


Сабақтың тақырыбы.

*Рационал теңдеулер
мен рационал
теңсіздіктер*



Сабақтың мазмұны.

- ◆ Рационал теңдеулерді шешу.
- ◆ Рационал теңдеуді көбейткіштерге жіктеу әдісімен шешу.
- ◆ Жаңа айнымалы енгізу әдісімен шешу.
- ◆ Рационал теңсіздіктерді шешу.

Рационал теңдеулерді шешу.

- ◆ Егер P пен Q ($Q(x) \neq 0$) көпмүшеліктер болса, онда $\frac{P(x)}{Q(x)} = 0$ (1) түріндегі теңдеуді **рационал теңдеу** деп атайды. Теңдеуді шешу $P(x)$ теңдеуінің $Q(x) \neq 0$ шартын қанағаттандыратын түбірлерін табуға алып келеді

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} P(x) = 0 \\ Q(x) \neq 0 \end{cases} \quad (2)$$

1-мысал. Теңдеуді шешу керек:

$$\frac{2x - 3}{3x + 5} = 0$$

Шешуі: $\frac{2x - 3}{3x + 5} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - 3 = 0 \\ 3x + 5 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{3}{2} \\ x \neq -\frac{5}{3} \end{cases}$

Жауабы:

$$x = \frac{3}{2}$$

2-мысал. Теңдеуді шешу керек:

$$\frac{2}{2-x} + \frac{1}{2} = \frac{4}{x(2-x)}$$

Шешуі: Теңдеуді (1) түрге келтірейік:

$$\frac{2^{2x}}{2-x} + \frac{1^{x(2-x)}}{2} - \frac{4^2}{x(2-x)} = 0 \Leftrightarrow \frac{4x + x(2-x) - 8}{2x(2-x)} = 0 \Leftrightarrow \frac{-x^2 - 6x - 8}{2x(2-x)} = 0$$

Бұл теңдеуді өзімен мәндес (2) түрдегі теңдеумен алмастырамыз:

$$\begin{cases} -x^2 + 6x - 8 = 0 \\ x(2 - x) \neq 0 \end{cases}$$

Квадрат теңдеудің түбірлері $x_1 = 2$ және $x_2 = 4$ Екінші шартты

$x_1 = 2$ қанағаттандырмайды, өйткені $2(2 - 2) \neq 0$ $0 \neq 0$

Ал $x_2 = 4$ саны оны қанағаттандырады. $4(2 - 4) \neq 0$

$$-8 \neq 0$$

Жауабы:
 $x=4$

$f(x) = 0$ теңдеуін көбейткіштерге жіктеу.

Көбейткіштерге жіктеу әдісі мынаған негізделген:

егер

$f(x)$ функциясы

$f(x) = f_1(x)f_2(x)\dots f_n(x)$ түріндегі көбейтінді болса,
онда

$$f(x) = 0 \quad (1)$$

Теңдеудің кез-келген
шешімі

$$\begin{cases} f_1(x) = 0 \\ f_2(x) = 0 \\ \dots\dots\dots \\ f_n(x) = 0 \end{cases} \quad (2)$$

Теңдеулер жиынтығының да шешімі болады. Кері тұжырым, жалпы жағдайда дұрыс емес, яғни(2)

теңдеулер жиынтығының шешімдерінің әрбіреуі(1)

теңдеуінің шешімі болмауы мүмкін.

Мысалы.

$$\begin{cases} \frac{x^2 - 3x + 2}{x} = 0 \\ \frac{x + 2}{x^2 - 1} + 2 = 0 \end{cases} \quad (3)$$

Теңдеулер жиынтығының шешімдері

$$x_1 = 1 \quad x_2 = 2 \quad x_3 = 0 \quad x_4 = -1/2$$

Бірақ $x=1$ $x=0$ мәндері

$$\frac{x^2 - 3x + 2}{x} \cdot \left(\frac{x + 2}{x^2 - 1} + 2 \right) = 0$$

Теңдеуінің түбірі бола алмайды

(1) теңдеуді көбейткіштерге жіктеу әдісімен шешкенде

(2)

теңдеулер жиынтығынан табылған түбірлердің тек (1)

теңдеудің анықталу аймағында жататындығы ғана (1)

теңдеудің де түбірлері болады.

