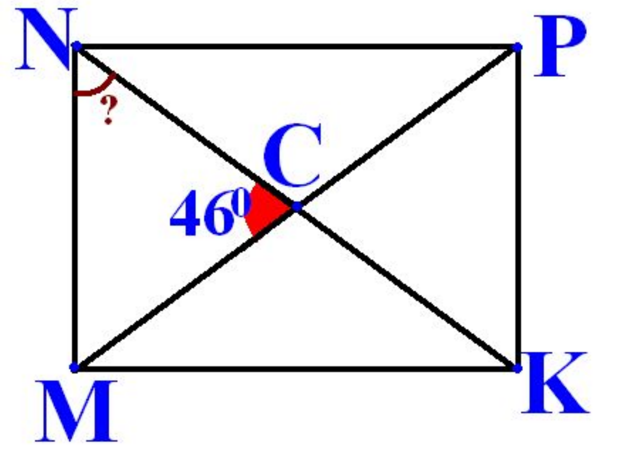
Геометрия, 9 класс.

1



Диагонали прямоугольника KMNP пересекаются в точке С.Найдите угол MNC, если угол MCN равен 46^0 .

Решение:

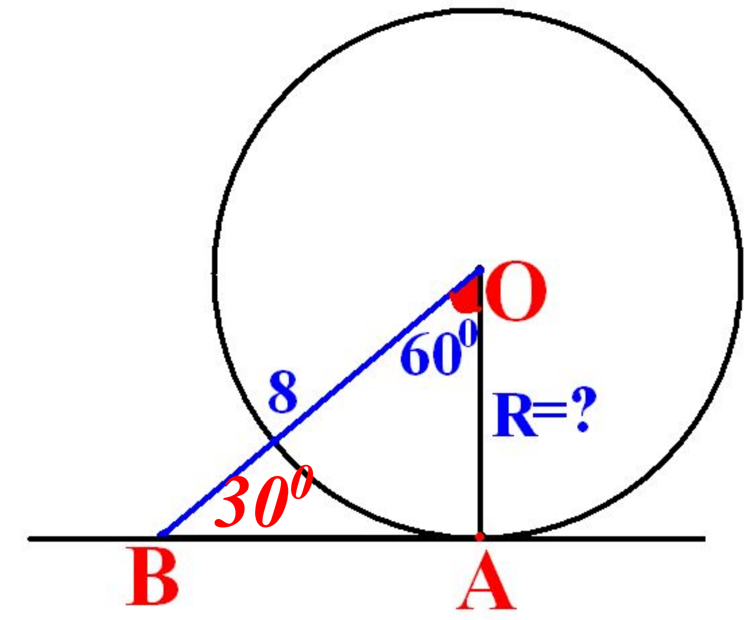
В прямоугольнике диагонали равны и точкой пересечения делятся пополам, значит NC=CM, то есть треугольник MCN-равнобедренный. А в равнобедренном треугольнике углы при основании равны. Следовательно углы MNC и NMC равны. А так как сумма углов треугольника равна 180^0, то:

$$\angle MNC = \angle NMC = \frac{180^0 - 46^0}{2} = \frac{134^0}{2} = 67^0$$

Ответ: 67^0

2

- *Через точку А окружности с центром О проведена касательная АВ. Найдите радиус окружности, если ОВ=8,угол АОВ равен 60^0.*



Решение: $\angle B = 90^0 - 60^0 = 30^0$

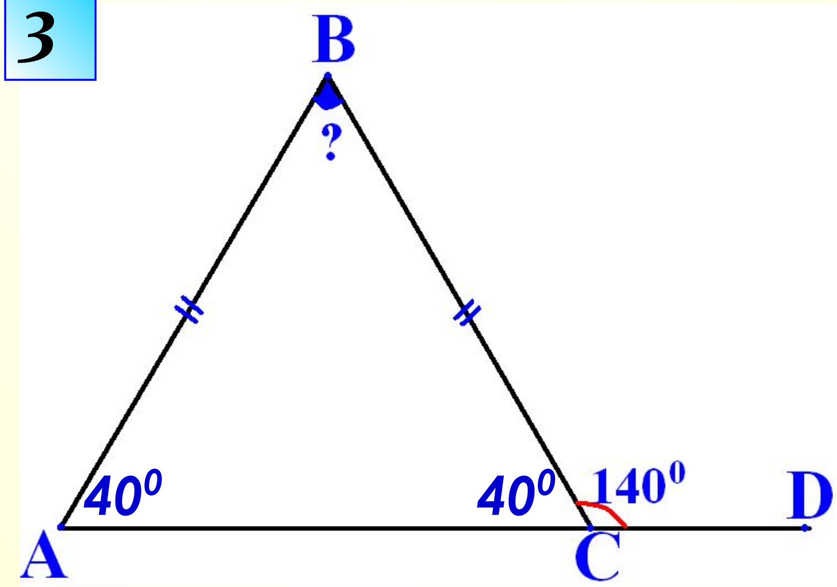
-так как сумма острых углов треугольника равна 90^o.

$$R = \frac{BD}{2} = \frac{8}{2} = 4$$

-так как катет, лежащий напротив угла в 30^o равен половине гипотенузы.

Ответ: 4

3



- **Внешний угол при основании равнобедренного треугольника равен 140^0. Найдите угол между боковыми сторонами этого треугольника.**

Решение:

Углы ВСА и BCD-смежные, а сумма смежных углов равна 180^0.

$$\angle BCA = 180^0 - 140^0 = 40^0$$

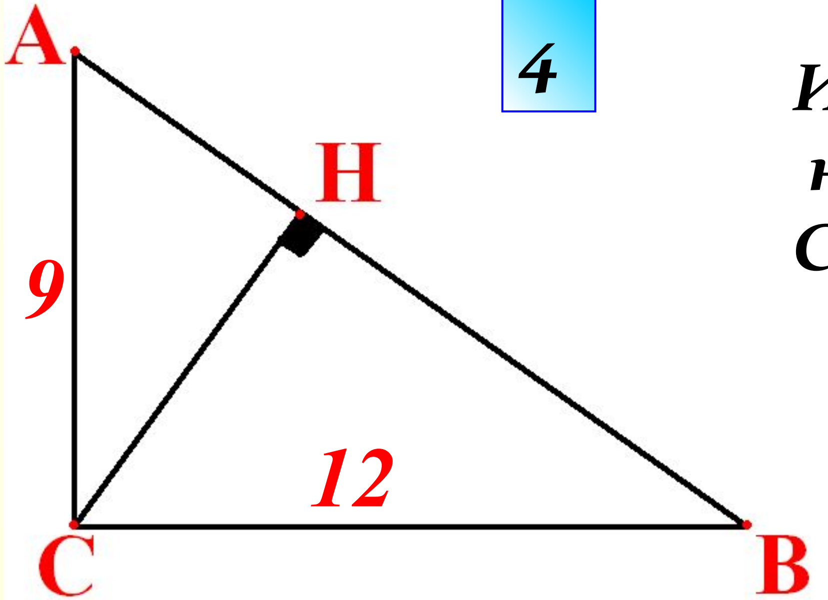
$$\angle BAC = \angle BCA = 40^0$$

-как углы при основании равнобедренного треугольника.

$$\angle B = 180^0 - \left(40^0 + 40^0\right) = 100^0$$

-так как сумма углов треугольника равна 180^0.

Ответ: 100^0



4

Используя данные, указанные на рисунке, найдите высоту CH.

Решение:

1).***Из*** $\Delta ABC, \quad \angle ACB = 90^0$,

по теореме Пифагора:

$$AB = \sqrt{AC^2 + BC^2} = \sqrt{9^2 + 12^2} = \sqrt{81+144} = \sqrt{225} = 15$$

-в прямоугольном треугольнике квадрат гипотенузы равен сумме квадратов катетов.

2). $S_{ABC} = \frac{1}{2} AC \cdot BC = \frac{1}{2} AB \cdot CH \Rightarrow AC \cdot BC = AB \cdot CH \Rightarrow$

$$CH = \frac{AC \cdot BC}{AB} = \frac{9 \cdot 12}{15} = \frac{36}{5} = 7{,}2$$

Ответ:7,2

5 **Длина окружности равна 29π. Найдите радиус этой окружности.**

Решение.

$C = 2\pi R$

$C = 29\pi$

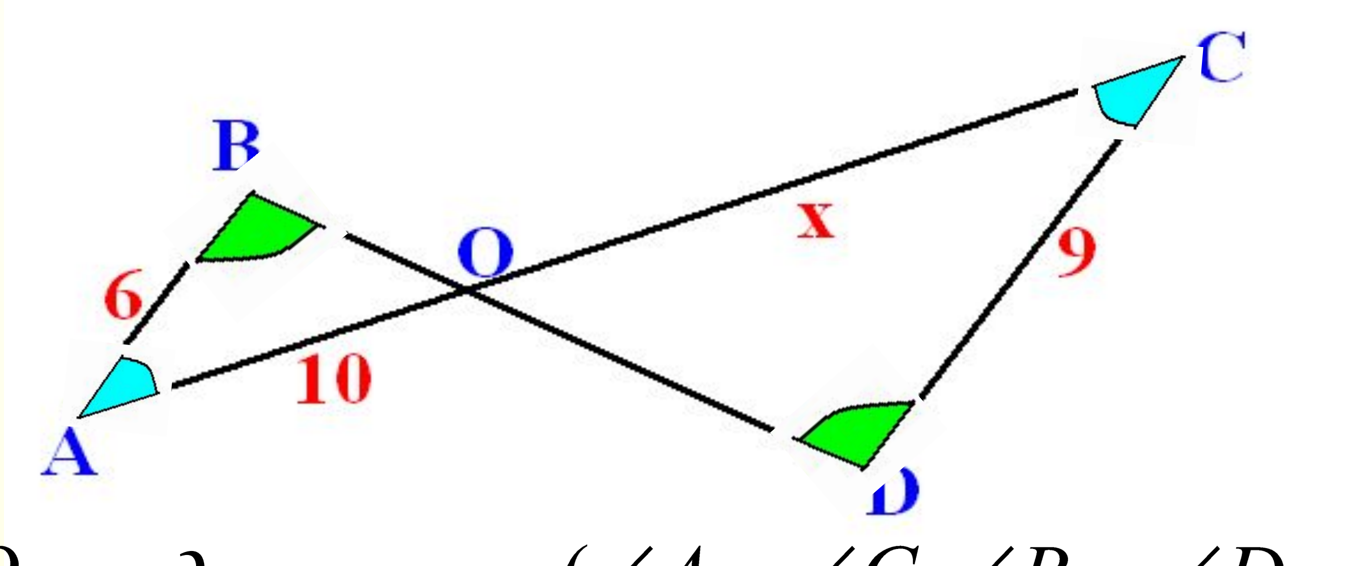
$$\Rightarrow 2\pi R = 29\pi \quad \Rightarrow$$

$$2R = 29$$

$$R = \frac{29}{2}; \qquad R = 14{,}5$$

Ответ: 14,5

6 ***Используя данные, указанные на рисунке, найдите АС, если известно, что АВ||CD.***



Решение.

