

Уравнения и методы их решения

- Над проектом работали:
- Маслов Андрей
- Мулярчук Екатерина
- Фадеенко Виктор
- МКОУ СОШ с Красное 2014

Показательные уравнения

Опред.: Уравнение вида $a^x=b$,
называется показательным

Методы решения:

- Приведение к одному основанию
- Разложение левой части уравнения на множители (выносим степень с наименьшим показателем)
- Замена переменной, приведение к квадратному (подстановка)
- Деление левой и правой частей уравнения на степень

Приведение к одному основанию:

$$2^{3x} \cdot 3^x = 576$$

$$(2^3)^x \cdot 3^x = 576$$

$$8^x \cdot 3^x = 576$$

$$24^x = 24^2 \Rightarrow x = 2$$

Разложение левой части уравнения на множители:

$$3^{x+1} - 2 \cdot 3^{x-2} = 25$$

$$3^{x-2}(3^3 - 2) = 25$$

$$3^{x-2} \cdot 25 = 25 \quad | :25$$

$$3^{x-2} = 1$$

$$3^{x-2} = 3^0 \Rightarrow x-2=0$$

$$x=2$$

Замена переменной, приведение к квадратному:

$$9^x - 4 \cdot 3^x - 45 = 0$$

$$3^{2x} - 4 \cdot 3^x - 45 = 0$$

$$3^x = t \Rightarrow t^2 - 4t - 45 = 0$$

$$t_1 + t_2 = 4 \quad t_1 = 9$$

$$t_1 + t_2 = 45 \quad t_2 = -5 \text{ п.к.}$$

$$3^x = 9$$

$$3^x = 3^2 \Rightarrow x = 2$$

Деление левой и правой частей уравнения на степень:

$$3^x = 5^{2x}$$

$$3^x = 25^x \quad | \div 3^x$$

$$1 = \left(\frac{25}{3} \right)^x$$

$$\left(\frac{25}{3} \right)^0 = \left(\frac{25}{3} \right)^x \Rightarrow x=0$$

Примеры для самопроверки:

$$\left(\frac{1}{27}\right)^{0,5x-1} = 9;$$

$$7 \cdot 5^x - 5^{x+1} = 2 \cdot 5^{-3};$$

$$2^{x^2} + 14 \cdot 2^{x+1} - 29 = 0;$$

$$7^{x+6} \cdot 3^{x+6} = 7^{3x} \cdot 3^{3x}$$

Типовые задания ЕГЭ:

1. Решить уравнение:

$$5^x = 125;$$

2. Решить уравнение:

$$\left(\frac{1}{32}\right)^{0,1x-1} = 16;$$

3. Указать промежуток, которому принадлежит корень уравнения:

$$3^{x^2+x-12} = 1;$$

4. Решить уравнение:

$$3^{x+1} - 2 \cdot 3^{x-2} = 25;$$

5. Решить уравнение:

$$3^{2x} - 4 \cdot 3^x - 45 = 0;$$

6. Решить уравнение:

$$3^{2x-1} - 2^{2x-1} = 0;$$

7. Решить уравнение:

$$3^{2x+5} - 2^{2x+7} + 3^{2x+4} - 2^{2x+4} = 0;$$

8. Найти промежуток, которому принадлежат все решения уравнения:

$$3 \cdot 16^x + 2 \cdot 81^x = 5 \cdot 36^x;$$

9. Указать промежуток, которому принадлежит корень уравнения:

$$5^{2x} - 4 \cdot 5^x - 5 = 0;$$

10. Решить уравнение:

$$3^{\sin^2 x} + 3^{\cos^2 x} = 4$$

В4. Найти модуль разности корней:

$$4^{x-\sqrt{x^2-5}} - 12 \cdot 2^{x-1-\sqrt{x^2-5}} + 8 = 0;$$

В5. Решить уравнение:

$$2^{3x-1} \cdot 5^{3x-1} = 100;$$

В6. Решить уравнение:

$$\sqrt{3 \cdot 2^x - 4^x - 2} = 1 - 2^x;$$

В7. Решить уравнение:

$$32^{x+3} \cdot 3^{3x+1} \cdot 625^{x+2} = 600^{x+7};$$

Тригонометрические уравнения

I) Уравнения $\text{Cos}x=a$, $a \in [-1; 1]$

a) $\text{Cos}x=a$, $a \in (0; 1)$

$$x = \pm \arccos a + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$$

б) $\text{Cos}x=a$, $a \in (-1; 0)$

$$x = \pm (\pi - \arccos a) + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$$

$$\text{Cos}x=0$$

$$x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$$

$$\text{Cos}x=-1$$

$$x = \pi + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$$

$$\text{Cos}x=1$$

$$x = 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$$

Например.

