



ДИСЦИПЛИНА «МАТЕМАТИКА»

Раздел 2. Действительные числа

Тема 2.2. Уравнения и неравенства первой и второй степени

Рациональные уравнения, неравенства,
иррациональные уравнения и неравенства



Разработано преподавателем
математики: Фроловой Т.А.

Рациональные уравнения и неравенства

Пример 1

Решим уравнение $2 - \frac{x+1}{x-1} = 0.$

Решение

$$2 - \frac{x+1}{x-1} = 0$$

$$\frac{2(x-1) - (x+1)}{x-1} = 0$$

$$\frac{2x - 2 - x - 1}{x-1} = 0$$

$$\frac{x-3}{x-1} = 0$$

$$\begin{cases} x-3=0 \\ x-1 \neq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=3 \\ x \neq 1 \end{cases}$$

ОТВЕТ: 3

Пример 2 Решим уравнение $\frac{x-1}{x+2} = \frac{x-4}{x-3} - 1$.

Решение

$$\frac{x-1}{x+2} = \frac{x-4}{x-3} - 1.$$

$$\frac{\overset{x-3}{x-1}}{x+2} - \frac{\overset{x+2}{x-4}}{x-3} + 1 = 0$$

$$\frac{(x-1)(x-3) - (x-4)(x+2) + (x+2)(x-3)}{(x+2)(x-3)} = 0$$

Пример 2 Решим уравнение $\frac{x-1}{x+2} = \frac{x-4}{x-3} - 1$.

Решение

$$\frac{(x-1)(x-3) - (x-4)(x+2) + (x+2)(x-3)}{(x+2)(x-3)} = 0$$

$$\frac{x^2 - 3x - x + 3 - (x^2 + 2x - 4x - 8) + x^2 - 3x + 2x - 6}{(x+2)(x-3)} = 0$$

$$\frac{x^2 - 3x - x + 3 - x^2 - 2x + 4x + 8 + x^2 - 3x + 2x - 6}{(x+2)(x-3)} = 0$$

Пример 2

Решим уравнение

$$\frac{x-1}{x+2} = \frac{x-4}{x-3} - 1.$$

Решение

$$\frac{x^2 - 3x - x + 3 - x^2 - 2x + 4x + 8 + x^2 - 3x + 2x - 6}{(x+2)(x-3)} = 0$$

$$\frac{x^2 - 3x + 5}{(x+2)(x-3)} = 0$$

$$x^2 - 3x + 5 = 0$$

$$D = 9 - 20 < 0$$

Исходное уравнение не имеет корней, так как числитель равносильного уравнения не имеет корней.

ОТВЕТ: корней нет.

Правило

Для решения рационального уравнения надо перенести все его члены в левую часть, затем, применяя правила сложения и вычитания алгебраических дробей, записать левую часть как алгебраическую дробь и решить полученное уравнение.

Замечание

Отклонение от высказанного правила может привести к потере корней или к приобретению посторонних корней данного уравнения.

Например

$$\frac{(x-2)(x-3)}{x-3} = 1,$$

$$\frac{(x-2)(x-3)}{x-3} \stackrel{x-3}{-1} = 0$$

$$\frac{x^2 - 3x - 2x + 6 - x + 3}{x-3} = 0$$

$$\frac{x^2 - 6x + 9}{x-3} = \frac{(x-3)^2}{x-3} = 0$$

X равное 3 обращает знаменатель в нуль, значит уравнение корней не имеет.

Однако, если бы мы отклонились от правила, сократили дробь в левой части уравнения на $(x-3)$,