$\Delta ABO \infty \Delta CDO$ ***-по двум углам,*** $(\angle A = \angle C, \angle B = \angle D$ ***- как накрест лежащие, при параллельных прямых АВ и CD и секущих АС и BD). Из подобия следует:***

$$\frac{AB}{CD} = \frac{AO}{CO} \Big| \Rightarrow CO = \frac{CD \cdot AO}{AB};$$

$CO = \frac{9 \cdot 10}{6} = 15$ ***; AC=AO+OC=10+15=25***

Ответ:25

7 ***Найдите боковую сторону равнобедренной трапеции, если её основания равны 9 и 19,а высота равна 12.***

Решение.

1). ***Построим высоты BH и BN, получим прямоугольник HBCN.*** ***В нём HN=BC=9.***

2). $\Delta ABH = \Delta DCN$ ***- по гипотенузе и острому углу.***

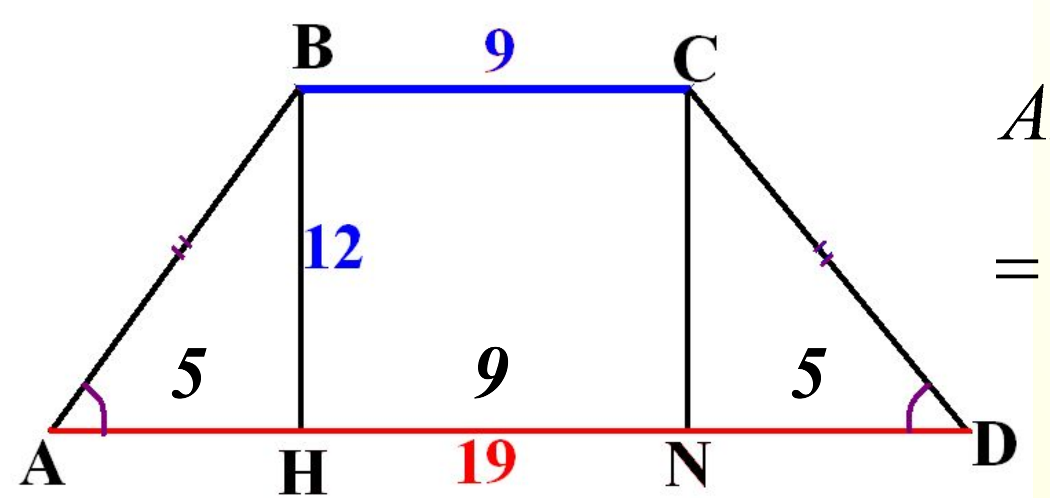
Из равенства следует: $AH = DN = \dfrac{(19-9)}{2} = 5$

3).***Из*** ΔABH , $\angle H = 90^0$ ***, по теореме Пифагора:***

$$AB^2 = AH^2 + HB^2$$

$$AB = \sqrt{AH^2 + HB^2} =$$

$$= \sqrt{5^2 + 12^2} = \sqrt{169} = 13$$



Ответ:13

8

В параллелограмме ABCD на стороне BC отмечена точка К так, что ВК=АВ. Найдите $\angle BCD$ ***, если*** $\angle KAD = 20^0$.

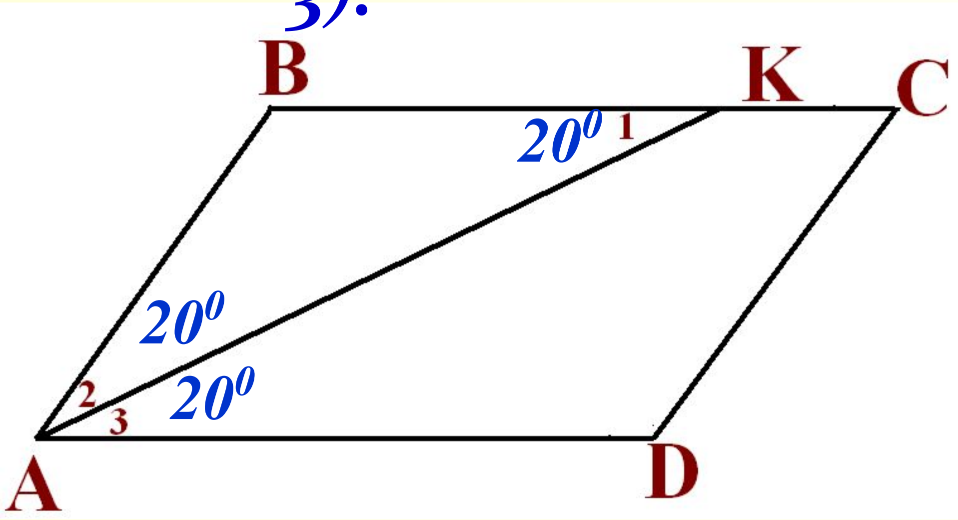
Решение.

1). ***В*** ΔABK ***AB=BK ,*** $\Rightarrow \angle 1 = \angle 2,$ ***как углы при основании равнобедренного треугольника.***

2). $\angle 1 = \angle 3 = 20^0,$ ***-как накрестлежащие, при параллельных прямых AD и BC и секущей AK.***

$$\left.\begin{aligned}\angle 1 = \angle 2,\\ \angle 1 = \angle 3 = 20^0,\end{aligned}\right| \Rightarrow \angle 3 = \angle 2 = 20^0, \angle BAD = \angle 2 + \angle 3 = 40^0$$

3). $\angle BAD = \angle BCD = 40^0$ ***-так как в параллелограмме противоположные углы равны.***



Ответ: 40^0

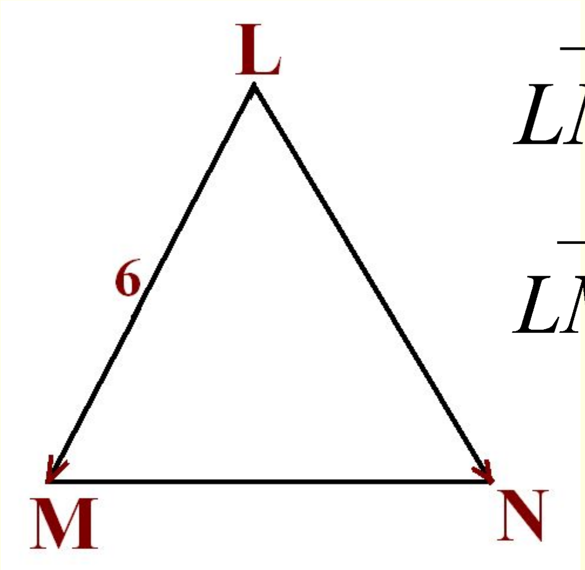
9

Сторона равностороннего треугольника MLN равна 6см. Найдите скалярное произведение векторов

$\vec{LM}$ ***и*** $\vec{LN}$.

Решение.

В равностороннем треугольнике все углы по 60°.

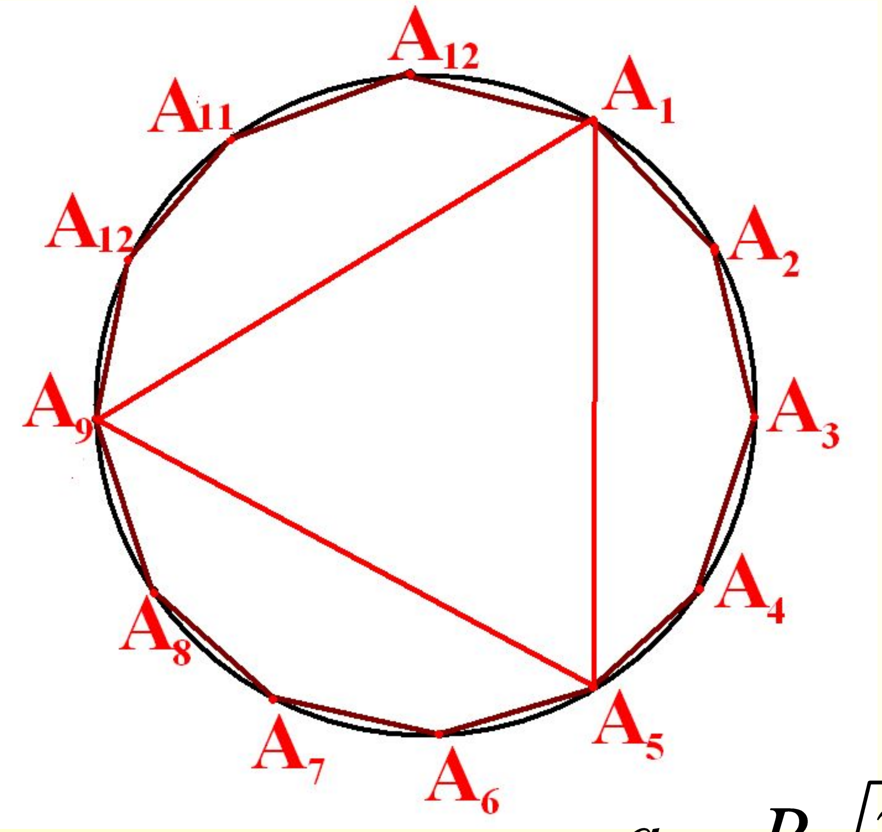


$$\vec{LM} \cdot \vec{LN} = |\vec{LM}| \cdot |\vec{LN}| \cdot \cos \angle L$$

$$\vec{LM} \cdot \vec{LN} = 6^2 \cdot \cos 60^0 = 36 \cdot \frac{1}{2} = 18$$

Ответ: 18

10 Радиус окружности ,описанной около правильного двенадцатиугольника $A_1A_2A_3A_4A_5A_6A_7A_8A_9A_{10}A_{11}A_{12}$ равен $5\sqrt{3}$. Найдите длину диагонали A_1A_5.