$$\cos x = \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \in (0; 1)$$

$$x = \pm \arccos \frac{1}{2} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$$

$$x = \pm \frac{\pi}{3} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$$

$$\cos x = -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \in (-1; 0)$$

$$x = \pm \left(\pi - \arccos \frac{1}{2} \right) + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$$

$$x = \pm \left(\pi - \frac{\pi}{3} \right) + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$$

$$x = \pm \frac{2\pi}{3} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$$

II) Уравнения $\sin x = a$, $a \in [-1; 1]$

$$\sin x = a, a \in (0; 1)$$

$$x = (-1)^n \arcsin a + \pi n, n \in \mathbb{Z}$$

$$\sin x = a, a \in (-1; 0)$$

$$x = (-1)^{n+1} \arcsin a + \pi n, n \in \mathbb{Z}$$

$$\sin x = 0$$

$$x = \pi n, n \in \mathbb{Z}$$

$$\sin x = 1$$

$$x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$$

$$\sin x = -1$$

$$x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$$

Например.

$$\sin x = \frac{1}{2}, \quad \frac{1}{2} \in (0; 1)$$

$$x = (-1)^n \arcsin \frac{1}{2} + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}$$

$$x = (-1)^n \frac{\pi}{6} + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}$$

$$\sin x = -\frac{1}{2}, \quad -\frac{1}{2} \in (-1; 0)$$

$$x = (-1)^{n+1} \arcsin \frac{1}{2} + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}$$

$$x = (-1)^{n+1} \frac{\pi}{6} + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}$$

III) Уравнения $\operatorname{tg}x=a$, $a \in \mathbb{R}$

$$\operatorname{tg}x=a, a \geq 0$$

$$x=\operatorname{arctg}a + \pi n, n \in \mathbb{Z}$$

$$\operatorname{tg}x=-a, a < 0$$

$$x=-\operatorname{arctg}a + \pi n, n \in \mathbb{Z}$$

Например.

$$\operatorname{tg}x = \sqrt{3}, \quad \sqrt{3} \in [0; \infty)$$

$$x = \operatorname{arctg} \sqrt{3} + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}$$

$$x = \frac{\pi}{3} + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}$$

$$\operatorname{tg}x = -\sqrt{3}, \quad -\sqrt{3} \in (-\infty; 0)$$

$$x = -\operatorname{arctg} \sqrt{3} + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}$$

$$x = -\frac{\pi}{3} + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}$$

Методы решения тригонометрических уравнений.

1) Уравнения, сводящиеся к квадратным

a) $\sin^2 x + \sin x - 2 = 0$

$$\sin x = t, \quad t \in [-1; 1]$$

$$t^2 + t - 2 = 0$$

$$t_1 = 1, \quad t_2 = -2 \text{ - п.к так}$$

$$\text{как } -2 \notin [-1; 1]$$

$$\sin x = 1,$$

$$x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}$$

2. разложение левой части на множители

$$\cos x = \cos 3x$$

$$\cos x - \cos 3x = 0$$

$$-2\sin 2x \sin(-x) = 0$$

$$\sin 2x = 0$$

или

$$\sin x = 0$$

$$2x = \pi n, n \in \mathbb{Z}$$

$$x = \pi n, n \in \mathbb{Z}$$

$$x = \frac{\pi n}{2}, n \in \mathbb{Z}$$

3. однородное уравнение 1-ой степени $a\sin x + b\cos x = 0$

Решается делением на $\cos x \neq 0$

$$\frac{a\sin x}{\cos x} + \frac{b\cos x}{\cos x} = 0$$

$$a\operatorname{tg}x + b = 0$$

$$x = -\operatorname{arctg} \frac{b}{a} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$$