$$\frac{(x-2)(x-3)}{\cancel{x-3}} = 1,$$

$$x - 2 = 1$$

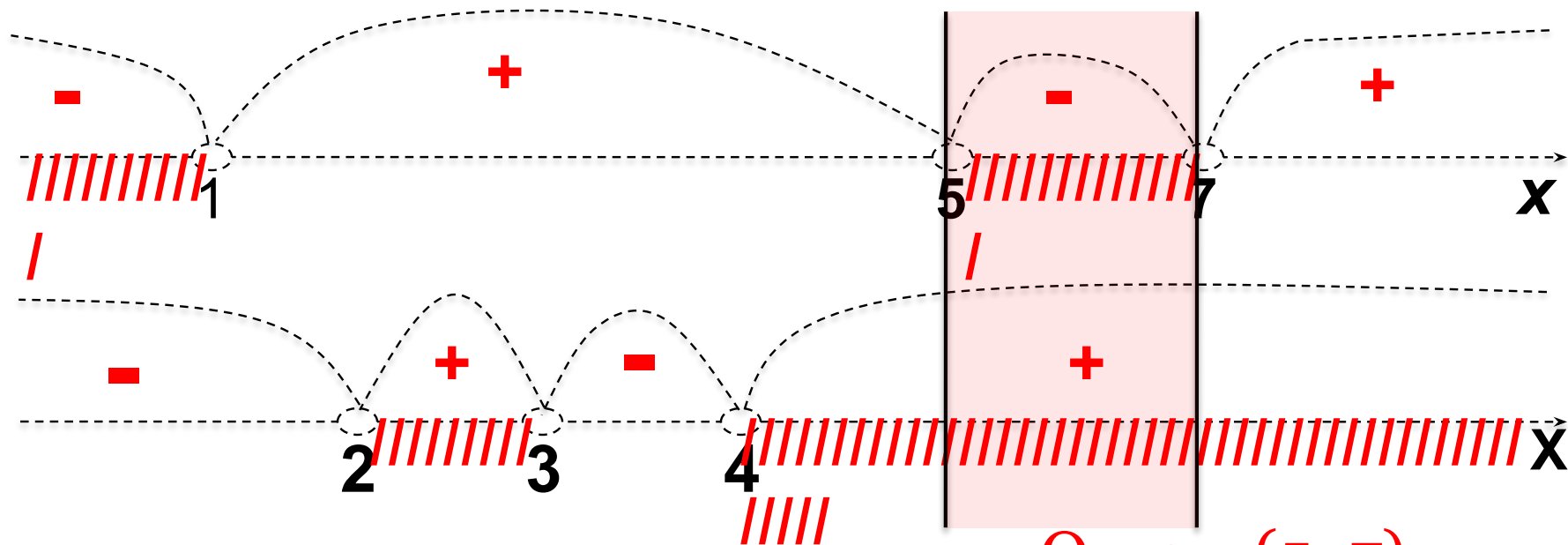
$$x = 3$$

Но $x=3$ не является корнем исходного уравнения – при $x=3$ левая его часть превращается в выражение, не имеющее смысла. Следовательно при таком «способе решения» мы получили посторонний корень.

Пример 1.
Решим систему
неравенств

$$\begin{cases} (x-1)(x-5)(x-7) < 0, \\ \frac{(x-2)(x-3)}{x-4} > 0. \end{cases}$$

Решение

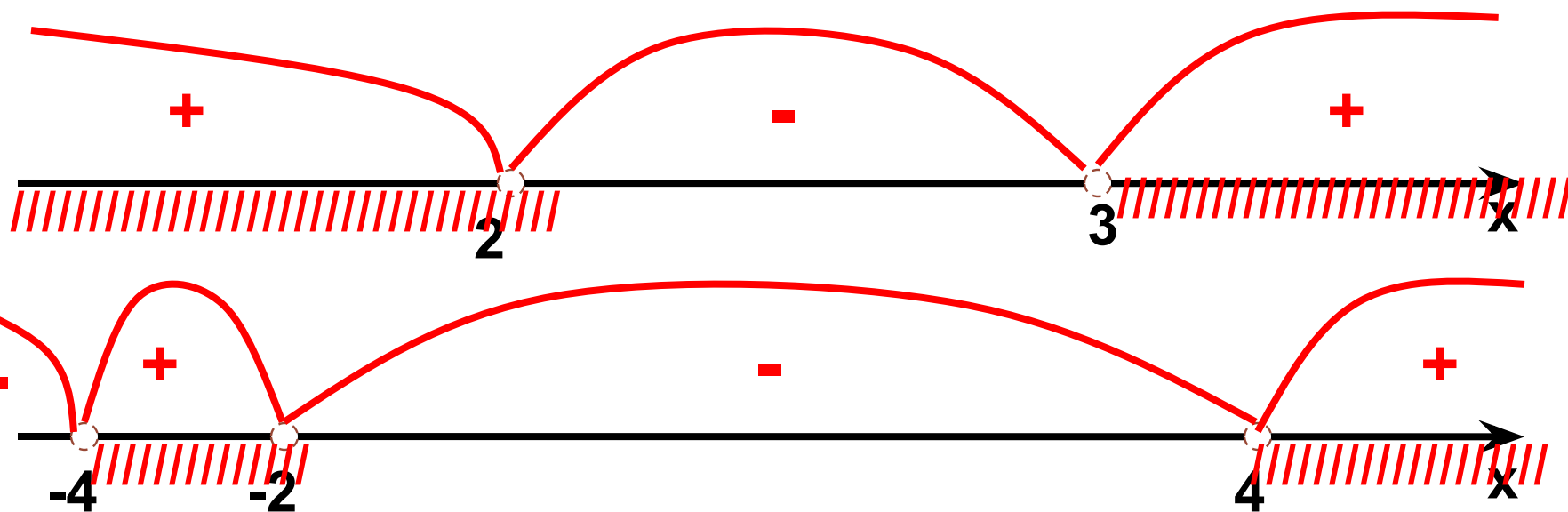


Ответ: (5; 7)

