



МОУ СОШ №27



**Моделирование
ситуаций при
решении задач на
движение
(из опыта работы
учителя математики
Асеевой Н.А.**



О действиях, составляющих умение решать текстовые задачи



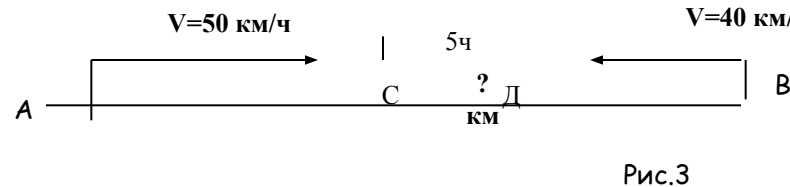
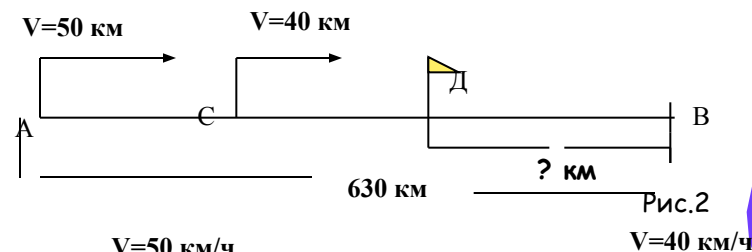
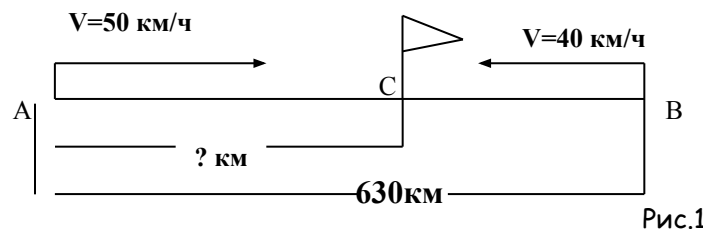
- На этапе **анализа текста задачи** необходимо уметь выделить объекты, о которых идёт речь в задаче, а также её условие и вопрос, установить известные, неизвестные и искомые величины, выделить ситуации, описанные в задаче.
- На этапе **поиска плана решения** понадобятся умения записывать функциональную зависимость между величинами из формул, составлять из заданной задачи
- На этапе **реализации плана** важнейшим оказывается умение переводить зависимости между величинами на математический язык.
- На этапе **исследования** приходится интерпретировать результат на языке данной задачи, выполнять проверку решения, оценивать его с точки зрения оптимальности.
- Основным методом решения задач является **метод с использованием уравнений**



Специальные умения для решения задач



- Умение составлять краткую запись условия задачи
- Умение выбрать величину, которую будем считать переменной.
- Умение алгебраически выразить величины через переменную
- Умение записывать одну и ту же величину разными способами
- Умение оформлять в виде равенств зависимости



Решение задач с помощью таблиц



Скорость (V)	Время (t)	Расстояние (S)	Одновременно		
			В противоположных направлениях	Навстречу	В одном направлении
$V=st$	$t=s/v$	$S=vt$	$S=s_1 + s_2$	$S=s_1 + s_2$	$S=s_1 - s_2$



Решение задач с помощью таблиц



- Задача 1. Из одного пункта в противоположных направлениях одновременно вышли два лыжника, один со скоростью 14 км/ч, а другой со скоростью 13 км/ч. Какое расстояние будет между лыжниками через 2 часа? (см таблицу 2)

	v	t	S	В противоположных направлениях
	$V=st$	$t=s/v$	$S=vt$	
1-й лыжник	14 км/ч	2ч	14·2 (км)	14 · 2 + 13 · 2
2-й лыжник	13 км/ч	2ч	13 · 2 (км/ч)	

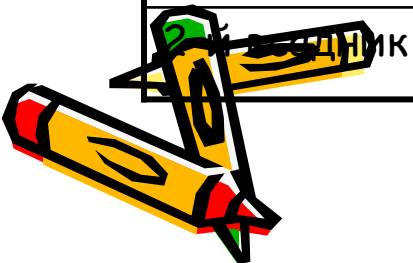


Решение задач с помощью таблиц



- Задача 2. Из двух сёл одновременно выехали навстречу 2 всадника и встретились через 4 часа. Скорость одного из них 11 км/ч. Расстояние между сёлами 80 км. Найдите скорость другого всадника.

	v	t	S	Навстречу
	$V=st$	$t=s/v$	$S=vt$	
1-й всадник	11 км/ч	4ч	$11 \cdot 4 = 44$ (км)	80-44=36 (км)
2-й всадник	$36:4=9$ (км/ч)	4ч	36 (км)	



Решение задач с помощью таблиц



- Задача 3. Из одного пункта в одном направлении одновременно выехали две машины. Скорость первой машины 40 км/ч, а второй в 2 раза больше. Какое расстояние будет между ними через 2 часа?