$$\sin x + \cos x = 0 \quad | : \cos x \neq 0$$

$$\operatorname{tg}x + 1 = 0$$

$$\operatorname{tg}x = -1$$

$$x = -\operatorname{arctg} 1 + \pi n, n \in \mathbb{Z}$$

$$x = -\frac{\pi}{4} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$$

4. однородное уравнение 2-ой степени $a\sin 2x + b\sin x \cos x + c\cos^2 x = 0$

$$a\sin^2 x + b\sin x \cos x + c\cos^2 x = 0 \quad | : \cos^2 x \neq 0$$

$$atg^2 x + btgx + c = 0$$

$$tgx = t, \quad at^2 + bt + c = 0$$

$$D = b^2 - 4ac$$

$$t_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$tgx = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x_1 = \arctg\left(\frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}\right) + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}$$

$$x_2 = \arctg\left(\frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}\right) + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}$$

$$3\sin^2 x - 7\sin x \cos x + 2\cos^2 x = 0 \quad | : \cos^2 x \neq 0$$

$$3tg^2 x - 7tgx + 2 = 0$$

$$tgx = t, \quad 3t^2 - 7t + 2 = 0$$

$$D = b^2 - 4ac = 25, \quad D > 0 \Rightarrow 2 \text{ д. к}$$

$$t_{1,2} = \frac{7 \pm 5}{6}$$

$$tgx = 2$$

$$x = \arctg 2 + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}$$

$$tgx = \frac{1}{3}$$

$$x = \arctg \frac{1}{3} + \pi k, \quad k \in \mathbb{Z}$$

5. Уравнение вида $a\sin x + b\cos x = c$

$$a\sin x + b\cos x = c$$

$$\sqrt{a^2 + b^2}$$

$$\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \sin x + \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \cos x = \frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

$$\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \cos \varphi, \quad \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \sin \varphi$$

$$\cos \varphi \sin x + \sin \varphi \cos x = \frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

$$\sin(\varphi + x) = \frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

$$x = (-1)^n \arcsin \frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2}} - \varphi + \pi n, n \in \mathbb{Z}$$

$$\sin x - \cos x = 1$$

$$\sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$$

$$\frac{\sqrt{2}}{2} \sin x - \frac{\sqrt{2}}{2} \cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$x - \frac{\pi}{4} = (-1)^n \frac{\pi}{4} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$$

$$x = (-1)^n \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$$

Уравнения для самостоятельной работы!

Базовый уровень

- $\sin x = \frac{\sqrt{2}}{2}$

- $\cos x = -\frac{1}{2}$

- $\operatorname{tg} x = \sqrt{3}$

- $1 + \sin\left(\frac{\pi x}{3}\right) = 0$

- $\sin^2 x = \frac{1}{2}$

- $\sin x + \cos x = 0$

- $2\cos\left(2x - \frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$

- $\sin(x - \sqrt{3}) = 0$

$$\sqrt{3}\cos x + 1 = 0$$

$$\sqrt{3}\operatorname{tg} x - 1 = 0$$

Повышенный уровень

- $2\sin^2x + 3\sin x \cos x - 2\cos^2x = 0$

$$\frac{\sin 3x}{\sin x} = 0$$

- $3\sin x + 4\cos x = 10$

- $\sin x - \sin 2x + \sin 3x - \sin 4x = 0$

- $\sin x - \sin 2x + \sin 3x - \sin 4x = 0$

- $\cos x + \cos \frac{x}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

- $\sin 3x - \sin 9x = 0$

- $\operatorname{tg}(3x + 60^\circ) = \sqrt{3}$

- $\operatorname{ctg}\left(\frac{x}{4} - 1\right) \sin\left(\frac{x}{2} - 1\right) \operatorname{ctg} x = 0$

