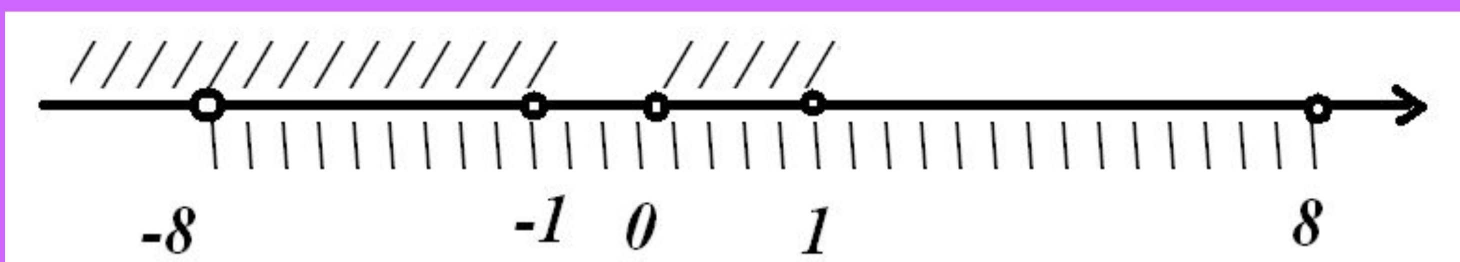


Сонымен, $\dfrac{x^2+x-1}{x} < 1$ теңсіздіктің шешімі: $(-\infty;-1) \cup (0;1)$

Екінші теңсіздікті шешеміз: $x^2 < 64$ теңсіздіктің шешімі (-8,8) болатыны
Бұдан көрінеді:



Екі теңсіздіктің шешімдерін сан өсіне сәйкес үстіне және астына штрихтап көрсетсек,теңсіздіктің шешімдерінің қиылысуын көруге болады:



Жауабы: $(-8;-1)\cup(0;1)$