Решение.

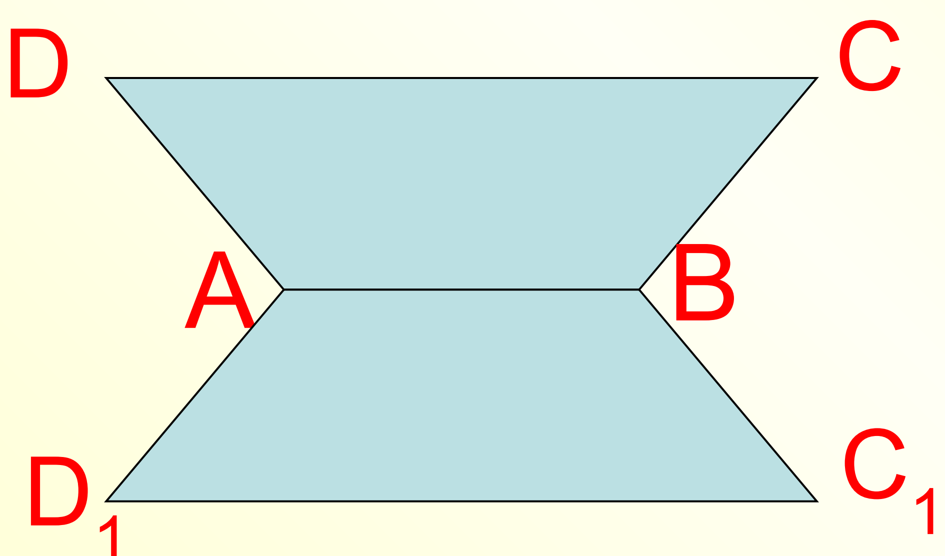
A_1A_5-сторона правильного треугольника, вписанного в окружность. Найдем её по формуле:

$$\left.\begin{array}{l} a = R\sqrt{3} \\ R = 5\sqrt{3} \end{array}\right| \Rightarrow A_1A_5 = a = 5\sqrt{3}\cdot\sqrt{3} = 15$$

Ответ: 15

11

Имеется лист фанеры прямоугольной формы, длина и ширина которого соответственно равны 10дм и 5дм.Из него, как показано на рисунке, вырезаны две одинаковые части в форме равнобедренных треугольников. Сколько кг краски потребуется , чтобы покрасить получившуюся фигуру, если длина отрезка AB =6дм, а на 1дм² поверхности расходуется 0,012 кг краски?



Решение.

1). Площадь фигуры равна сумме площадей двух равных трапеций ABCD и ABC_1D_1.

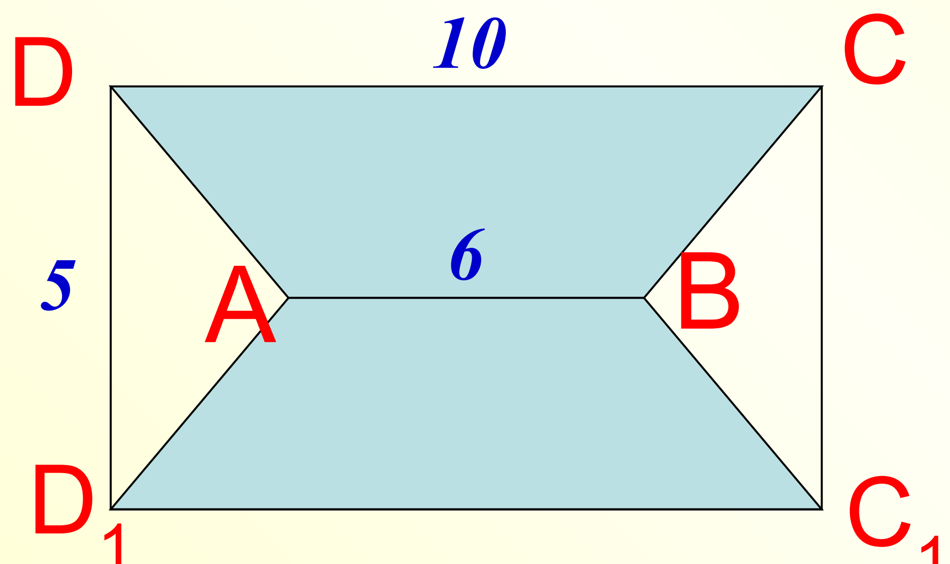
Высота каждой трапеции h=5:2=2,5.

2). $S_{ABCD} = \frac{(AB+CD)}{2} \cdot h,\ S_{ABCD} = \frac{(6+10)}{2} \cdot 2{,}5 = 8 \cdot 2{,}5 = 20$

3). $S_{фигуры} = 20+20=40(дм^2)$

4). $40 \cdot 0{,}012 = 0{,}48$ *(кг)-потребуется краски.*

Ответ:0,48кг



12

Укажите, какие из перечисленных ниже утверждений верны.

1). **Все углы ромба -острые.**

2). **Все высоты ромба равны.**

3). **Диагонали ромба взаимно перпендикулярны.**

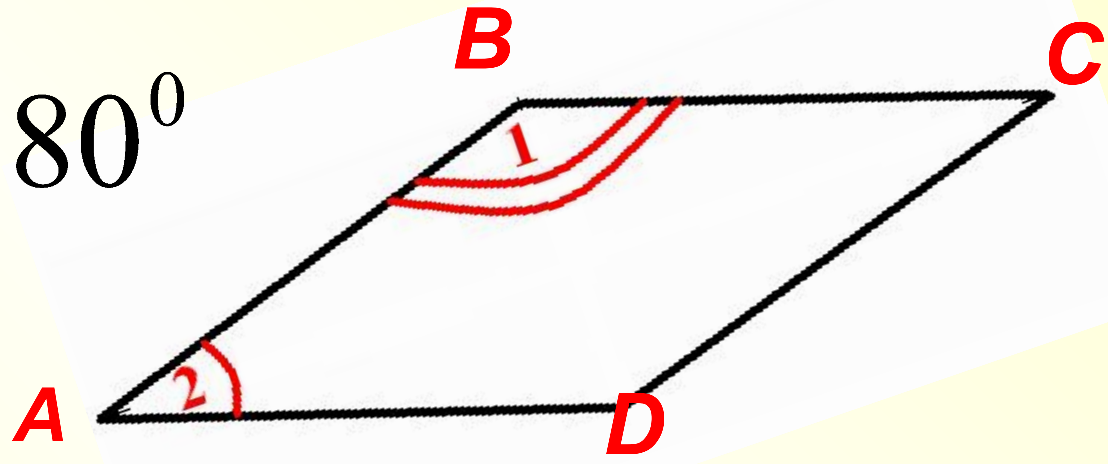
4). **Радиус окружности, вписанной в ромб, равен стороне этого ромба.**

5). **В ромбе с углом 60° одна из диагоналей равна его стороне.**

1). «Все углы ромба - острые» -не верно.