- $4\sin \frac{x}{4} - \cos \frac{x}{4} = \sqrt{3}$

- $\sin x - \cos x = 4\sin x \cos 2x$

Трудные задания

• $\cos^2 x + \cos^2 2x + \cos^2 3x + \cos^2 4x = 2$

• $(\cos 6x - 1) \operatorname{ctg} 3x = \sin 3x$

• $\cos\left(x + \frac{41\pi}{4}\right) + \sin 2x = -2$

• $\cos^2 x + \frac{1}{2} |\cos x| \sin x = 0$

• $\cos^2 x + \sin^2 2x + \cos^2 3x = \frac{3}{2}$

$\sqrt{9x - 8 - x^2} (\cos 2x + 3\sqrt{3} \sin x - 4) = 0$

$$\frac{\sin x - \frac{1}{2}}{\cos x - \frac{\sqrt{3}}{2}} = 0$$

$$\cos x + \cos 16x \sin x = \sqrt{2}$$

$$\log_{\sin x} (\sqrt{3} \cos x + 2 \sin x) = 1$$

$$\sqrt{8 + 8 \sin x - 10 \cos x} - 1 = 4 \sin x$$

$$2 + \operatorname{tg} x \operatorname{ctg} \frac{x}{2} + \operatorname{ctg} x \operatorname{tg} \frac{x}{2} = 0$$

$$\operatorname{tg} x \sin 2x \sin 3x = \sin x \cos 2x$$

Трудные задания

найти все решения уравнения $\cos x - \cos 3x + 2\sqrt{1 - \cos^2 x} = 0$

удовлетворяющие условию: $|x + \frac{\pi}{4}| \leq \frac{\pi}{2}$

$$\sqrt{1 + 6\sin x - 2\cos 2x} + 2\cos x = 0$$

найти все решения уравнения $\sin x + \sin 3x + \sqrt{1 - \cos^2 x} = 0$,

удовлетворяющие условию $|x| \leq \frac{\pi}{2}$

$$\sqrt{(\sin 3x - 2)^2} - \sqrt{9\sin^2 3x - 24\sin 3x + 16} = -4$$

$$\sqrt{\sin^2 0,5x - 6\sin 0,5x + 9} + \sqrt{(2\sin 0,5x - 5)^2} = 8$$

Уравнение с модулем

Определение:

$$a \geq 0, |a| = a$$

$$a < 0, |a| = -a$$

Методы решений.

- По определению модуля:

$$|x+1|=3$$

$$\begin{cases} x + 1 \geq 0 \\ x + 1 = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \geq -1 \\ x = 2 \end{cases}$$

$$\text{И } \begin{cases} x + 1 < 0 \\ -(x + 1) = -3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x < -1 \\ x + 1 = -3 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x < -1 \\ x = -4 \end{cases} \Rightarrow x = -4$$

МЕТОД ИНТЕРВАЛОВ:

$$|x+1| + |x-1| + |x+10|=12$$

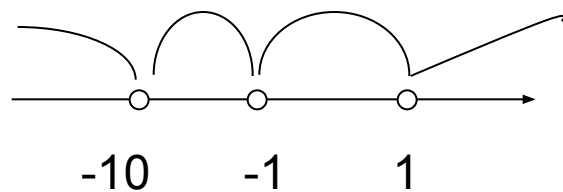
1. найдём корни подмодульных выражений:

$$x=-1$$

$$x=1$$

$$x=-10$$

2. нанесём корни на числовую ось



МЕТОД ИНТЕРВАЛОВ:

$$3. \begin{cases} x \leq -10 \\ -x - 1 - x + 1 - x - 10 = 12 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \leq -10 \\ -3x = 22 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \leq -10 \\ x = -7\frac{1}{3} \end{cases}$$

$x = -7\frac{1}{3}$ посторонний корень

$$\begin{cases} -10 < x \leq -1 \\ -x - 1 - x + 1 + x + 10 = 12 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -10 < x \leq -1 \\ -x = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -10 < x \leq -1 \\ x = -2 \text{ корень} \end{cases}$$

$$\begin{cases} -1 < x \leq 1 \\ x + 1 - x + 1 + x + 10 = 12 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -1 < x \leq 1 \\ x = 0 - \text{корень} \end{cases}$$

МЕТОД ИНТЕРВАЛОВ:

$$\begin{cases} x > 1 \\ x + 1 + x - 1 + x + 10 = 12 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x > 1 \\ 3x = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x > 1 \\ x = \frac{2}{3} \end{cases} \Rightarrow$$