	v	t	S	В одном направлении
	$V=st$	$t=s/v$	$S=vt$	
1-я машина	40 км/ч	2ч	$40 \cdot 2 = 80$ (км)	160-80=80 (км)
2-я машина	$40:2$ (км/ч)	2ч	$80 \cdot 2$ (км)	



Решение задач с помощью таблиц



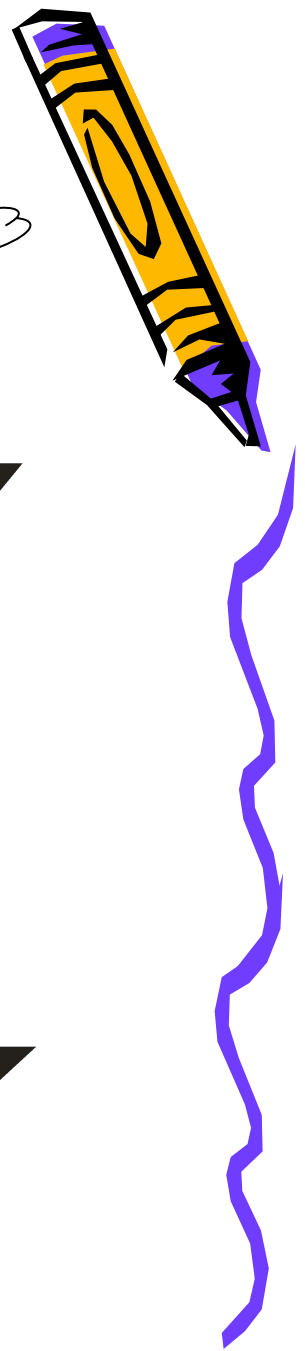
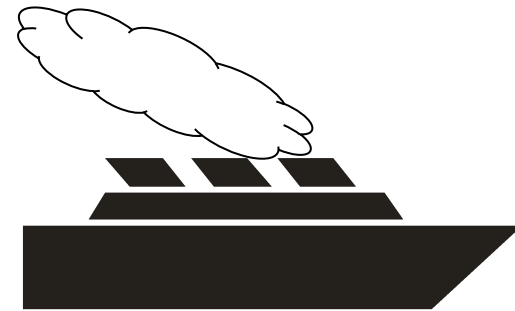
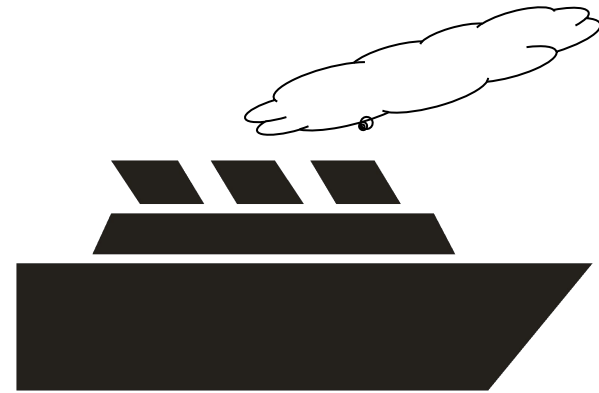
- Задача 4.? . Из двух пунктов, расстояние между которыми 210 км, вышли одновременно навстречу друг другу два электропоезда. Скорость одного из них на 5 км /ч больше скорости другого. Найдите скорость каждого электропоезда, если они встретились через 2 часа после своего выхода.

	v	t	S	Навстречу
	$V=st$	$t=s/v$	$S=vt$	
1 электропоезд	x км/ч	2ч	$2x$ (км)	$2x+2(x+5)=210$
2 электропоезд	$(x+5)$ (км/ч)	2ч	$2(x+5)$ (км)	