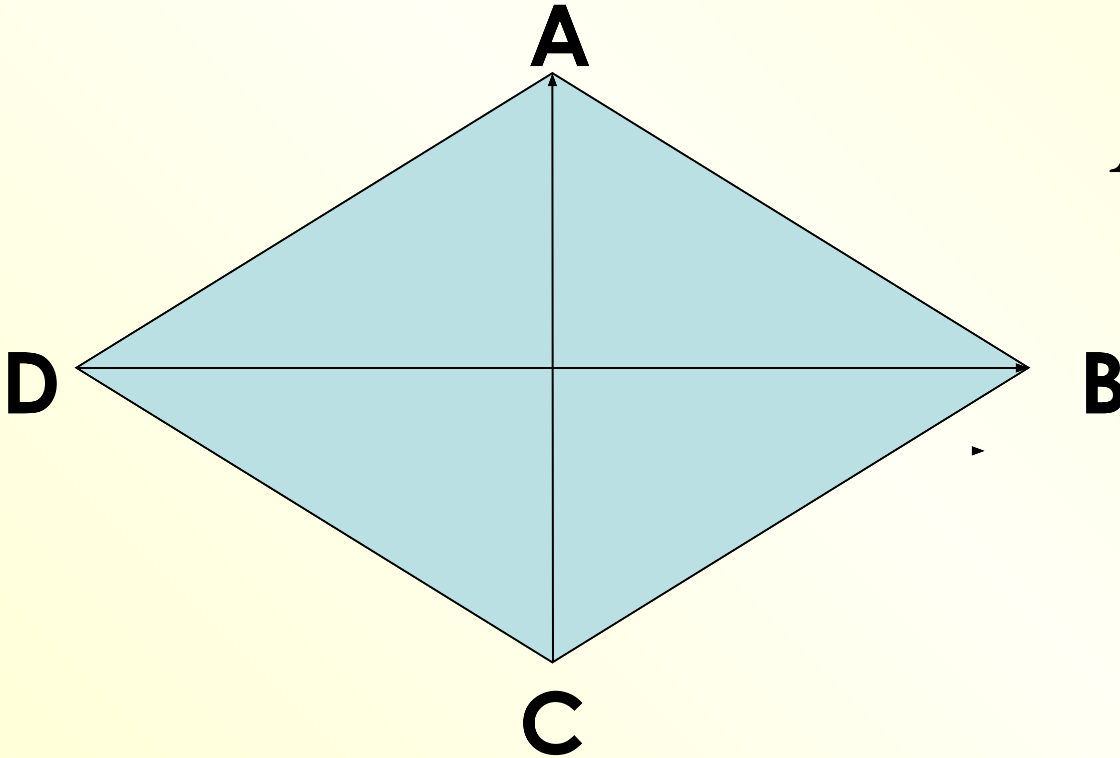
Доказательство.

$$\angle 1+\angle 2=180^{0}$$



- так как $\angle 1$ и $\angle 2$ односторонние при AD||BC и секущей АВ. Если угол 2- острый, то угол 1 будет тупой.

3). «Диагонали ромба взаимно перпендикулярны» - верно, по свойству диагоналей ромба.

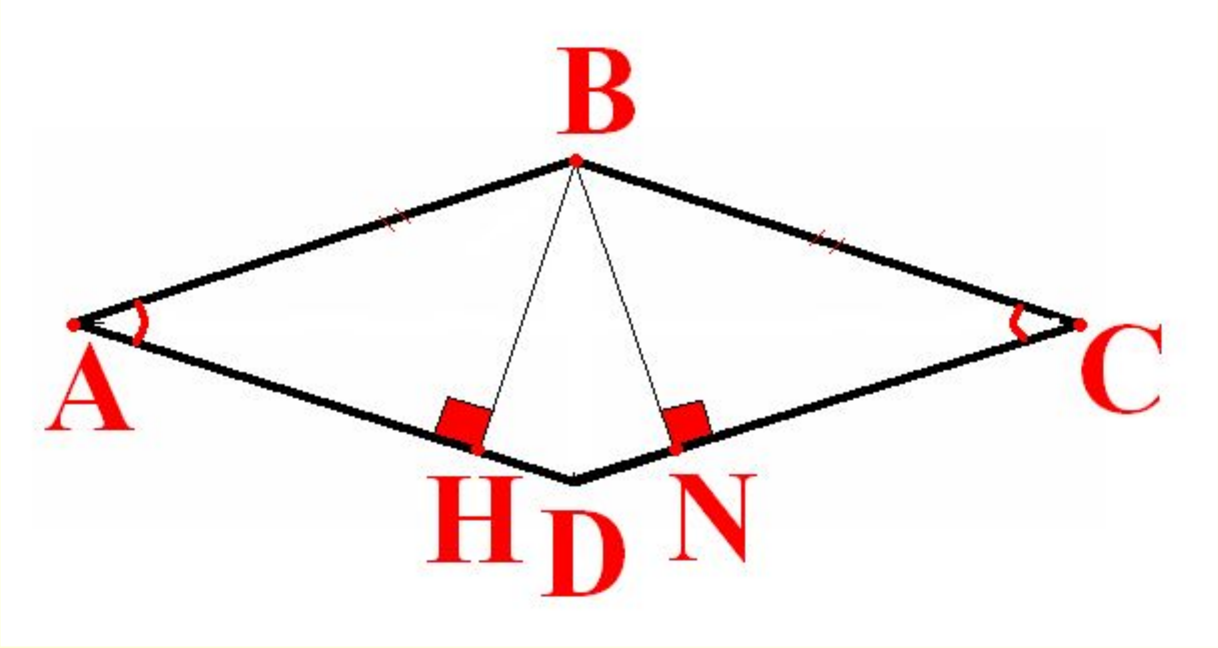


$AC \perp BD$

2). «Все высоты ромба равны»- верно.

Доказательство.

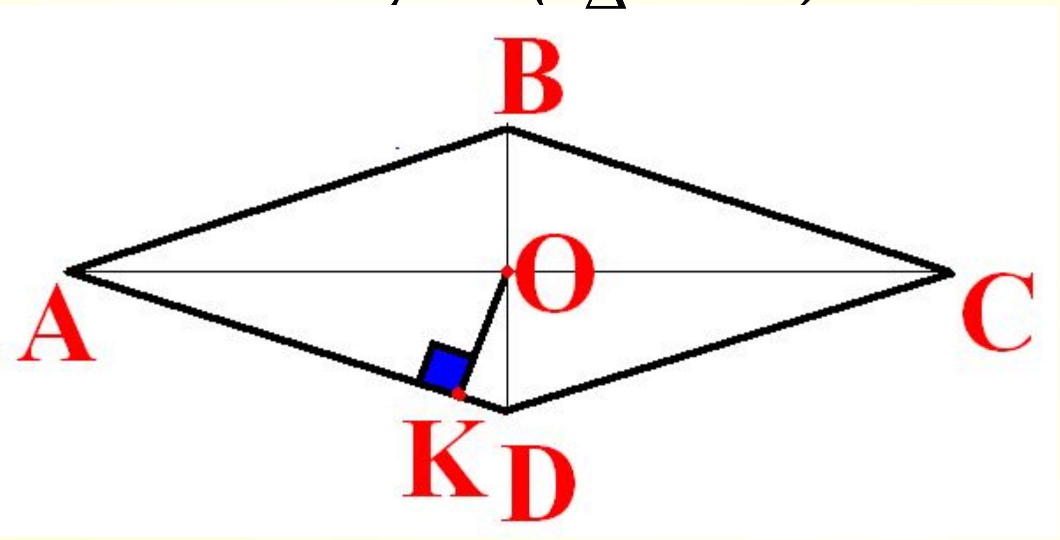
$\Delta ABH = \Delta CBN$ - по гипотенузе и острому углу (AB=BC, т.к. в ромбе все стороны равны, $\angle A = \angle C$, т.к. в ромбе противоположные углы равны.) Из равенства треугольников следует, что BH=BN,так как они лежат напротив равных углов A и C.



4). «Радиус окружности, вписанной в ромб, равен стороне этого ромба»– не верно.

Доказательство.

- Центр окружности, вписанной в ромб, лежит в точке пересечения диагоналей. Из точки O построим перпендикуляр OK к стороне AD. OK-радиус вписанной в ромб окружности.
- OK<OD,так как перпендикуляр-это кратчайшее расстояние от точки до прямой.
- OD<AD , так как в прямоугольном треугольнике катет всегда меньше гипотенузы. (∆ AOD)
- Следовательно OK



5). «*В ромбе с углом 6о° одна из диагоналей равна его стороне»* - *(верно)*

Доказательство.

Сумма углов треугольника равна 180^0 градусов, значит:

$$\angle 1 + \angle 2 = 180^0 - 60^0 = 120^0$$

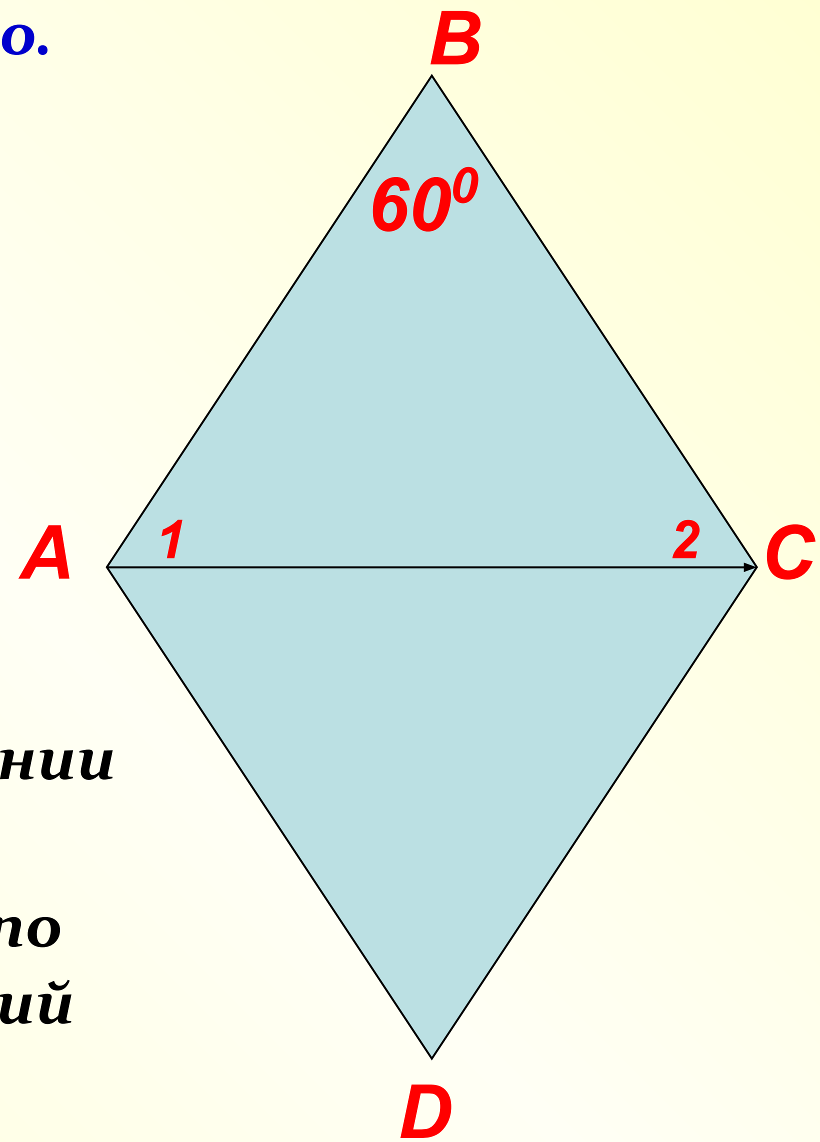
AB=BC, значит:

$$\angle 1 = \angle 2 = \frac{120^0}{2} = 60^0$$

- так как в равнобедренном треугольнике углы при основании равны.