$x = \frac{2}{3}$ – посторонний корень

Ответ: $x_1 = -2$ $x_2 = 0$

Базовый уровень

$$1. |x+3|=12$$

$$2. x+5=|x|$$

$$3. |x-15|=25x$$

$$4. |2x|=100$$

$$5. |x-40|=80$$

$$6. |x|=5$$

$$7. |x|=3x+10$$

$$8. |3x-9|=1$$

Повышенный уровень

$$1. \left| \frac{x}{4} - \frac{5}{2} \right| = \frac{x}{2} - 5$$

$$2. |x^2 - 5x + 6| = x + 1$$

$$3. |x - 3| + 2|x + 1| = 4$$

$$4. |5 - 2x| + |x + 3| = 2 - 3x$$

$$5. \frac{5}{3 - |x - 1|} = |x| + 2$$

$$6. x|x| + 7x + 12 = 0$$

$$7. x^2 - 5x - \frac{6|x|}{x} = 0$$

$$8. x^2 - |3x - 5| = 5|x|$$

$$9. |x + 5| = |2x - 3 - x^2|$$

$$10. 3|2x^2 + 4x + 1| = |x^2 + 5x + 1|$$

$$11. |2x - y - 3| + |x + 5y - 7| = 0$$

Логарифмические уравнения

- *При решении логарифмических уравнений применяют, такие преобразования, которые не приводят к потере корней, но могут привести к приобретению посторонних корней. Поэтому проверка каждого из полученных корней путем подстановок и их в исходное уравнение обязательно, если нет уверенности в равносильности уравнений. Проверку найденных корней можно заменить нахождением области определения уравнений. Тогда корнями уравнения, будут те числа, которые принадлежат этой области.*

Методы
решения
логарифмических
уравнений.

**1)Решение
логарифмических
уравнений
на основании определения
логарифма.**

$$\log_3 (2x+1)=2$$

$$2x+1=3^2$$

$$2x+1=9$$

$$x=4$$

Проверка $\log_3 (2 \times 4 + 1) = \log_3 9 = 2$

Ответ: $x=4$

2) Метод приведения логарифмических уравнений к квадратному.

$$\text{ОДЗ: } \begin{cases} x+1 > 0 \\ x+1 \neq 1 \\ 2x^2+1 > 0 \end{cases} = \begin{cases} x > -1 \\ x \neq 0 \\ x \in R \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x > -1 \\ x \neq 0 \end{cases} \quad X \in (-1; 0) \cup (0; \infty)$$

По определению логарифма

$$(x+1)^2 = 2x^2 + 1$$

$$x^2 + 2x + 1 = 2x^2 + 1$$

$$x^2 - 2x = 0$$

$$x_1 = 0 \quad x_2 = 2$$

\notin ОДЗ

Ответ: $x=2$

3) Метод потенцирования

$$\log_5 x = \log_5 (6 - x^2)$$

$$\text{ОДЗ } \begin{cases} x > 0 \\ 6 - x^2 > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x > 0 \\ x^2 < 6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x > 0 \\ -\sqrt{6} < x < \sqrt{6} \end{cases} \Rightarrow 0 < x < \sqrt{6}$$

Применяя метод потенцирования,
получили

$$x = 6 - x^2$$

$$x^2 + x - 6 = 0$$

$$x_1 = 2, \quad x_2 = -3 \text{ — п.к}$$

Ответ: $x = 2$

4) Метод приведения логарифмов к одному основанию.

Используя формулу

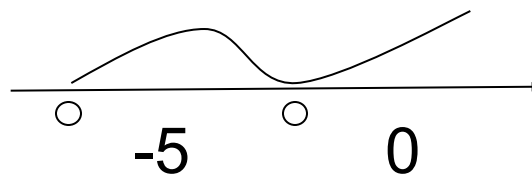
$$\log_a f(x)^{2n} = 2n \times \log_a f(x)$$

Где $a > 0, a \neq 1, n \in \mathbb{Z}$.

$$\log_{(f(x))} 2n = 2n | \log_a |f(x)|, \quad \text{где } a > 0, \quad a \neq 1, n \in \mathbb{Z}.$$

$$\log_6(x+5) + \frac{1}{2n} \log_6 x = 1$$

$$\text{ОДЗ} \quad \begin{cases} x+5 > 0 \\ x \neq 0 \end{cases}$$



$$\log_6(x+5) + \log_6(x) = 1$$

$$\log_6(x+5) \times x = 1$$

$$x^2 + 5x - 6 = 0$$

$$x_1 + x_2 = -5 \quad x_1 = 1$$

$$x_1 \times x_2 = -6 \quad x_2 = -6 \notin \text{ОДЗ}$$

5) Метод логарифмирования

$$\text{ОДЗ: } \begin{cases} 3x > 0, 3x \neq 1 \\ x \neq 0 \end{cases} = > \begin{cases} x > 0, x \neq \frac{1}{3} \\ x \neq 0 \end{cases} = > x \notin \left(0; \frac{1}{3}\right) \cup \left(\frac{1}{3}; \infty\right)$$