1-мысал. Теңдеуді шешу керек: $x^3 + 2x^2 + 3x + 6 = 0$

Шешуі: теңдеудің сол жағын көбейткіштерге жіктейміз.

$$x^2(x+2) + 3(x+2) = 0 \Leftrightarrow (x+2)(x^2 - 3) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x - 2 = 0 \\ x^2 + 3 = 0 \end{cases}$$

Бірінші теңдеудің түбірі $x = -2$. Екінші теңдеудің түбірі жоқ.

Жауабы: -2

2-мысал. Теңдеуді шешу керек: $x^3 + 4x^2 - 24 = 0$

Шешуі: мұнда $4x^2 = -2x + 6x$ деп алып теңдеудің сол жағын көбейткіштерге жіктеуге болар еді. Біз теңдеудің

бүтін түбірін табуға мүмкіндік беретін таңдау әдісін көрсетеміз. Бүтін түбірдің

бар болуының қажетті шартын пайдаланып, бос мүшенің бөлгіштерін жазып $\alpha = \pm 1; \pm 2; \pm 3; \pm 4; \pm 6; \pm 8; \pm 12; \pm 24$.

Енді іріктеуді бастаймыз. Берілген теңдеудегі x -тің $\alpha = 1$ шығарамыз.

орнына қоямыз: $1^3 + 4 * 1^2 - 24 \neq 0$. Демек, $x=1$ теңдеудің түбірі емес, іріктеуді жалғастырамыз

$$\alpha = -1, (-1)^3 + 4(-1)^3 - 24 \neq 0; \quad \alpha = 2, 2^3 + 4 * 2^2 - 24 = 0$$

Бұдан $x_1 = 2$ теңдеудің түбірі болатынын көреміз.

Енді $x^3 + 4x^2 - 24$

көпмүшенің 'x-2'-ге қалдықсыз бөлінетінін пайдаланамыз.

$$\begin{array}{r|l}
 x^3 + 4x^2 - 24 & x - 2 \\
 \hline
 x^3 - 2x^2 & x^2 + 6x + 12 \\
 \hline
 6x^2 & \\
 \\
 -6x^2 - 12x & \\
 \hline
 12x - 24 & \\
 -12x - 24 & \\
 \hline
 0 &
 \end{array}$$

Сонымен $x^3 + 4x^2 - 24 = (x - 2)(x^2 + 6x + 12)$ олай болса бастапқы теңдеу мына түрге ие болады:

$$(x - 2)(x^2 + 6x + 12) = 0 \quad (5) \quad \text{Одан әрі,}$$

$$(x - 2)(x^2 + 6x + 12) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x - 2 = 0 \\ x^2 + 6x + 12 = 0 \end{cases}$$

Екінші теңдеудің түбірі жоқ ($D < 0$) ал біріншіден $x = 2$ аламыз.

Жауабы: $x = 2$.

Теңдеуді жаңа айнымалы енгізу әдісімен шешу

1-мысал. Теңдеуді шешу

керек:

$$3x^4 - 2x^3 + 4x^2 - 4x + 12 = 0$$

Шешуі: Бұл теңдеудің ерекшелігі- оның бірінші коэффициентінің бос мүшеге қатынасы, екінші коэффициентінің соңының алдындағы коэффициентке қатынасының квадратына тең

$$\frac{3}{12} = \left(\frac{-2}{-4}\right)^2$$

Мұндай ерекшелігі бар теңдеуді

Қайтымды деп айтады.

Симметриялы теңдеулер қайтымды теңдеулердің дербес түрі. Қайтымды теңдеулерді шешу әдісі симметриялы теңдеулерді шешу әдісіндей.

Теңдеудің екі жағын x^2 -қа

бөлеміз:

$$3x^2 - 2x + 4 - \frac{4}{x} + \frac{12}{x^2} = 0 \Leftrightarrow 3\left(x^2 + \frac{4}{x^2}\right) - 2\left(x + \frac{2}{x} + 4 = 0\right) \quad (6)$$

Енді $x + \frac{2}{x} = y$

деп
алсақ

$$x^2 + \frac{4}{x^2} = y^2 - 4 \quad \text{болады.}$$

Бұларды

(6) -теңдеуге
қоямыз.

$$3(y^2 - 4) - 2y + 4 = 0$$

немесе

$$3y^2 - 2y - 8 = 0$$

Бұл теңдеудің
түбірлері:

$$y_1 = 2 \quad \text{және} \quad y_2 = -4/37$$

Сонымен берілген теңдеу келесі теңдеулер жиынтығына мәндес
екен:

$$\begin{cases} x + \frac{2}{x} = y \\ x + \frac{2}{x} = -\frac{4}{3} \end{cases}$$

Бұл теңдеулердің түбірі жоқ.