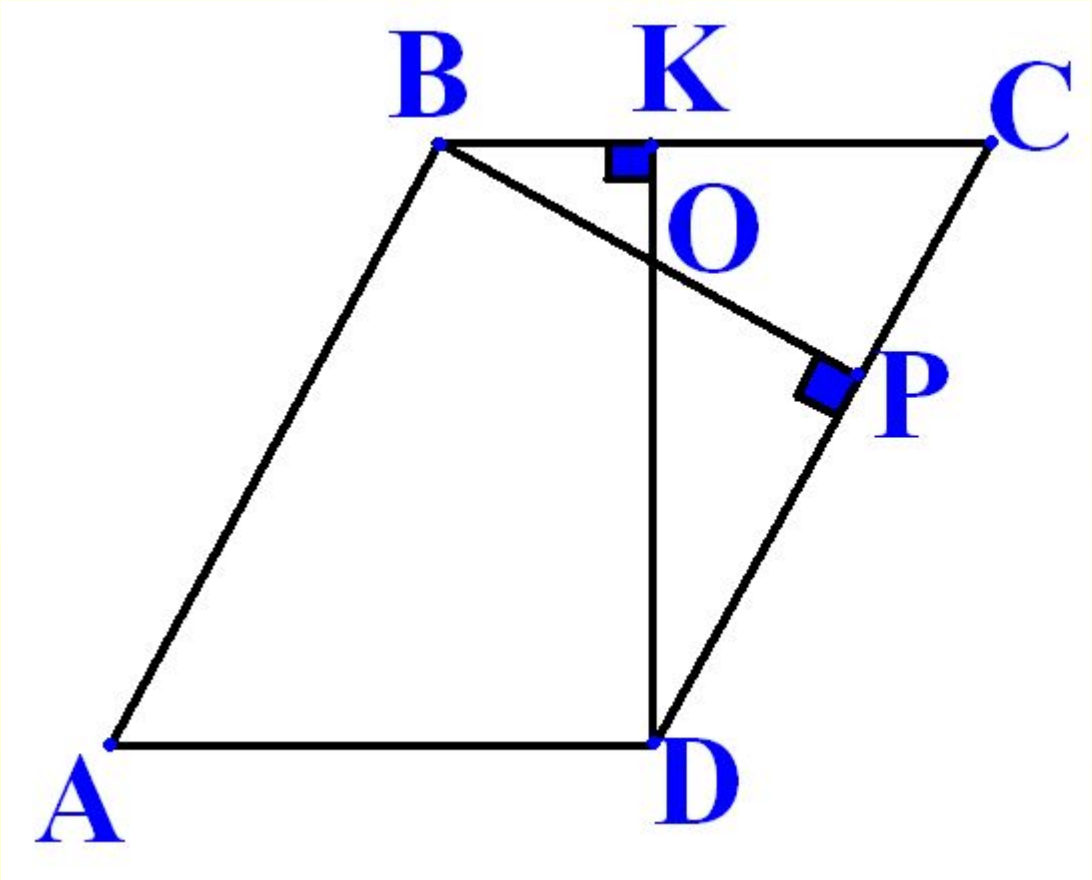
В треугольнике ABC все углы по 6о°, значит он равносторонний

и AC=AB=CB.



13

BPи DK- высоты параллелограмма ABCD, проведенные из вершины тупых углов, причем точка P лежит между точками B и C. Отрезки BP и DK пересекаются в точке O. Докажите, что треугольники CKD и CPB подобны, а углы KOB и BCD равны.

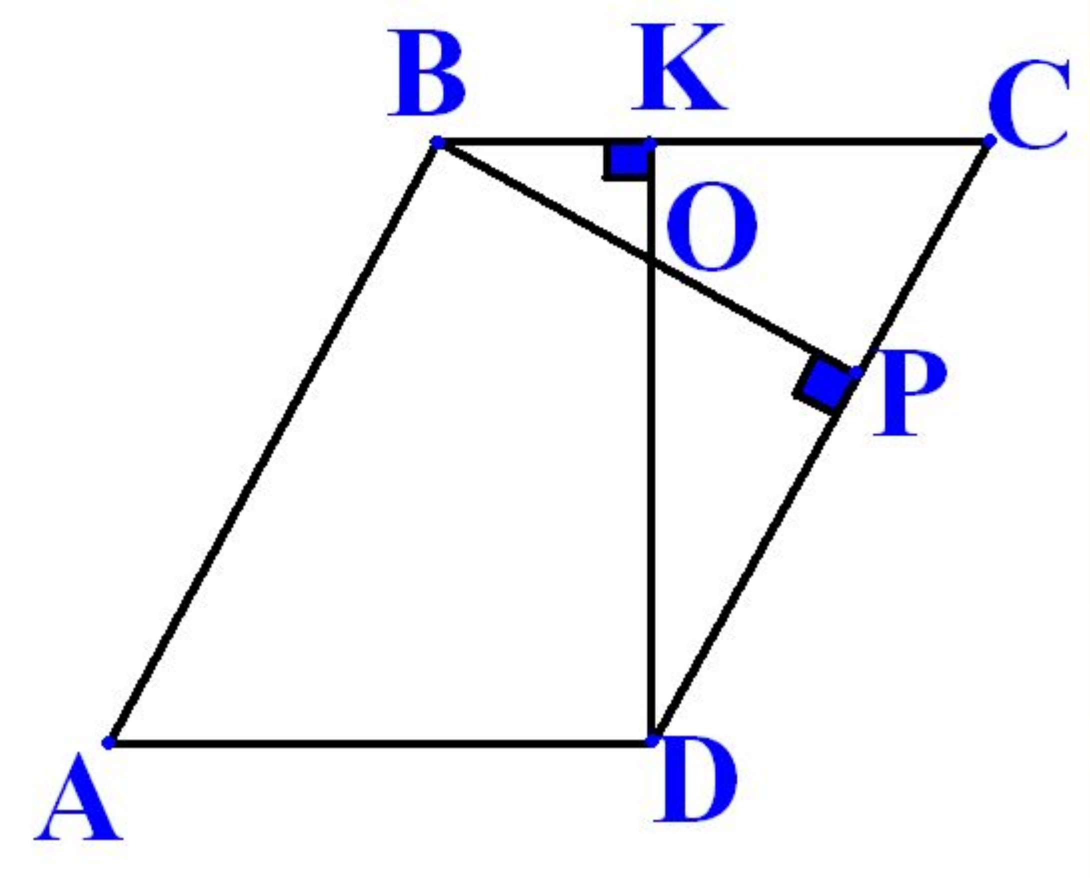


$\Delta CKD \infty \Delta CPB$ **- по двум углам,**

(по 1-му признаку подобия).

$\angle C$ **-общий,** $\angle BPC = \angle DKC = 90^0,$

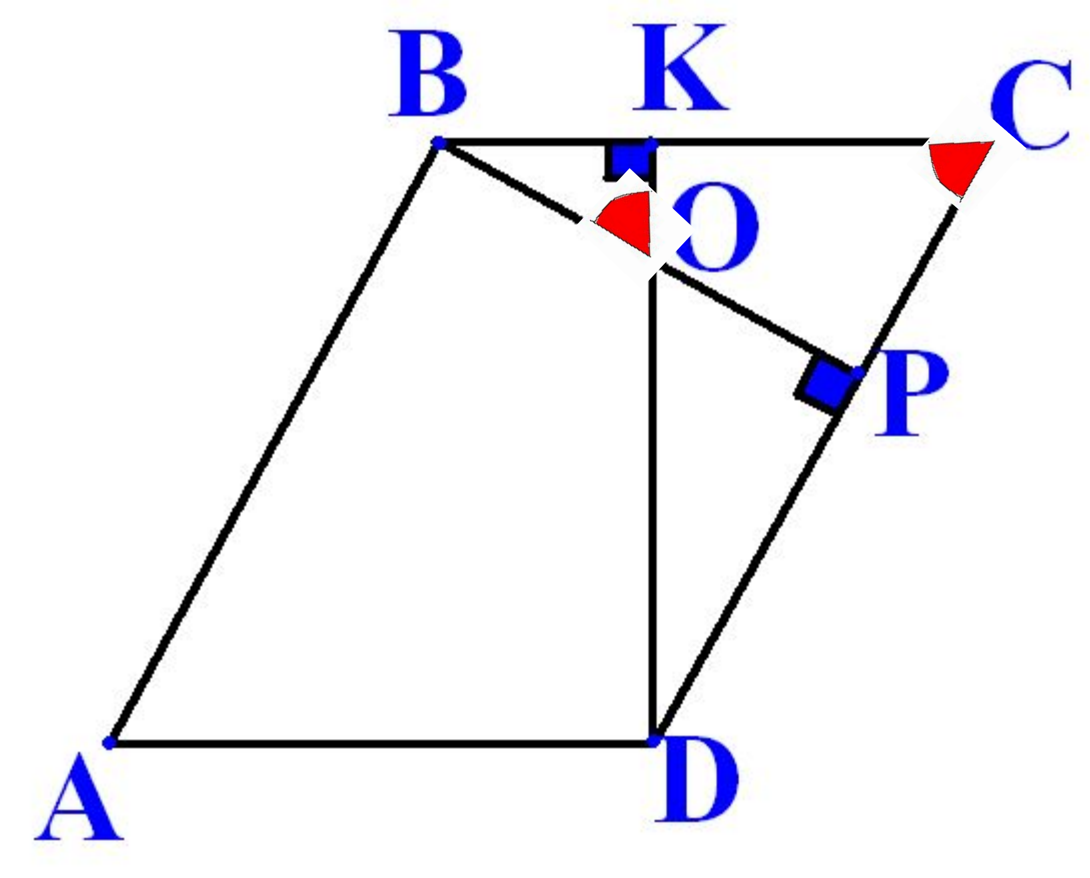
так как DK и BP-высоты.