Задачи на движение по воде

- Работа с моделями

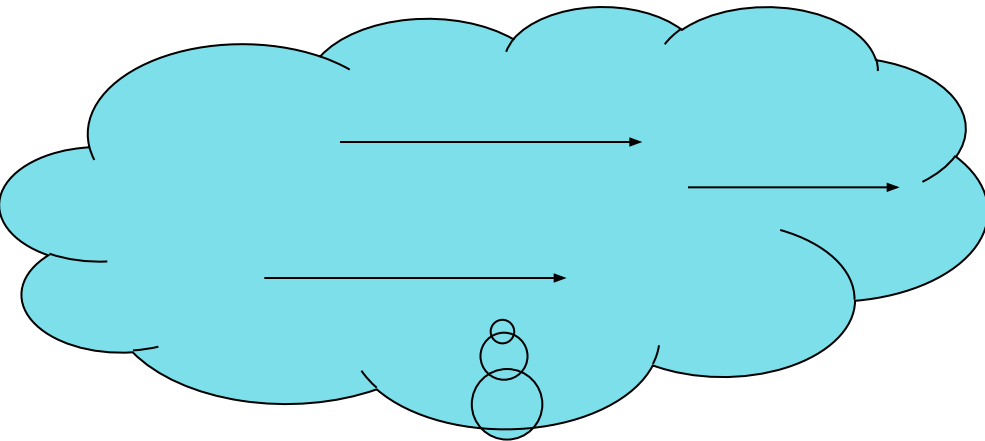


Задачи на движение по воде

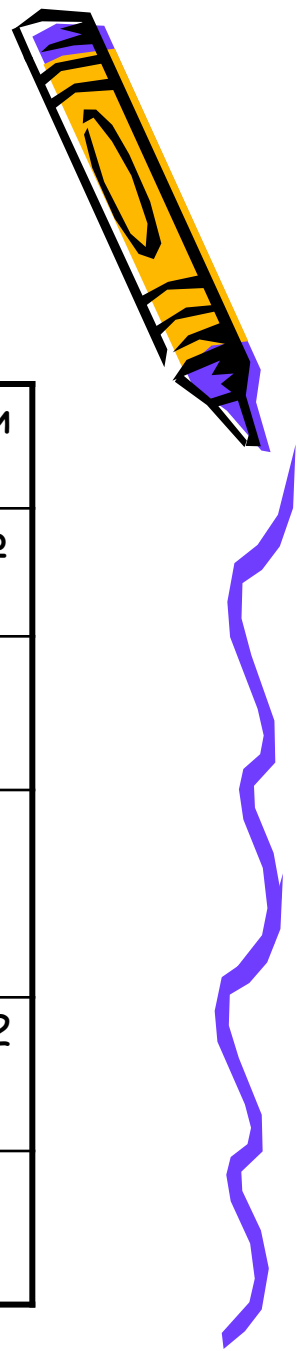


ВЫВОД:

- Если катер движется по течению реки, то его скорость равна собственной скорости катера (в стоячей воде), увеличенной на скорость течения реки.
- Если катер движется против течения реки, то его скорость равна собственной скорости катера, уменьшенной на скорость течения реки.



Задачи на движение по воде



- Работа по таблице. В ней нужно заполнить пустые места, а для этого сформулировать и решить устно четыре задачи на движение катера по реке.

	Условие задачи			
	№ 1	№ 2	№ 3	№ 4
Собственная скорость катера (км/ч)	30	36	22	
Скорость течения реки (км/ч)	2		3	3
Скорость катера против течения (км/ч)		40		42
Скорость катера против течения (км/ч)			19	



Задачи на движение по воде



Рассматриваем более сложные задачи:

- *Скорость катера при движении по течению реки равна 40 км/ч, а при движении против течения она составляет 34 км/ч. Какова скорость течения реки?*
- Катер спустился вниз по реке к озеру. При этом за 2 ч он прошёл 60 км. По озеру он двигался 3ч со скоростью 28 км/ч, а потом поднялся по другой реке, которая впадает в то же озеро, за 4 ч. Узнайте путь, который прошёл катер за всё время движения, считая скорости течения рек одинаковыми



Диалог в ходе решения задач на движение

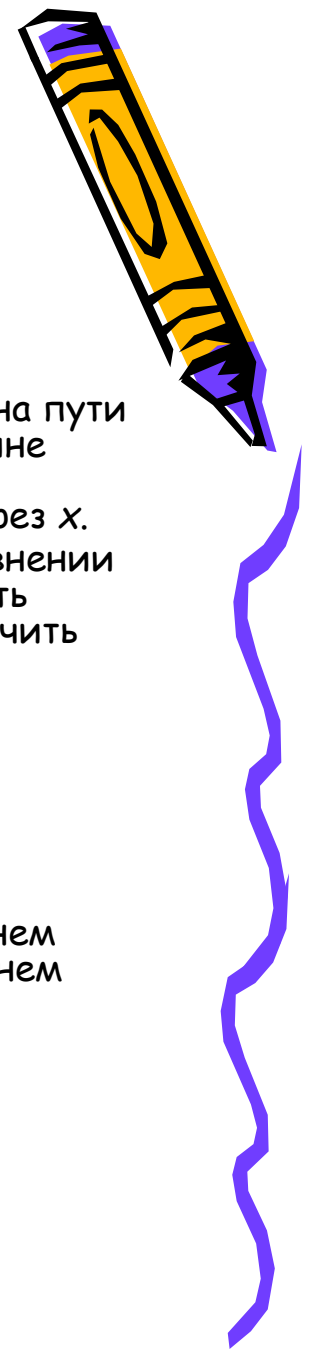


Обсуждение задачи.

- **Задача 1.** Из города А в город В выезжает велосипедист, а через 3 ч после его выезда из города В навстречу ему выезжает мотоциклист, скорость которого в 3 раза больше, чем скорость велосипедиста. Велосипедист и мотоциклист встречаются на полпути между А и В. Если бы мотоциклист выехал не через 3 ч, а через 2 ч после велосипедиста, то встреча произошла бы на 15 км ближе к городу А. Найти расстояние между А и В.