Жауаб

ы:

\emptyset

Рационал теңсіздіктерді шешу.

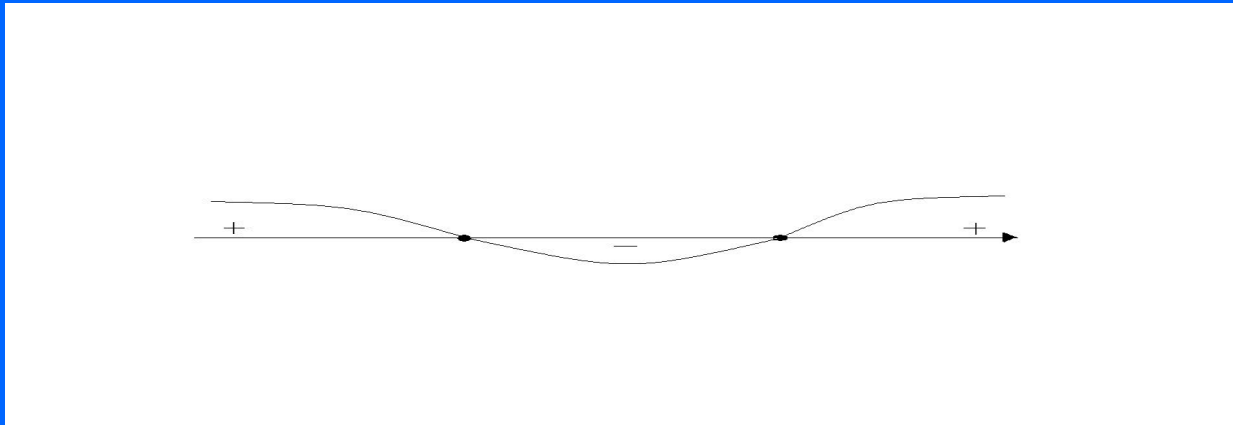
1-мысал. Теңсіздікті шешу керек:

$$x^2 - 1 \leq 0$$

Шешуі: $x^2 - 1 = (x - 1)(x + 1)$ болғандықтан: $x^2 - 1 \leq 0 \Leftrightarrow (x - 1)(x + 1) \leq 0$

Мұндағы функцияның нөлдер $x_1 = -1$ $x_2 = 1$ үзіліс нүктелері жоқ. Сан өсіне

$x_1 = -1$ мен $x_2 = 1$ мәндерін боялған дөңгелекшелермен белгілейміз де жоғарыдағы схеманың 3п бойынша толқын тәрізді жүргіземіз.



Бұл суреттен теңсіздіктің шешімі

$-1 \leq x \leq 1$ екенін көреміз.

Жауабы: $[-1, +1]$

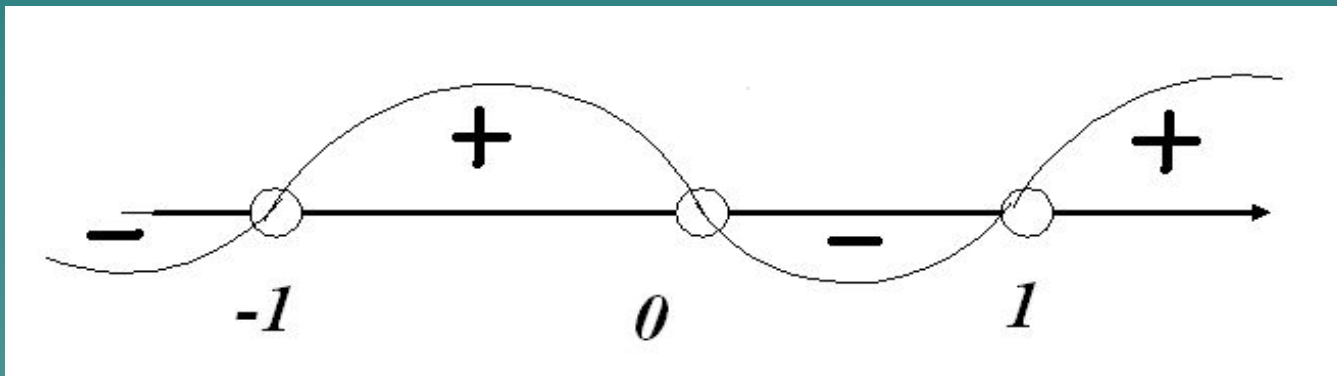
Рационал теңсіздіктер жүйелері мен жиынтықтарын шешу мысалдары