$$\log_{3x} 3 = \frac{\log_3 3}{\log_3 3x} = \frac{1}{1 + \log_3 x}$$

$$\log_{x^2} 3 = \frac{\log_3 3}{\log_3 x^2} = \frac{1}{2 \log_3 x}$$

$$\frac{1}{1 + \log_3 x} = \frac{1}{2 \log_3 x}$$

$$1 + \log_3 x \neq 0, \quad 2 \log_3 x \neq 0$$

$$2 \log_3 x = 1 + \log_3 x$$

$$\log_3 x = 1$$

$$x = 3 \in \text{ОДЗ}$$

Решить уравнение показательные по образцу.

$$1) \log_{x+1}(x^2 + x - 6)^2 = 4$$

$$\text{ОДЗ} \begin{cases} (x^2 + x - 6)^2 > 0 \\ x + 1 > 0 \\ x + 1 \neq 1 \end{cases}$$

$$(x + 1)^4 = (x^2 + x - 6)^2$$

$$(x^2 + 2x + 1)^2 = (x^2 + x - 6)^2$$

$$\begin{cases} x^2 + 2x + 1 = x^2 + x - 6 \\ x^2 + 2x + 1 = -x^2 - x - 6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -7 \notin \text{ОДЗ}; \\ x = 1 \in \text{ОДЗ} \\ x = -2,5 \notin \text{ОДЗ} \end{cases}$$

Ответ: $X = 1$

$$\log_{9x^2}(6 + 2x - x^2) = \frac{1}{2}$$

$$\text{ОДЗ:} \begin{cases} 6 + 2x - x^2 > 0 \\ 9x^2 \neq 1 \\ x \neq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2 - 2x - 6 < 0 \text{ р.м.п.} \\ x \neq \pm \frac{1}{3} \\ x \neq 0 \end{cases}$$

$$x^2 - 2x - 6 < 0 \text{ р.м.п}$$

$$y = x^2 - 2x - 6 \text{ ветви вверх}$$

$$y=0 \Rightarrow x^2 - 2x - 6 = 0$$

$$D = 4 + 24 = 28$$

$$x_{1;2} = \frac{2 \pm 2\sqrt{7}}{2} = 1 \pm \sqrt{7}$$

$$x \in (1 - \sqrt{7}; \frac{1}{3}) \cup (\frac{1}{3}; 0) \cup (0; \frac{1}{3}) \cup (\frac{1}{3}; 1 + \sqrt{7})$$

$$\sqrt{9x^2} = 6 + 2x - x^2$$

$$|3x| = 6 + 2x - x^2$$

$$\begin{cases} 3x = 6 + 2x - x^2 \\ 3x = -6 - 2x + x^2 \end{cases} = \begin{cases} x = -3 \notin \text{ОДЗ} \\ x = 2 \in \text{ОДЗ} \\ x = 6 \notin \text{ОДЗ} \\ x = -1 \in \text{ОДЗ} \end{cases}$$

Ответ: $x = -1, x = 2$

$$1) \log_{\frac{9}{(3x-x)^2}} - 3 - \frac{1}{2} = 0$$

$$2) \log_{(2x-5)^2} 5 - \frac{1}{2} = 0$$

$$3) \log_{16x^2}(x^2 - x) = \frac{1}{2}$$

Решить логарифмические уравнения, упростив правую часть.

1) $\log_2(x + 3) = \log_2 16$

2) $\log_{\sqrt{3}}(5 - 2x) = 3^{\log_9 4}$

3) $\log_{\sqrt[3]{2}}(x - 2) = 6^{\frac{1}{0.5 + \log_9 2}}$

4) $\log_{2x^2}(3x^2 + x - 4) = \log_{27} 3$

Решить уравнение по образцу

$$2 \quad \log_{0,2} x = \log_{0,2}(5x^2 - x)$$

$$\begin{cases} x > 0 \\ 5x^2 - x > 0 \end{cases}$$

$$\log_{0,2} x^2 = \log_{0,2}(5x^2 - x)$$

$$x^2 = 5x^2 - x$$

$$4x^2 - x = 0$$

$$x=0 \notin \text{ОДЗ}, x = \frac{1}{4}$$

Ответ: $\frac{1}{4}$
x =

Решите уравнения, приведя к логарифмам с одинаковыми основаниями.