$OK \perp CB, OB \perp CD$, **так как отрезки**

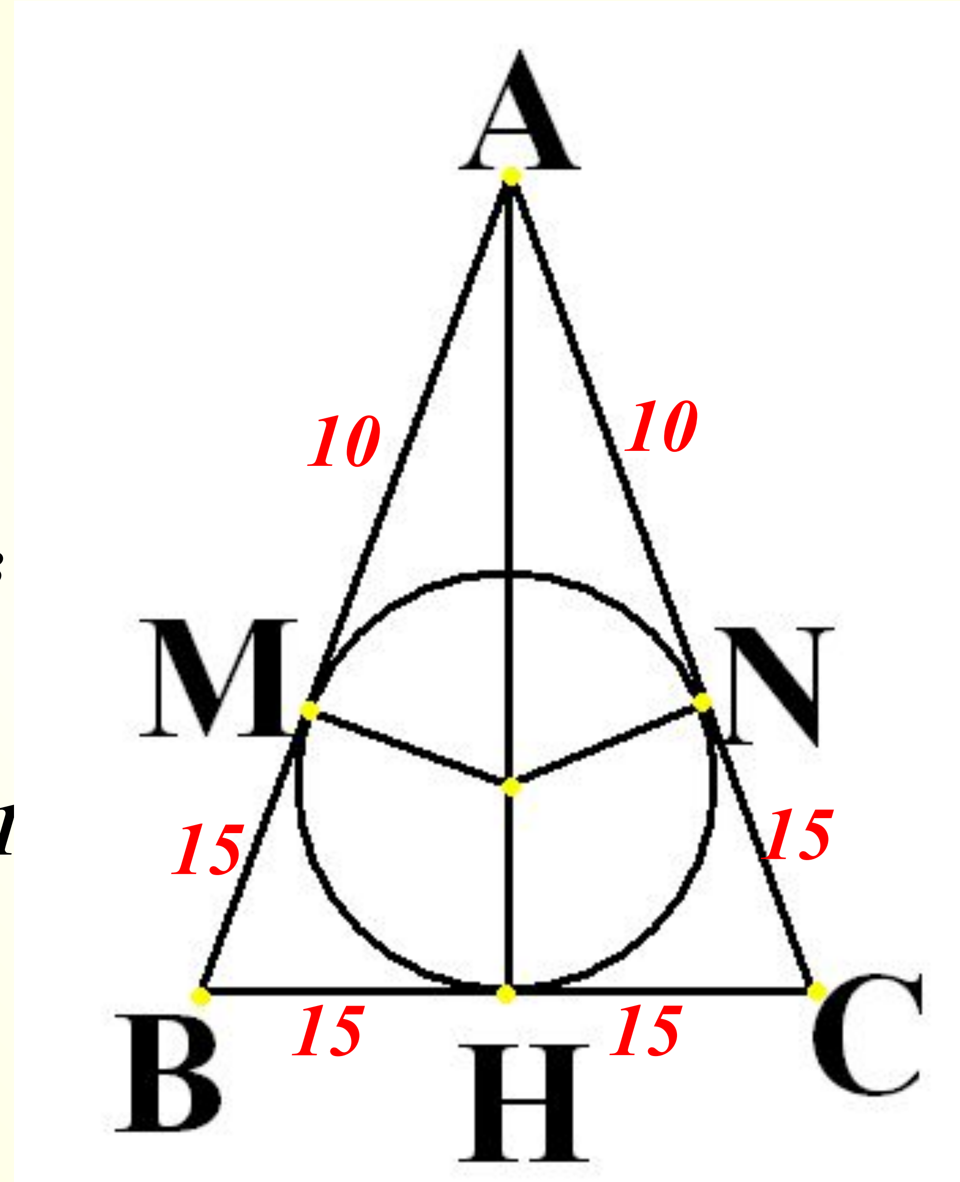
OK и OB лежат на высотах DK и BP

$\angle KOB = \angle BCD$, **так как, если стороны одного угла перпендикулярны сторонам другого угла, то такие углы равны.**

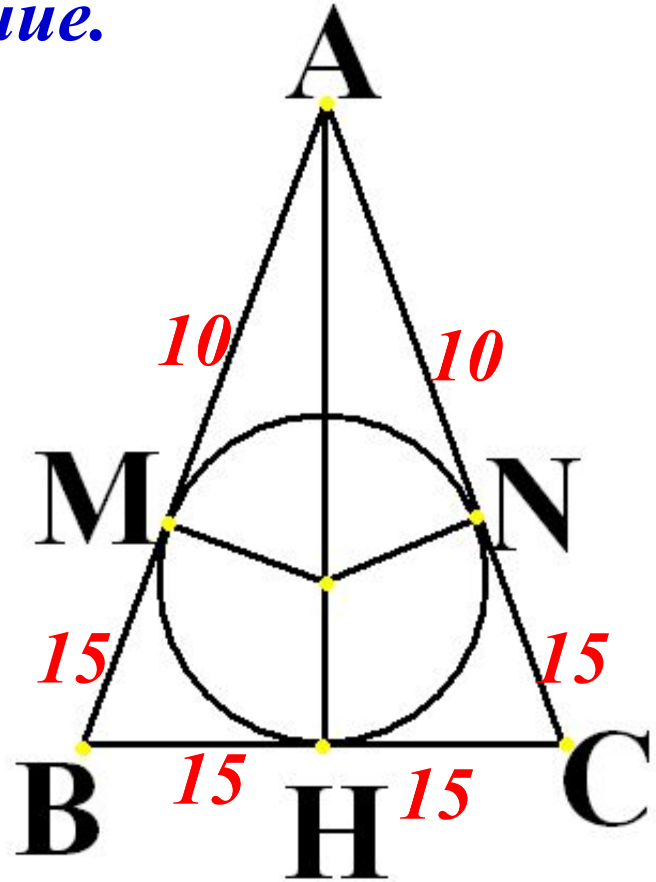


14

В равнобедренный треугольник ABC с основанием BC вписана окружность. Она касается стороны AB в точке M. Найдите радиус этой окружности, если AM=1
и BM=15.



Решение.



1). Пусть окружность касается сторон треугольника в точках M,H и N, тогда AM= AN=10, BM=BH=15, как отрезки касательных, проведенных из одной точки.

2). AB=AM+BM=10+15=25

3).AC= AB=25, как боковые стороны равнобедренного треугольника.

4). NC=AC-AN=25-10=15

5). HC=NC=15 -как отрезки касательных, проведенных из одной точки.

