Идея линейности и ограниченности

Задание 1. Решить уравнеие

$$\sqrt{3 - tg^2\frac{3\pi x}{2}}\sin\pi x - \cos\pi x = 2$$

Линейное уравнение

$$a = \sqrt{3 - \mathrm{tg}^2 \frac{3\pi x}{2}}; \quad b = -1; \quad c = 2$$

$$\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{4-\mathrm{tg}^2\frac{3\pi x}{2}}$$

$$\sqrt{4-\mathrm{tg}^2\frac{3\pi x}{2}}\left(\frac{\sqrt{3-\mathrm{tg}^2\frac{3\pi x}{2}}}{\sqrt{4-\mathrm{tg}^2\frac{3\pi x}{2}}}\sin\pi x-\frac{1}{\sqrt{4-\mathrm{tg}^2\frac{3\pi x}{2}}}\cos\pi x\right)=2$$

$$\sqrt{\frac{3-\mathrm{tg}^2\dfrac{3\pi x}{2}}{4-\mathrm{tg}^2\dfrac{3\pi x}{2}}}=\cos\varphi;\qquad \frac{1}{\sqrt{4-\mathrm{tg}^2\dfrac{3\pi x}{2}}}=\sin\varphi$$

$$\sqrt{4-\mathrm{tg}^2\frac{3\pi x}{2}}\,\sin(\pi x-\varphi)=2$$

$$\sin\left(\pi x-\varphi\right)=\frac{2}{\sqrt{4-\operatorname{tg}^2\frac{3\pi x}{2}}}$$

$$\frac{2}{\sqrt{4-\operatorname{tg}^2\frac{3\pi x}{2}}}\leq 1$$

$$\sqrt{4-\operatorname{tg}^2\frac{3\pi x}{2}}\geq 2$$

$$\operatorname{tg}^2\frac{3\pi x}{2}=0\ (!)$$

$$\cos\varphi = \frac{\sqrt{3}}{2}; \quad \sin\varphi = \frac{1}{2}$$

$$\varphi = \frac{\pi}{6}$$

$$\sin\left(\pi x - \frac{\pi}{6}\right) = 1$$

$$\pi x - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{2} + 2\pi k$$

$$x = \frac{2}{3} + 2k,\ k \in \mathbf{Z}$$

Задание 2. Решить уравнеие

$$\mathrm{tg}^4 x + \mathrm{tg}^4 y + 2\mathrm{ctg}^2 x \cdot \mathrm{ctg}^2 y = 3 + \sin^2(x+y)$$

Используя неравенство Коши, имеем:

$$\operatorname{tg}^4 x + \operatorname{tg}^4 y + 2\operatorname{ctg}^2 x \cdot \operatorname{ctg}^2 y = 2\,\frac{\operatorname{tg}^4 x + \operatorname{tg}^4 y}{2} +$$

$$+ 2\operatorname{ctg}^2 x \cdot \operatorname{ctg}^2 y \geq 2\sqrt{\operatorname{tg}^4 x \cdot \operatorname{tg}^4 y} + 2\operatorname{ctg}^2 x \cdot \operatorname{ctg}^2 y =$$

$$= 2(\operatorname{tg}^2 x \cdot \operatorname{tg}^2 y + \operatorname{ctg}^2 x \cdot \operatorname{ctg}^2 y) = 4\,\frac{\operatorname{tg}^2 x \cdot \operatorname{tg}^2 y + \operatorname{ctg}^2 x \cdot \operatorname{ctg}^2 y}{2} \geq$$

$$\geq 4\sqrt{\operatorname{tg}^2 x \cdot \operatorname{tg}^2 y \cdot \operatorname{ctg}^2 x \cdot \operatorname{ctg}^2 y} = 4.$$

Поэтому $$\mathrm{tg}^4 x + \mathrm{tg}^4 y + 2\mathrm{ctg}^2 x \cdot \mathrm{ctg}^2 y \geq 4.$$

С другой стороны, очевидно

$$3 + \sin^2(x+y) \leq 4.$$

Данное уравнение имеет решение тогда и только тогда, когда обе части равны 4.

Поэтому данное уравнение равносильно следующей системе уравнений:

$$\begin{cases} \mathrm{tg}^4 x + \mathrm{tg}^4 y + 2\mathrm{ctg}^2 x \cdot \mathrm{ctg}^2 y = 4, & (*) \\ 3 + \sin^2(x+y) = 4, & (**) \end{cases}$$

Из уравнения (**) имеем

$$\sin^2(x+y)=1 \quad \text{или} \quad \cos(x+y)=0,$$

откуда

$$x+y=\frac{\pi}{2}+\pi k,\quad k\in Z \quad \text{или} \quad y=\frac{\pi}{2}-x+\pi k,\quad k\in Z.$$

Это значение y подставим в уравнение (*).

Получим $\operatorname{tg}^4 x + \operatorname{ctg}^4 x + 2\operatorname{tg}^2 x \cdot \operatorname{ctg}^2 x = 4$

или $\left(\operatorname{tg}^2 x + \operatorname{ctg}^2 x\right)^2 = 4,$

отсюда, так как $\operatorname{tg}^2 x + \operatorname{ctg}^2 x > 0,$

$$\operatorname{tg}^2 x + \operatorname{ctg}^2 x = 2.$$

Решая это уравнение, найдём $x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2}, n \in Z.$

Тогда $y = \frac{\pi}{2} - \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2}\right) + \pi k = \frac{\pi}{4} + \pi\left(k - \frac{n}{2}\right).$

Итак, данное уравнение имеет такие решения:

$$x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2}$$

и

$$y = \frac{\pi}{4} + \pi\left(k - \frac{n}{2}\right), \quad n, k \in Z$$