$$1. \lg(x+2) + \log_{0,001}(x^3+26)=0$$

$$\log_{\frac{1}{27}}(-37 - x^3) + \log_3(-x-1)=0$$

$$\log_{49}(2x^2+x-5) + \log_{\frac{1}{7}}(1+x) = 0$$

$$\log_{\frac{1}{3}}(2x-1) = \log_3 \frac{1}{x+3}$$

$$\log_{\frac{1}{\sqrt{2}}}(x-1) - \log_4 \sqrt{x-1} = -9$$

Решить уравнения

$$1. X^{\log_3 x - 3} = \frac{1}{9}$$

$$1. 0,1x + \lg x = 1$$

$$1. X \log_4 x = 23(\log_4 x + 3) = 0$$

$$1. \log_3 x - \log_3(x+8) = -\log_3(x+3)$$

$$1. \log_2(x+1) + \log_2(x+2) = 1$$

$$1. 2\log_4(4-x) = 4 - \log_2(-2-x)$$

$$1. \log_2(x+1) = 1 + 2\log_2 x$$

$$1. \lg(x + \frac{4}{3}) - \lg(x - \frac{1}{3}) = \frac{1}{2} \lg(x+6) - \frac{1}{2} \lg x$$

$$1. \log_2 \frac{x-2}{x-1} - 1 = \log_2 \frac{3x-7}{3x-1}$$

$$1. 5x^2 - 8x + 5 \frac{\lg 5 - \log_{0,1} 2}{\log_9 25} = 0$$

$$1. \text{Log}_2(24-x-2x+7) = 3-x$$

$$1. 2\log_2(1 - \frac{13}{2x-7}) = 3\log_2(2 + \frac{13}{x-3}) + 12$$

$$\sqrt{4 - \frac{30}{\log_4 7}} = 4\log_7(\sqrt[4]{\frac{1}{7}} (\frac{7}{x})^{0,75})$$

$$1. X^{2\log_2 x + 3} \frac{\log_2 x}{\log_x 3} - 6 = 0$$

$$1. -4 + \log_2(5 - \log_{0,2} 125)x^2 - x = 0$$

$$1. \text{Log}_2 \frac{x-2}{x-1} - 1 = \log_2 \frac{3x-7}{3x-1}$$

$$1. \text{Log}_2(\log_5 x) = 1$$

$$\log_{\frac{1}{2}}(4x) + \log_2 \frac{x^2}{8} + 7 = 0$$

$$1. 3\log_2 x^2 - \log_2 2(-x) = 5$$

$$1. \log_x \frac{5}{x^2} \log_5^2 x = -1$$

$$1. \text{Lg}_2(x+1) = \lg(x+1)\lg(x-1) + 2\lg_2(x-1)$$

$$1. \log_3|x+8| + \frac{1}{4} \log_3 x^4 = 2$$

Решить уравнение

$$1. \text{Log}_3 x + 7(9 + 12x + 4x^2) + \log_2 x + 3(6x^2 + 23x + 21) = 4$$

$$1. \log(100x^3) \lg \frac{100}{\sqrt{x}} = 8$$

$$1. \log_6(x+5) + \frac{1}{2} \log_6 x^2 = 1$$

$$\frac{1}{\log_5 x} = \sqrt{\log_x 25 + 3}$$

$$1. \text{Log}_3(x+2)(5x) - \log_3 \frac{5-x}{x+2} = 0$$

$$1. \text{Log}_4 \log_2 x + \log_2 \log_4 x = 2$$

$$\log_{\frac{1}{3}} 3x - \log_7 7 = \sqrt{\log_{\frac{1}{3}} x}$$

$$1.4 \sqrt{\log_7 x} - \log_2 4 = \log_7 7x$$

$$1. \lg \sqrt{5x-4} + \lg \sqrt{x+1} = 2 + \lg 0,18$$

$$1. \log_2 3x + \log_2 x^3 + 3 \log_3 x + 3 \log x^3 = 2$$

$$1.2 \log_3 x \log_2 x + 2 \log_3 x - \log_2 x - 1 = 0$$

Метод монотонности функций.