5).В $\Delta ABH \quad \angle AHB = 90^0$. **По теореме Пифагора**

$$AB^2=AH^2+BH^2$$

$$AH = \sqrt{AB^2 - BH^2} =$$

$$= \sqrt{25^2 - 15^2} = \sqrt{625 - 225} =$$

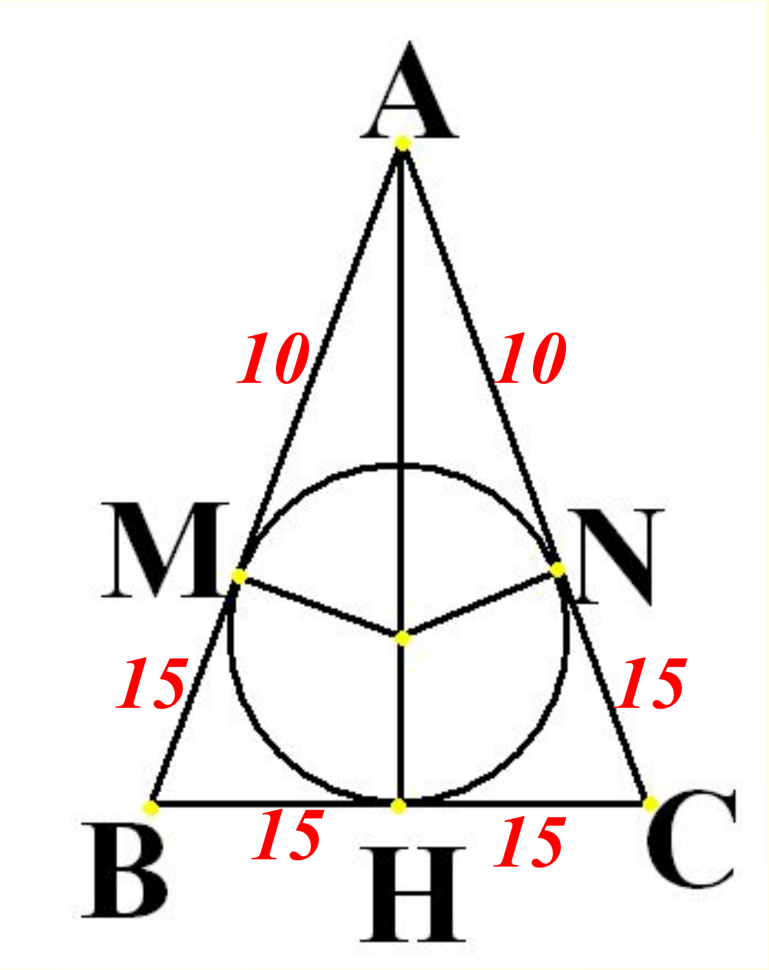
$$= \sqrt{400} = 20$$

6).BC=BH+HC=15+15=30

7). $S_{ABC} = \frac{1}{2} BC \cdot AH$

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot 30 \cdot 20 = 300$$

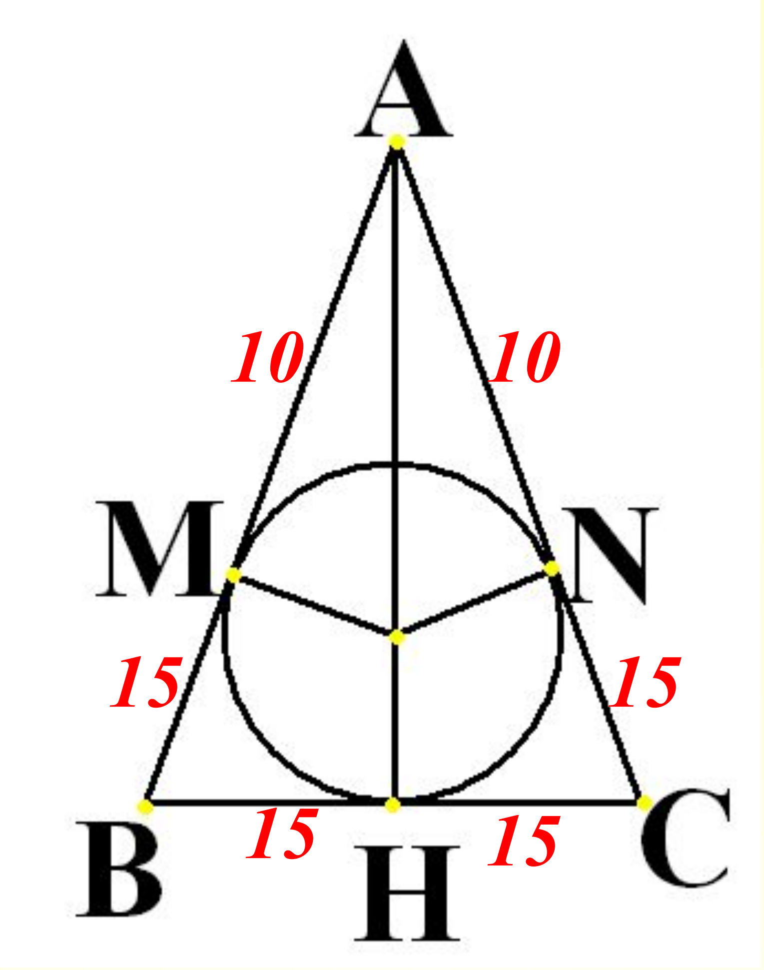
8).P=AB+AC+BC=25+25+30=80



9). $$S = \frac{1}{2} P \cdot r$$

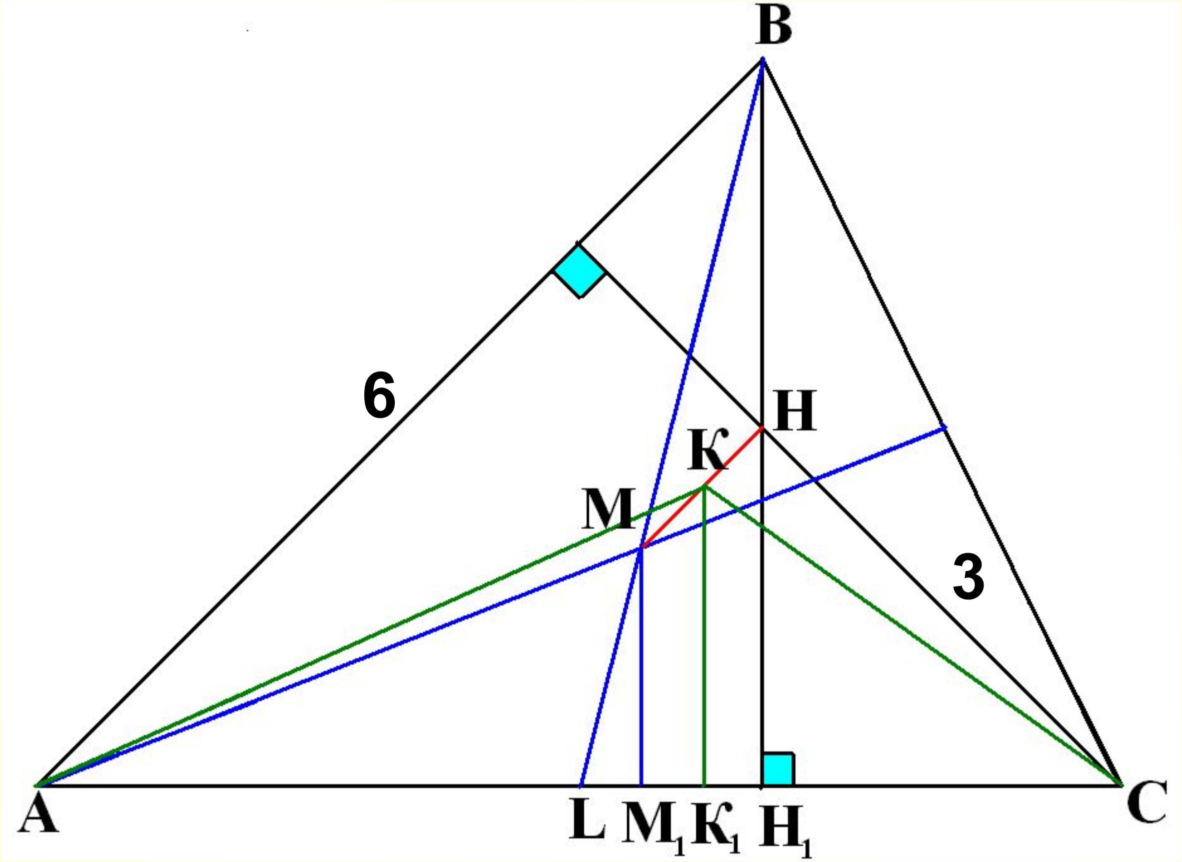
$$r = \frac{2S}{P} = \frac{2 \cdot 300}{80} =$$

$$= \frac{60}{8} = \frac{15}{2} = 7{,}5$$



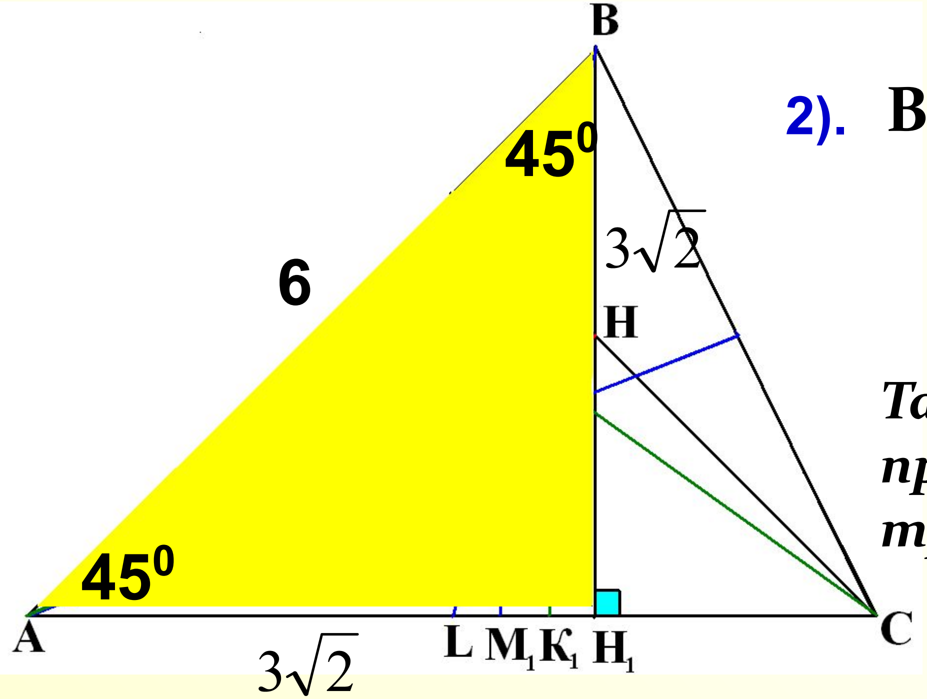
Ответ: 7,5

15. ***Высоты треугольника АВС пересекаются в точке Н, а медианы – в точке М. Точка К – середина МН. Найдите площадь треугольника АКС, если известно, что АВ=6,СН=3,*** $\angle$ ***ВАС=45⁰.***



Решение.

1). По условию, высоты ΔABC пересекаются, значит точка H их пересечения расположена внутри этого треугольника. Доп. построение: Построим MM1|| KK1||HH1.