Диалог в ходе решения задач на движение



Ситуация 1

- Из пункта А в пункт В выезжает объект «1, т.е велосипедист, а через 3 ч из пункта В в пункт А выезжает объект №2 - мотоциклист, со скоростью в 3 раза большей, чем скорость велосипедиста. Они встречаются в середине пути между А и В.

- Так как у обоих объектов длина пути одинакова и она равна половине пути, поэтому рациональнее половину пути обозначить через x .
- Далее разговор ведётся о сравнении скоростей. А поэтому: скорость велосипедиста удобно обозначить через y км/ч, а скорость мотоциклиста - $3y$ км/ч.
- Работа с неиспользованными данными (3 ч).
- Выразить формулами время движения каждого объекта и записать в виде уравнения соотношениями между временем движения объекта №1 и временем движения объекта №2:

$$\frac{x}{y} - \frac{x}{3y} = 3.$$



Диалог в ходе решения задач на движение



- Вторая ситуация обсуждается аналогично, но теперь пройденные расстояния различны, приходится их сравнивать

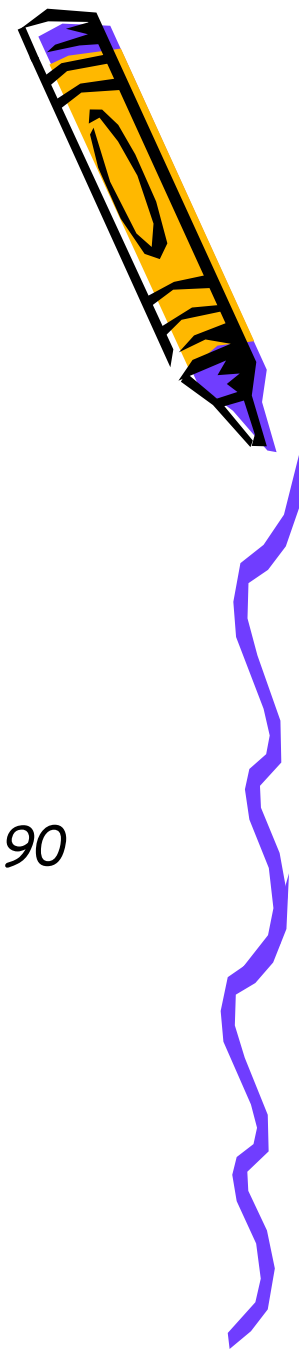
- До встречи велосипедист проехал $(x-15)$ км, мотоциклист $(x+15)$ км, тогда велосипедист находился в пути $\frac{x-15}{y}$, а мотоциклист $\frac{x+15}{3y}$

Какой объект находился в пути больше?
(велосипедист на 2 ч).
Отсюда другое уравнение

$$\frac{x-15}{y} - \frac{x+15}{3y} = 2$$



Диалог в ходе решения задач на движение



- А далее система уравнений

$$\begin{cases} \frac{x}{y} - \frac{x}{3y} = 3 \\ \frac{x-15}{y} - \frac{x+15}{3y} = 2 \end{cases}$$

Решение этой системы. Следует обратить внимание, что $x=90$
- это половина пути. Ответ: 180 км



Диалог в ходе решения задач на движение



- В ходе рассуждений полезно составить таблицу.

Ситуации	Объекты	Величины			Уравнение
		Путь (км)	Скорость (км/ч)	Время (ч)	
Сначала	№1	X	y	$\frac{x}{y}$	$\frac{x}{y} - \frac{x}{3y} = 3$
	№2	x	3y	$\frac{x}{3y}$	
Потом	№1	X-15	y	$\frac{x-15}{y}$	$\frac{x-15}{y} - \frac{x+15}{3y} = 2$
	№2	X+15	3y	$\frac{x+15}{3y}$	

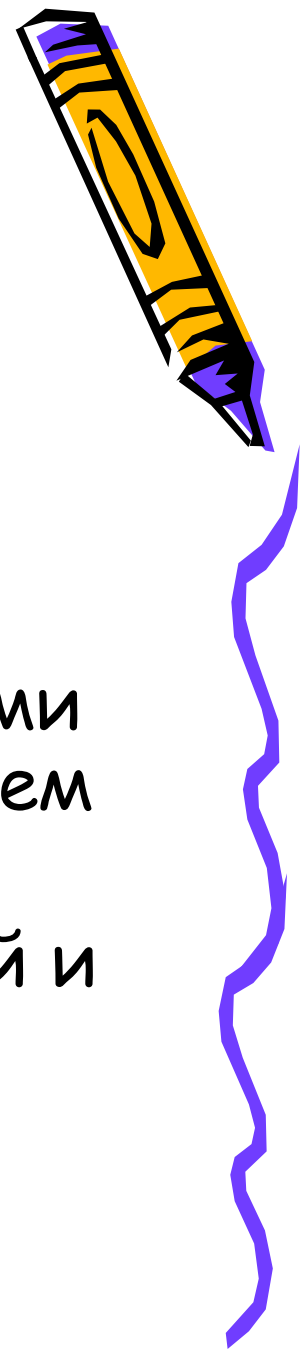
$\frac{x}{y}$



Задачи на движение при подготовке в вуз

Стандартная схема решения задач на движение состоит из трёх этапов:

- отбор неизвестных;
- составление соотношений между этими неизвестными в виде уравнений, систем уравнений и неравенств;
- решение уравнений, систем уравнений и неравенств.



