

The background of the slide features a close-up photograph of sand dunes. The dunes are characterized by rhythmic, parallel ridges and troughs, creating a textured, wavy pattern. The lighting is warm and directional, casting soft shadows that emphasize the three-dimensional quality of the sand's surface. The overall color palette is a range of warm browns and oranges, from deep, dark shadows to bright, golden highlights.

Идея линейности и
ограниченности

Задание 1.

Решить уравнение

$$\sqrt{3 - \operatorname{tg}^{-1} \frac{3\pi x}{2}} \sin \pi x - \cos \pi x = 2$$

Линейное уравнение

$$a = \sqrt{3 - \operatorname{tg}^2 \frac{3\pi x}{2}}; \quad b = -1; \quad c = 2$$

$$\sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{4 - \operatorname{tg}^2 \frac{3\pi x}{2}}$$

$$\sqrt{4 - \operatorname{tg}^2 \frac{3\pi x}{2}} \left(\frac{3 - \operatorname{tg}^2 \frac{3\pi x}{2}}{\sqrt{4 - \operatorname{tg}^2 \frac{3\pi x}{2}}} \sin \pi x - \frac{1}{\sqrt{4 - \operatorname{tg}^2 \frac{3\pi x}{2}}} \cos \pi x \right) = 2$$

$$\sqrt{\frac{3 - \operatorname{tg}^2 \frac{3\pi x}{2}}{4 - \operatorname{tg}^2 \frac{3\pi x}{2}}} = \cos \varphi; \quad \frac{1}{\sqrt{4 - \operatorname{tg}^2 \frac{3\pi x}{2}}} = \sin \varphi$$

$$\sqrt{4 - \operatorname{tg}^2 \frac{3\pi x}{2}} \sin(\pi x - \varphi) = 2$$

$$\sin(\pi x - \varphi) = \frac{2}{\sqrt{4 - \operatorname{tg}^2 \frac{3\pi x}{2}}}$$

$$\frac{2}{\sqrt{4 - \operatorname{tg}^2 \frac{3\pi x}{2}}} \leq 1$$

$$\sqrt{4 - \operatorname{tg}^2 \frac{3\pi x}{2}} \geq 2$$

$$\operatorname{tg} \frac{3\pi x}{2} = 0 (!)$$

$$\cos \varphi = \frac{\sqrt{3}}{2}; \quad \sin \varphi = \frac{1}{2}$$

$$\varphi = \frac{\pi}{6}$$

$$\sin\left(\pi x - \frac{\pi}{6}\right) = 1$$

$$\pi x - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{2} + 2\pi k$$

$$x = \frac{2}{3} + 2k, \quad k \in \mathbf{Z}$$

Задание 2.

Решить уравнение

$$\operatorname{tg}^4 x + \operatorname{tg}^4 y + 2\operatorname{ctg}^2 x \cdot \operatorname{ctg}^2 y = 3 + \sin^2(x + y)$$

Используя неравенство Коши, имеем:

$$\operatorname{tg}^4 x + \operatorname{tg}^4 y + 2\operatorname{ctg}^2 x \cdot \operatorname{ctg}^2 y = 2 \frac{\operatorname{tg}^4 x + \operatorname{tg}^4 y}{2} +$$

$$+ 2\operatorname{ctg}^2 x \cdot \operatorname{ctg}^2 y \geq 2\sqrt{\operatorname{tg}^4 x \cdot \operatorname{tg}^4 y} + 2\operatorname{ctg}^2 x \cdot \operatorname{ctg}^2 y =$$

$$= 2(\operatorname{tg}^2 x \cdot \operatorname{tg}^2 y + \operatorname{ctg}^2 x \cdot \operatorname{ctg}^2 y) = 4 \frac{\operatorname{tg}^2 x \cdot \operatorname{tg}^2 y + \operatorname{ctg}^2 x \cdot \operatorname{ctg}^2 y}{2} \geq$$

$$\geq 4\sqrt{\operatorname{tg}^2 x \cdot \operatorname{tg}^2 y \cdot \operatorname{ctg}^2 x \cdot \operatorname{ctg}^2 y} = 4.$$

Поэтому $\operatorname{tg}^4 x + \operatorname{tg}^4 y + 2\operatorname{ctg}^2 x \cdot \operatorname{ctg}^2 y \geq 4$.

С другой стороны, очевидно

$$3 + \sin^2(x + y) \leq 4.$$

Данное уравнение имеет решение тогда и только тогда, когда обе части равны 4.

Поэтому данное уравнение равносильно следующей системе уравнений:

$$\begin{cases} \operatorname{tg}^4 x + \operatorname{tg}^4 y + 2\operatorname{ctg}^2 x \cdot \operatorname{ctg}^2 y = 4, & (*) \\ 3 + \sin^2(x + y) = 4, & (**) \end{cases}$$

Из уравнения (***) имеем

$$\sin^2(x + y) = 1 \quad \text{или} \quad \cos(x + y) = 0,$$

откуда

$$x + y = \frac{\pi}{2} + \pi k, \quad k \in \mathbb{Z} \quad \text{или} \quad y = \frac{\pi}{2} - x + \pi k, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Это значение y подставим в уравнение (*).

Получим

$$\operatorname{tg}^4 x + \operatorname{ctg}^4 x + 2\operatorname{tg}^2 x \cdot \operatorname{ctg}^2 x = 4$$

или

$$\left(\operatorname{tg}^2 x + \operatorname{ctg}^2 x\right)^2 = 4,$$

отсюда, так как

$$\operatorname{tg}^2 x + \operatorname{ctg}^2 x > 0,$$

$$\operatorname{tg}^2 x + \operatorname{ctg}^2 x = 2.$$

Решая это уравнение, найдём

$$x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2}, n \in \mathbb{Z}.$$

Тогда

$$\frac{\pi}{2} - \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2}\right) + \pi k = \frac{\pi}{4} + \pi \left(k - \frac{n}{2}\right).$$

Итак, данное уравнение имеет такие решения:

$$x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2}$$

и

$$y = \frac{\pi}{4} + \pi \left(k - \frac{n}{2} \right), \quad n, k \in \mathbb{Z}$$