Пример 2

Решить систему
неравенств

$$\begin{cases} (x - 2)(x - 3) > 0, \\ \frac{x + 2}{(x - 4)(x + 4)} > 0. \end{cases}$$



Ответ: $(-4; -2) \cup (4; +\infty)$

Пример 3

Решить систему
неравенств:

$$\begin{cases} \frac{x^2 + 2009}{x^2 - 1} > \frac{x + 2009}{x^2 - 1}, \\ \frac{x + 1004}{2x + 3} > \frac{x - 1005}{2x + 3}. \end{cases}$$

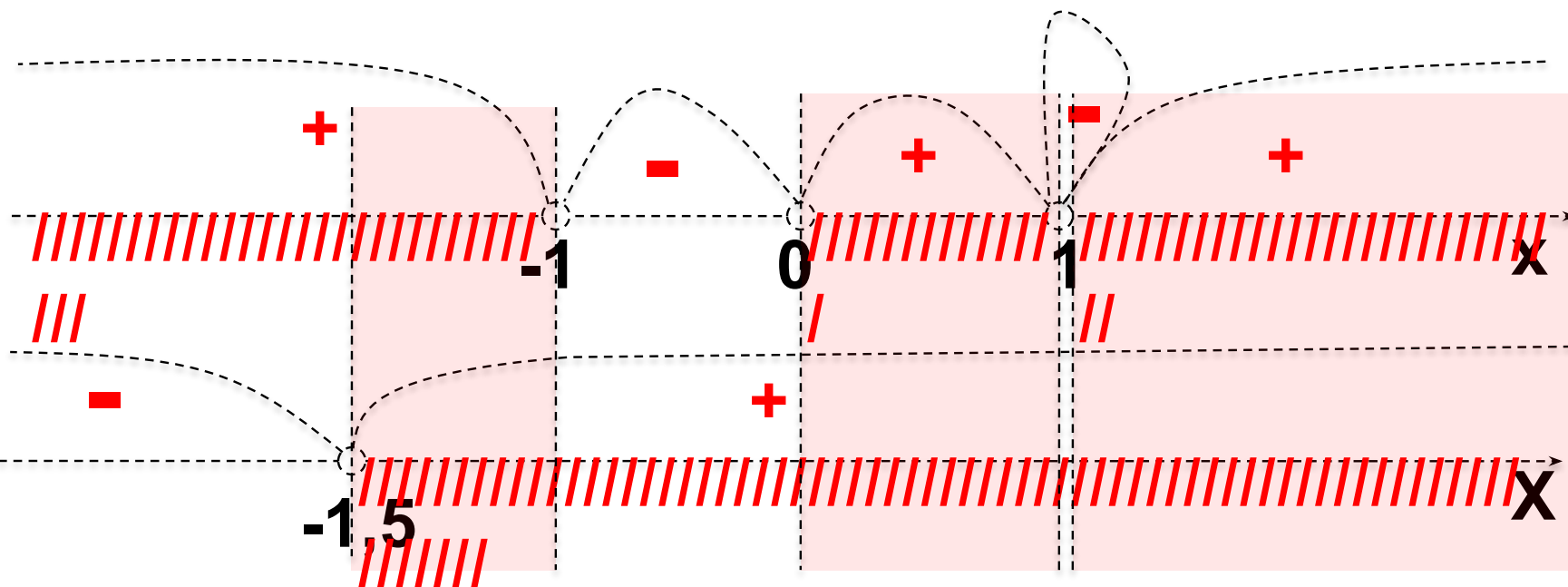
Решение.

Перенеся все слагаемые в левую часть каждого из неравенств исходной системы, перепишем ее в виде

$$\begin{cases} \frac{x^2 - x}{x^2 - 1} > 0, \\ \frac{2009}{2x + 3} > 0. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x(x - 1)}{(x - 1)(x + 1)} > 0, \\ 2009(2x + 3) > 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x(x - 1)^2(x + 1) > 0, \\ (2x + 3) > 0; \end{cases}$$

Пример 3

Продолжение
$$\begin{cases} x(x-1)^2(x+1) > 0, \\ 2x+3 > 0; \end{cases}$$



Ответ: $(-1,5; -1) \cup (0; 1) \cup (1; +\infty)$



Решить дома

$$\frac{1}{x(x+1)} + \frac{1}{(x+1)(x+2)} = \frac{1}{4};$$