Задачи на движение при подготовке в вуз



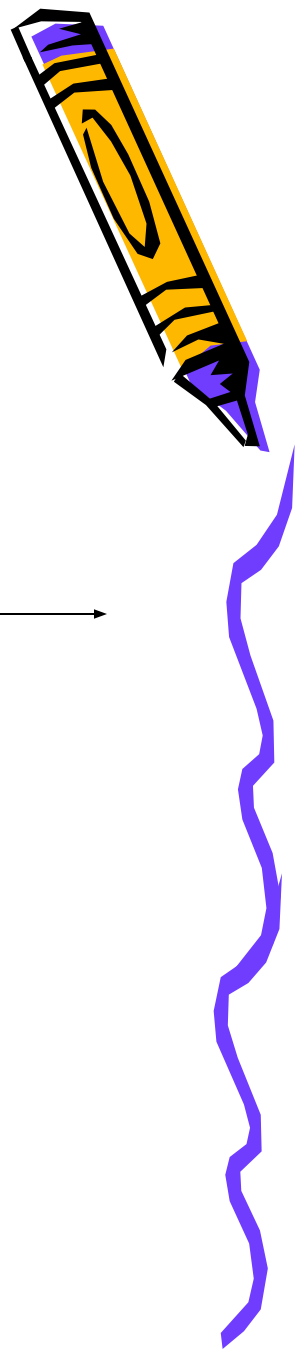
- **Задача 1.** Пешеход, велосипедист и мотоциклист двигались по шоссе в одну сторону каждый со своей постоянной скоростью. В момент, когда пешеход и велосипедист находились в одной точке, мотоциклист отставал от них на 3 км. На сколько км велосипедист обогнал пешехода в тот момент, когда пешехода настиг мотоциклист?

Введём обозначения:

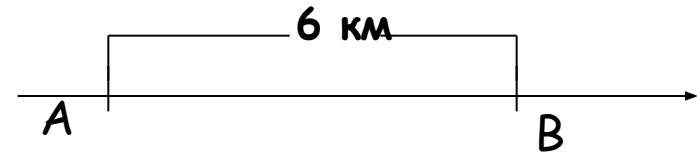
- пусть скорость пешехода k (км/ч), скорость велосипедиста vk (км/ч),
- скорость мотоциклиста ak (км/ч), где a, b, k - некоторые постоянные.



Задачи на движение при ПОДГОТОВКЕ В ВУЗ



- *Ситуация 1.* Пешеход и велосипедист находятся в одной точке. На рис.1 это точка B . Мотоциклист отстаёт на 6 км (то есть его можно поместить в точку A , которая находится левее точки B), $AB=6$.



Задачи на движение при ПОДГОТОВКЕ В ВУЗ



- *Ситуация 2*
Мотоциклист догнал пешехода в некоторой точке, то есть они оба переместились в точку C на рис.2, которая расположена правее точки B . В это момент велосипедист продвинулся дальше и находится на некотором расстоянии от них в точке D . Расстояния BC и CD неизвестны. Поэтому логично обозначить через x и y , т.е. $BC = x$, $CD = y$.

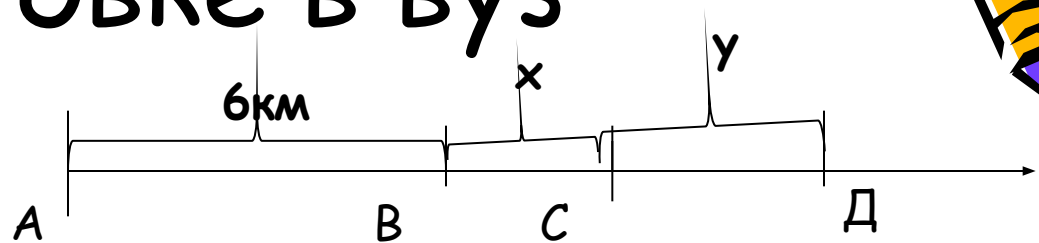


Схема на рис. даёт возможность установить связи между величинами x , y и k , a , v . В самом деле, если пешеход прошёл x км со скоростью k км/ч, то значит, на путь от пункта B до C он затратил k/x ч.

