
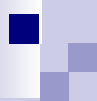


5. Уравнение в полных  
дифференциалах.  
Интегрирующий  
множитель.

# Теорема:

- Для того чтобы дифференцировать выражение  $M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$ , где  $M$  и  $N$  определены и непрерывны в области плоскости  $XOY$  и имеют в ней  $D$  непрерывные частные производные  $\frac{\partial M}{\partial y}$  и  $\frac{\partial N}{\partial x}$ , представляла собой полный дифференциал некоторой функции  $U(x, y)$ , необходимо и достаточно, чтобы во всех точках области было выполнено условие 
$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x} .$$


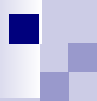


# Интегрирующий множитель.

- Если  $\frac{\partial M}{\partial y} \neq \frac{\partial N}{\partial x}$ , то уравнение  $Mdx + Ndy = 0$  не является уравнением в полных дифференциалах. Однако это уравнение можно превратить в уравнения в полных дифференциалах умножением на подходящую функцию  $\mu(x, y)$ . Такая функция называется интегрирующим множителем для данного дифференциального уравнения.

■ Практически поступают так: берут выражение  $\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}$ , делят на  $\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}$ , если не зависит частное от  $y$ , то находят  $\mu = \mu(x)$  по формуле  $\mu(x) = e^{\int (\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}) dx}$ , если в противном случае  $\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}$  делят на  $M(x; y)$  и если частное не зависит от  $x$ , то существует  $\mu = \mu(y)$  и его находят по формуле

$$\mu(y) = e^{-\int \frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{M} dy}$$

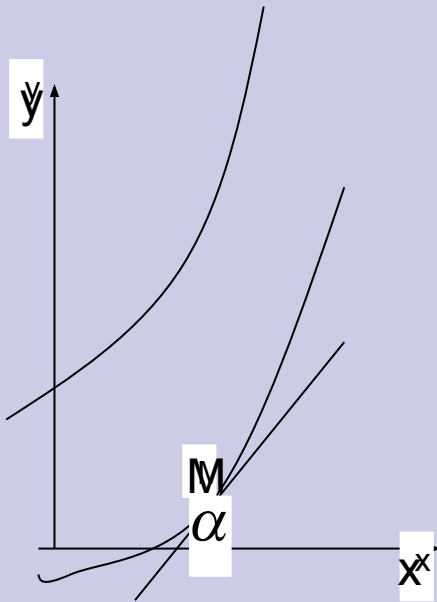


# 6. Дополнительные сведения.

Дифференциальное уравнение может быть также истолковано следующим образом.


- Пусть  $y = \varphi(x; c)$  - общее решение дифференциального уравнения, т.е. семейство интегрирующих кривых в некоторой области  $D$ , плоскости  $XOY$  в которой определена функция  $f(x; y)$ . Дифференциальное уравнение устанавливает связь между координатами любой точки  $M(x; y)$  области  $D$  и значением производной в этой точке. Зная  $x$  и  $y$  точки  $M$ , можно найти  $y' = f(x; y)$  значение производной, т.е. угловой коэффициент касательной к интегрирующей кривой, проходящую через точку  $M$ .

## Рисунок 5



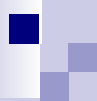
- $k = \operatorname{tg} \alpha = y' = f(x_M; y_M)$ . Т.е. дифференциальное уравнение  $y' = f(x; y)$  определяет совокупность направлений, или поле направлений в области  $D$ . Изображая стрелкой направление, можно построить поле направлений дифференциального уравнения  $y' = f(x; y)$ .



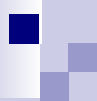
- 
- Геометрически задача интегрирования дифференциального уравнения заключается в нахождении кривых, которые в каждой своей точке касаются направления, задаваемым полем .

# Теорема (Коши).

- Если функция  $f(x; y)$  определена и непрерывна в области  $D$  плоскости  $XOY$  и имеет непрерывную частную производную  $\frac{\partial f}{\partial y}$  во всех точках этой области, то, какова бы ни была точка  $M_0(x_0; y_0)$  области  $D$  всегда существует и притом единственная, функция  $y = \varphi(x)$ , которая определена и непрерывна в некотором интервале, содержащим точку  $x_0$ , является решением уравнения  $y' = f(x; y)$  и принимает при  $x = x_0$  значение  $y = y_0$ .



7. Уравнение  
первого порядка, не  
разрешенные  
относительно  
производной.



■ Рассмотрим  
дифференциальное  
уравнение  $F(x; y; y') = 0$   
, не разрешенное  
относительно  $y'$  .

# Случай 1.

- Уравнение первого порядка

$$(y')^n + p_1(y')^{n-1} + p_0(y')^{n-2} + \dots + p_{n-1}y' + p_n y = 0$$

$n$ -й степени, где  $n$ -  
целое положительное число,  $p_i$ ,  
 $(i = \overline{1, n})$  - функции от  $x$  и  $y$ .

Получили :

$$y' = f_1(x; y)$$

$$y' = f_2(x; y)$$

$$y' = f_n(x; y)$$

Общие интегралы имеют вид:

$$\Phi_1(x; y; c_1) = 0, \dots, \Phi_n(x; y; c_n) = 0$$

# Случай 2.

- Уравнение разрешенное относительно  $y$  и не содержащее  $x$   $y = \varphi(y')$  . Это уравнение решается методом введения параметра  $p$ .
- Пусть  $y' = p$  , тогда  $y = \varphi(p)$  .



■ Пусть  $y = \varphi(p)$  ,  
тогда  $y' = p$  .

# Случай 3.

- Уравнение разрешенное относительно  $x$  и не содержащее  $y$ :  $x = \varphi(y')$  .

- Аналогично:  $y' = p$  ,  $x = \varphi(p)$

# Случай 4.

- . Уравнения не содержащие  $x$  и  $y$ , но не обязательно разрешенные относительно  $y$  и  $x$ .

- $F(y, y') = 0 \quad (*)$

$$F(x, y') = 0 \quad (**)$$

# Случай 5.

- **Уравнение Лагранжа.**

Уравнение, линейно  
относительно  $x$  и  $y$ , т.е.  
имеющее вид

$$y = \varphi(y')x + \phi(y').$$

# 1-й случай $\varphi(y') \neq y'$ .

- Его общий интеграл имеет вид  $\Phi(x, p, c) = 0$  , вместе с уравнением  $y = \varphi(p)x + \phi(p)$  он дает общий интеграл уравнения Лагранжа.

**2-й случай**  $\varphi(p) = p.$

$$y = x\varphi(p_i) + \phi(p_i)$$

$$i = \overline{1, k}$$

# Случай 6.

- Уравнение Клеро

$$y = xy' + \phi(y')$$