Теорема 1. Если одна из функций возрастает, а другая убывает на промежутке, то уравнение $f(x)=g(x)$ имеет не более одного корня.

Теорема 2. Если одна функция возрастает (убывает), а вторая принимает постоянные значения на некотором промежутке, то уравнение имеет не более одного корня.

Алгоритм решения уравнения методом использования монотонности.

1. Исследовать на монотонность функции $f(x)$ и $g(x)$ в О.О.У

2. Если выполняются условия теоремы $f(x)$ и $g(x)$ и удается удовлетворяющие уравнению $f(x) = g(x)$, x_0 - единственный корень этого уравнения

$3^x + 4^x = 25$, $(3^x + 4^x)$ -функция возрастает т.к. 3^x и 4^x возрастает
возрастает и в правой части уравнения постоянная функция, то уравнения имеет один корень.

$$9 + 16 = 25$$

$$25 = 25$$

$6^x - 4^x = 152$, 6^x — возрастает функция и 4^x — возрастающая функция.
($6^x - 4^x$) — возрастающая функция, в правой части постоянная функция.

$$X=1, 6-4 \neq 152$$

$$X=2, 36-16 \neq 152$$

$$X=3, 216-64=152$$

$$5\sqrt{x} - 13\sqrt{x} + 12\sqrt{x} = 0, \text{ ОДЗ } x \geq 0$$

$$5\sqrt{x} + 12\sqrt{x} = 13\sqrt{x} \mid \div 13\sqrt{x}$$

$$X=1, \quad \frac{5}{13} + \frac{12}{13} \neq 1$$

$$X=4, \quad \binom{5}{13} + \binom{12}{13} = 1$$

$$\frac{25}{169} + \frac{144}{169} = 1, \text{ значит } x = 1 - \text{ корень.}$$

$$5\sqrt{x} - 13\sqrt{x} = -12$$

$$\binom{5}{12} - \binom{13}{12} = 1$$

$\binom{5}{12}$ - функция убывает, $\binom{13}{12}$ - возрастает, теорему не применять

$$\log_{\frac{1}{3}} x = \frac{1}{3} \quad \text{Ф.М.У}$$

$Y=x-4, a=1$ прямая направлена 

Применяем теорему: уравнений имеет один корень

$$X=3, \quad \log_{\frac{1}{3}} 3 = 3 - 4$$

$$-1 = -1, \\ X=3$$

Уравнение с завуалированным обратным числом.

$$\left(\sqrt{4 + \sqrt{15}}\right)^x + \left(\sqrt{4 - \sqrt{15}}\right)^x = 8$$

$$(4 + \sqrt{15})(4 - \sqrt{15}) = 16 - 15 = 1 \Rightarrow 4 + \sqrt{15} = t$$

$$t(4 - \sqrt{15}) = 1 \Rightarrow 4 - \sqrt{15} = \frac{1}{t}$$

$$t + \frac{1}{t} = 8 \mid \cdot t$$

$$t^2 - 8t + 1 = 0$$

$$D = b^2 - 4ac = 64 - 4 = 60$$

$$t_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} = \frac{8 \pm 2\sqrt{15}}{2} = 4 \pm \sqrt{15}$$

$$\left(\sqrt{4 + \sqrt{15}}\right)^x = (4 + \sqrt{15})$$

$$\frac{x}{2} = 1$$

$$X = 2$$

$$-2$$

$$\left(\sqrt{4 + \sqrt{15}}\right)^x = (4 - \sqrt{15})$$

$$\frac{x}{2} = -1$$

$$X =$$

Например!

$$1) \left(\sqrt[3]{3 + \sqrt{8}} \right)^x + \left(\sqrt[3]{3 - \sqrt{8}} \right)^x = 6$$

$$1) \left(\sqrt[4]{5 + 2\sqrt{6}} \right)^x + \left(\sqrt[4]{5 - 2\sqrt{6}} \right)^x = 10$$

Используемая литература

- С.М.Никольский- алгебра 10-11класс
- Ш.А.Алимов и др- алгебра 10-11класс
- Справочник по математике 5-11 класс
- Т.С. Кармакова -элективный курс
«Методы решения нестандартных уравнений»