Но тоже самое время находился в пути и мотоциклист, преодолевший расстояние от B до C и ещё от A до B , т.е.

$$\frac{x}{k} = \frac{x+6}{ak}$$



Задачи на движение при подготовке в вуз



Дальнейшее рассуждение

- Но тоже самое время находился в пути и велосипедист, который продвинулся от точки B до точки D , т.е. $\frac{x}{k} = \frac{x+y}{vk}$

Итак, получены равенства $\frac{x}{k} = \frac{x+6}{ak}$ $\frac{x}{k} = \frac{x+y}{vk}$

Исключим k в каждом из равенств: $x = \frac{x+6}{a}$ $x = \frac{x+y}{v}$

А затем получим два способа представления неизвестной x

$$x = \frac{6}{a-1} \quad (1) \qquad x = \frac{y}{v-1} \quad (2)$$

Приравниваем правые части выражений (1) и (2)

$$\frac{6}{a-1} = \frac{y}{v-1} \quad \text{и получим, что} \quad y = \frac{6(v-1)}{a-1} \quad (3)$$

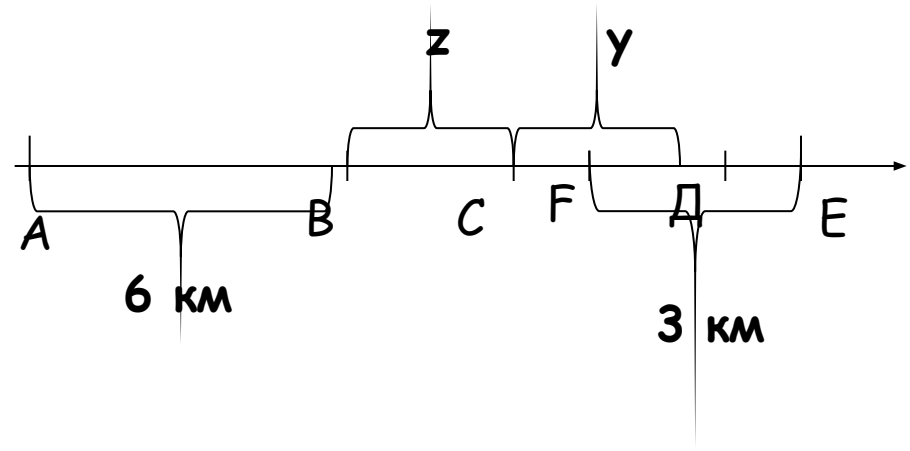


Задачи на движение при ПОДГОТОВКЕ В ВУЗ



Ситуация 3

- Мотоциклист догнал велосипедиста в некоторой точке, находящейся правее D . Назовём её точкой E , а в это время пешеход тоже продвинулся вперёд к некоторой точке E . По условию расстояние от F до E равно 3 км



Задачи на движение при ПОДГОТОВКЕ В ВУЗ



Дальнейшее рассуждение

Итак, известно, что $FE=3$, но про длину отрезка BF ничего не сказано.

Обозначим эту величину через z . От пункта A до пункта E мотоциклист преодолел расстояние $6+z+3=9+z$ (км) со скоростью ak км/ч, т.е.

находился в пути $\frac{9+z}{ak}$ ч

Но за это же время велосипедист проехал расстояние от пункта B до E , т.е. $(z+3)$ км со скоростью bk км/ч, т.е.

$$\frac{z}{k} = \frac{z+9}{ak} \text{ или}$$

$$z = \frac{9+z}{a}$$

За то же самое время велосипедист проехал расстояние от пункта B до E , т.е. $(z+3)$ км со скоростью bk км/ч, т.е.

$$\frac{z}{k} = \frac{z+3}{bk} \text{ или } z = \frac{z+3}{b} \quad (5)$$

Из уравнений (4) и (5) выразим a и b через z .

$$z = \frac{9+z}{a} \longrightarrow a = \frac{z+9}{z} \longrightarrow a = 1 + \frac{9}{z} \quad (6)$$



Задачи на движение при ПОДГОТОВКЕ В ВУЗ



- Дальнейшие преобразования

$$z = \frac{z+3}{b} \rightarrow b = \frac{z+3}{z} \rightarrow 1 + \frac{3}{z} \quad (7)$$