1-Мысал. Теңсіздіктер жүйесін шешу керек:

$$\begin{cases} \frac{x^2 + x - 1}{x} \geq 1 \\ x^2 \leq 64 \end{cases}$$

Шешуі: Теңсіздіктерді жеке-жеке шешеміз

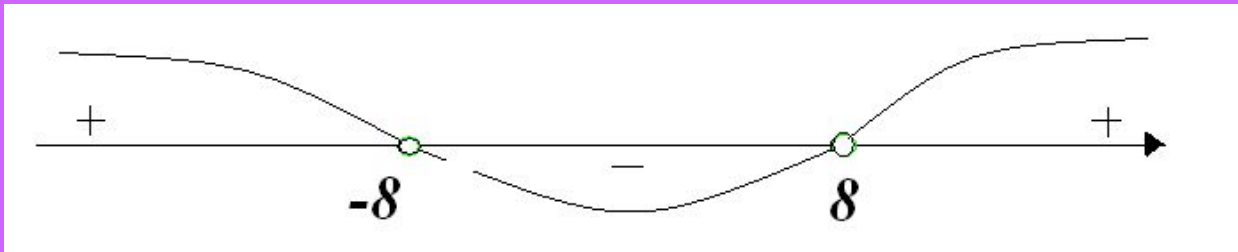
$$\frac{x^2 + x - 1}{x} \geq 1 \Leftrightarrow \frac{x^2 + x - 1}{x} - 1 \geq 0 \Leftrightarrow \frac{x^2 - 1}{x} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{(x-1)(x+1)}{x} \geq 0$$



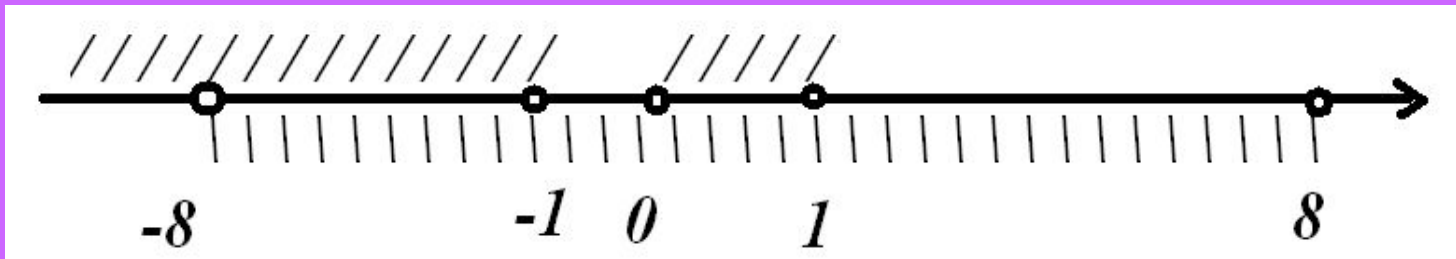
Соныме
н, $\frac{x^2 + x - 1}{x} \geq 1$ теңсіздіктің
шешімі: $(-\infty; -1) \cup (0; 1)$

Екінші теңсіздікті шешеміз:
Бұдан

$x^2 \leq 64$ теңсіздіктің шешімі $(-8,8)$ болатыны
көрінеді:



Екі теңсіздіктің шешімдерін сан өсіне сәйкес үстіне және астына
штрихтап көрсетсек, теңсіздіктің шешімдерінің қиылысуын көруге
болады:



Жауабы

$(-8; -1) \cup (0; 1)$