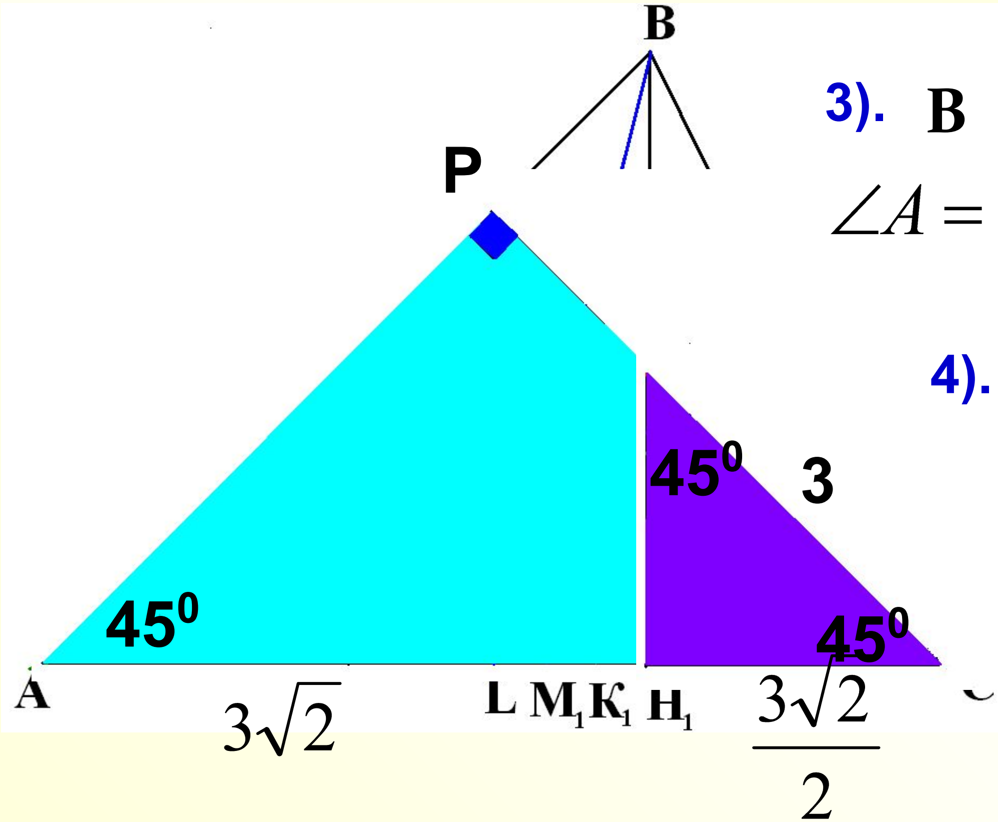
2). В ΔABH_1, $\angle H_1 = 90^0$,

$$\angle A = 45^0 \Rightarrow \angle B = 45^0$$

Так как сумма острых углов прямоугольного треугольника треугольника равна 90⁰. Значит:

$AH_1 = BH_1$ -так как напротив равных углов лежат равные стороны.

$$\sin A = \frac{BH_1}{AB} \Rightarrow BH_1 = AB \sin A = 6 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 3\sqrt{2}$$



3). В ΔAPC $\angle P = 90^0$,

$\angle A = 45^0 \Rightarrow \angle C = 45^0$ (см. п.1)

4). В ΔCHH_1, $\angle H_1 = 90^0$,

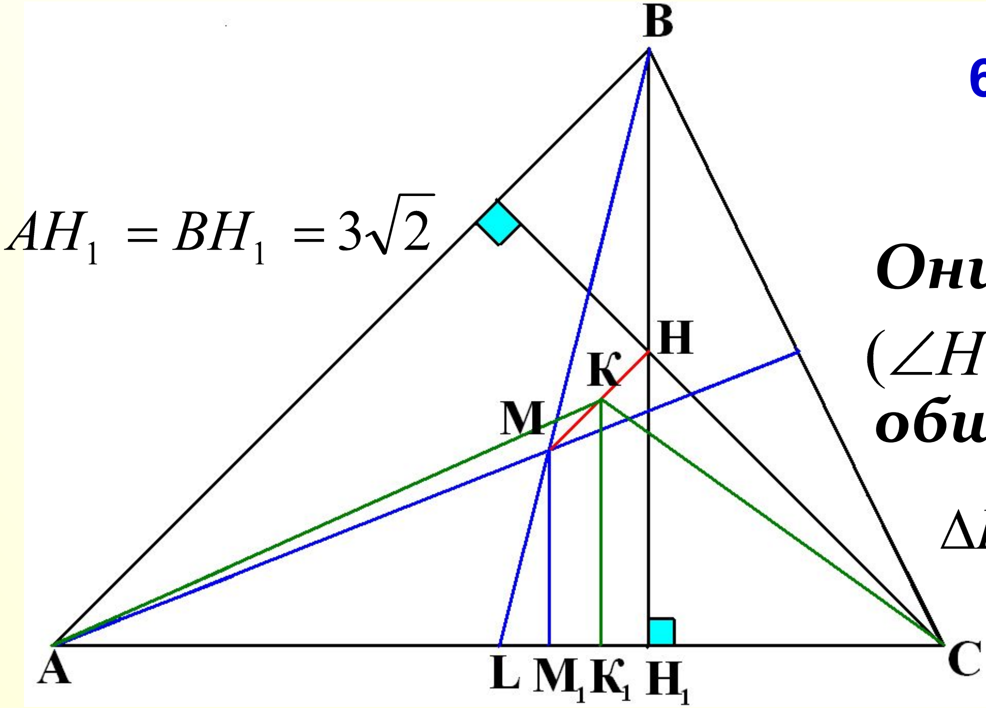
$\angle C = 45^0 \Rightarrow \angle H = 45^0 \Rightarrow$

$CH_1 = HH_1$ *(см. п.1)* *и*

$\sin C = \frac{HH_1}{CH} \Rightarrow$

$$HH_1 = CH \sin C = 3 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{3\sqrt{2}}{2} \Rightarrow HH_1 = CH_1 = \frac{3\sqrt{2}}{2}$$

5). $AC = AH_1 + H_1C = 3\sqrt{2} + \frac{3\sqrt{2}}{2} = \frac{9\sqrt{2}}{2}.$



6). **Рассмотрим:**

ΔLBH_1 **и** ΔLMM_1.

Они – прямоугольные $(\angle H_1 = \angle M_1 = 90^0)$ **и имеют общий угол L, значит:**

$\Delta LBH_1 \overset{k}{\infty} \Delta LMM_1$ - **по двум углам.**

По свойству медианы:

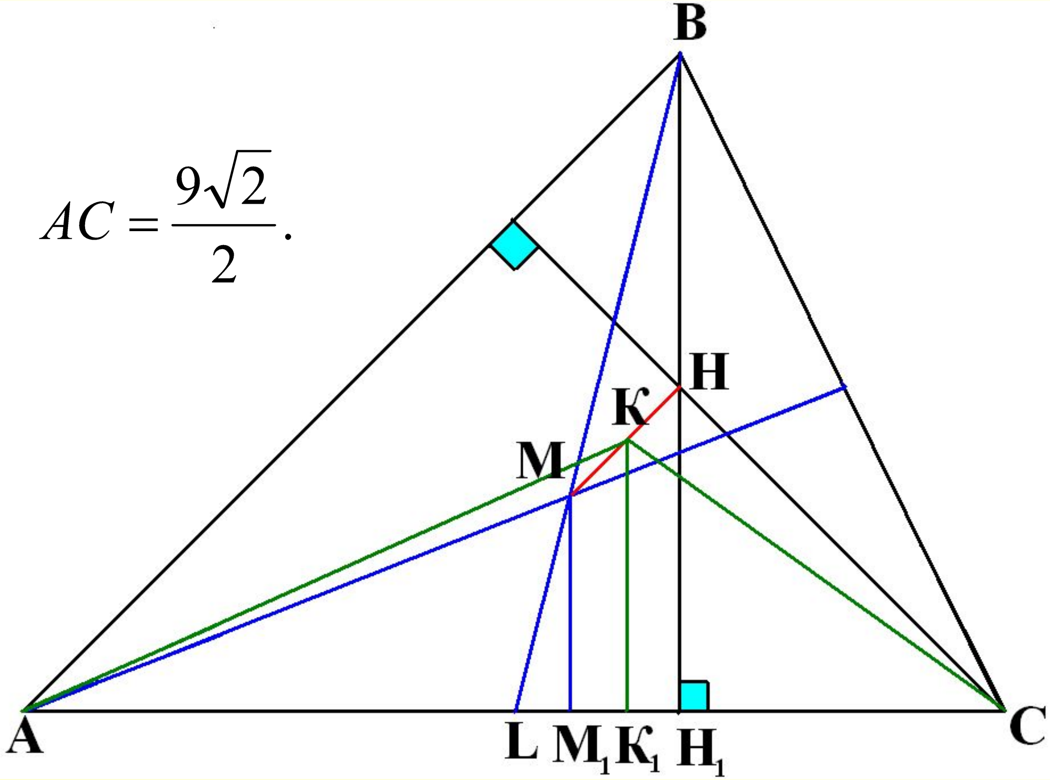
$$LM = \frac{1}{3}LB \quad \Rightarrow \quad k = \frac{LB}{LM} = \frac{3}{1} = 3 \quad \Rightarrow$$

$$MM_1 = \frac{1}{3}BH_1 = \frac{3\sqrt{2}}{3} = \sqrt{2}$$

7). ***Так как $MM_1 \parallel KK_1 \parallel HH_1$ (по построению) и К – середина МН, то $К_1$- середина M_1H_1 (по теореме Фалеса).***

Получили: KK_1-средняя линия трапеции MM_1H_1H

$$AC = \frac{9\sqrt{2}}{2}.$$



$$K_1 = \frac{MM_1 + HH_1}{2} = \frac{\sqrt{2} + \frac{3\sqrt{2}}{2}}{2} = \frac{5\sqrt{2}}{4}$$

8). $$S_{\Delta AKC} = \frac{1}{2} AC \cdot KK_1 = \frac{1}{2} \cdot \frac{9\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{5\sqrt{2}}{4} = \frac{45}{8} = 5{,}625$$

***Ответ:* 5,625**

Желаю успехов!