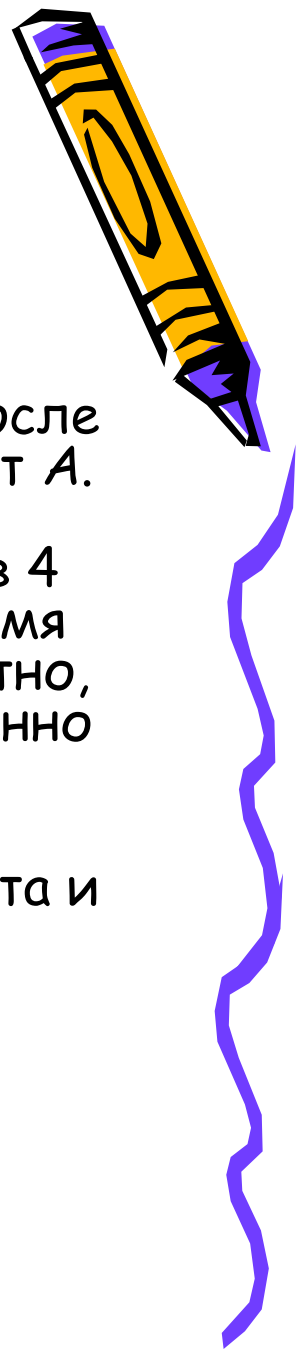
Подставим полученные значения a и b в равенство (3.) и получим искомое значение y :

$$y = \frac{6(b-1)}{a-1} = \frac{6(1 + \frac{3}{z} - 1)}{1 + \frac{9}{z} - 1} = \frac{\frac{18}{z}}{\frac{z}{z}} = 2$$

Таким образом получили, что велосипедист обогнал пешехода на 2 км в тот момент, когда мотоциклист настиг пешехода.



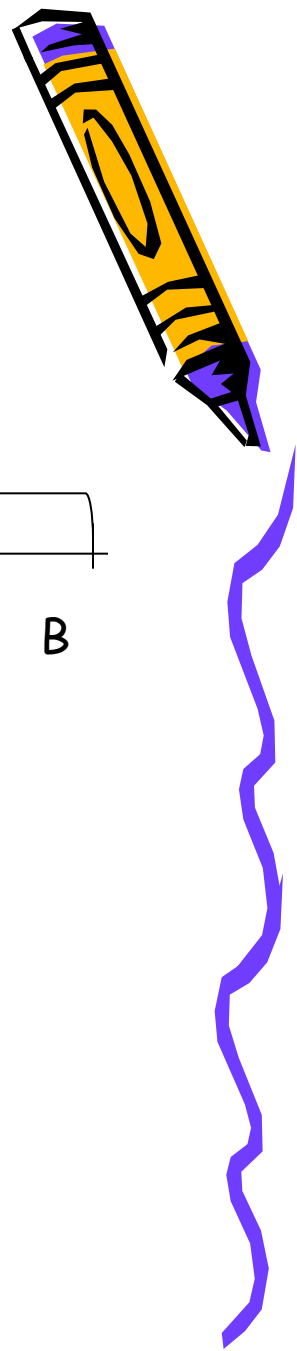
Задачи на движение при ПОДГОТОВКЕ В ВУЗ



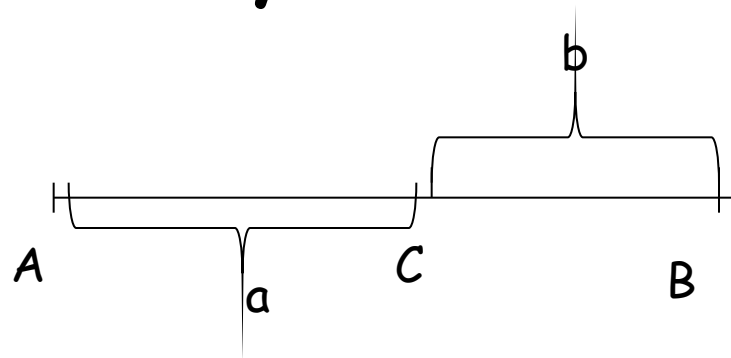
- **Задача 2.** Велосипедист отправляется из A в B и после 15-минутного отдыха в пункте B возвращается в пункт A . На пути из A в B велосипедист догоняет в 11 часов пешехода, который движется из A в B со скоростью в 4 раза меньшей, чем у велосипедиста. Определить время отправления велосипедиста из пункта A , если известно, что велосипедист возвращается в пункт A одновременно с прибытием пешехода в пункт B .
- **Решение.** Составим схематичные модели ситуаций, складывающихся в процессе движения велосипедиста и пешехода.
- Пусть $AC = a$, $BC = b$, y - скорость пешехода, x - время отправления велосипедиста из пункта A .



Задачи на движение при ПОДГОТОВКЕ В ВУЗ



- **Ситуация 1.**
Велосипедист настиг пешехода в некоторой точке C между A и B (рис. 4). Это значит, что расстояние AC велосипедист проехал за $11 - x$ часов со скоростью $4v$.



Составим уравнение

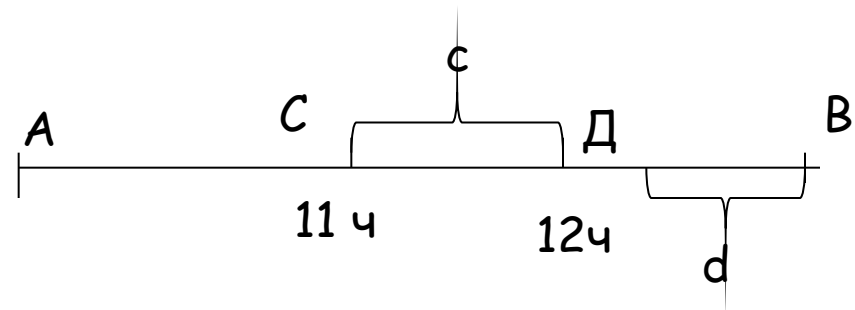
$$\frac{a}{4v} = 11 - x$$



Задачи на движение при ПОДГОТОВКЕ В ВУЗ



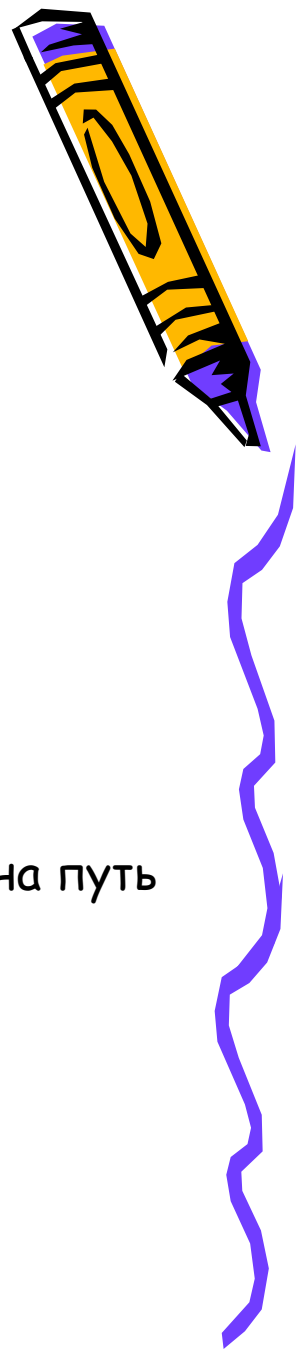
- **Ситуация 2.**
Велосипедист и пешеход встретились в 12ч. В некоторой точке D , расположенной между пунктами C и B , когда велосипедист возвращается в A из B . Длину отрезка CD обозначим через s , а длину отрезка DB - через d



Итак, пешеход прошёл расстояние CD за 1 час со скоростью v . Значит $s/v=1 \rightarrow s=v$. За это же время, т.е. за 1 час велосипедист преодолел расстояние $v + d$. Поскольку $v = s + d$, запишем, что $v + d = s + d$. С учётом 15 мин. ($15 = 1/4$ ч), потраченных велосипедистом на отдых, составим уравнение:



Задачи на движение при ПОДГОТОВКЕ В ВУЗ



$$\frac{c+2d}{4y} + \frac{1}{4} = 1 \quad \longrightarrow \quad \frac{c+2d}{4y} = \frac{3}{4}$$

- Выше уже установлено, что $c = v$, тогда

$$\frac{c+2d}{4c} = \frac{3}{4} \quad \frac{c+2d}{c} = 3 \quad 1 + \frac{2d}{c} = 3 \quad d=c.$$

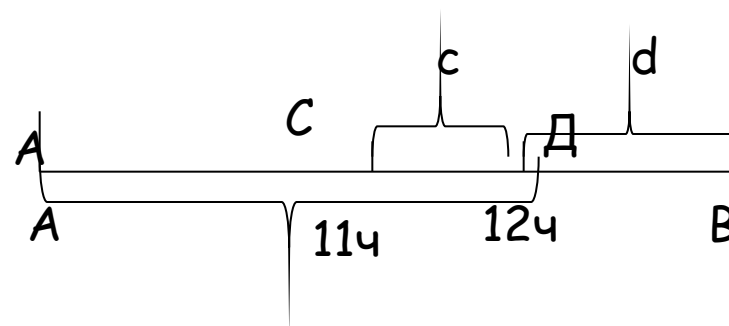
Т.е. $CD = DV$. Поскольку расстояние между пунктами C и D пешеход одолел за 1 час, столько же времени ему потребуется на путь от B до D ,
т.е. 1 час.



Задачи на движение при подготовке в вуз



- Ситуация 3.**
 Велосипедист вернулся в пункт A , а затем пешеход прибыл в пункт B (рис. 6). На то, чтобы проехать от D до C и от C до A , велосипедист затратит часов. И столько же времени уйдёт у пешехода на путь от D до B



Пешеход преодолевает расстояние DB за 1 час.

Отсюда $\frac{a+c}{4y} = \frac{d}{y}$ →

• $a+c=4d$, $a=3c$, $a=3y$

• Полученное выражение для a подставим в уравнение (1):

$$\frac{3y}{4y} = 11 - x$$

$$\frac{3}{4} = 11 - x$$

$$x = 11 - \frac{3}{4} = 10\frac{1}{4}$$

Значит, велосипедист отправился из пункта A в 10ч. 15 мин.

