ПРИНЦИП СЖИМАЮЩИХ ОТОБРАЖЕНИЙ

Доцент Р.М.Тургунбаев

План лекции:

1. Неподвижная точка отображения, примеры
2. Сжимающее отображение, свойство
3. Последовательность итерации
4. Принцип сжимающих отображении
5. Заключение

Ключевые понятия: Отображение, неподвижная точка, сжимающее отображение, последовательность итераций, полное пространство

Неподвижная точка отображения, примеры

- Пусть T отображение метрического пространства *(X,ρ)* в себя.

1-определение. Точка $a \in X$, для которой, $T(a) = a$ называется *неподвижной точкой* отображения *T*.

Примеры. 1) Неподвижными точками отображения *T: x→x²* пространства R в себя являются корни уравнения $x=x^2$, т.е. 0 и 1.

2) Неподвижной точкой отображения T: $(x, y) \to (u, v)$ пространство R^2 в себя задаваемого системой $\begin{cases} u = 2x + 3y - 2, \\ v = x + y + 1 \end{cases}$

есть решение системы $\begin{cases} x = 2x + 3y - 2, \\ y = x + y + 1 \end{cases}$, т.е. (-1;1).

- 3) Если $y(x) \in C[0;1]$, то

$y^2(x) - y(x) - x^2 \in C[0;1]$.

Поэтому отображение $T(y) = y^2 - y - x^2$ отображает $C[0;1]$ в себя.

Неподвижные точки этого отображение есть решения функционального уравнения $y^2(x) - y(x) - x^2 = y(x)$, откуда $y = 1 + \sqrt{1 + x^2}$ и $y = 1 - \sqrt{1 + x^2}$.

Сжимающее отображение, свойства

- *2-определение*. Отображение T метрического пространства *(X,ρ)* в себя называется сжимающим, если существует такое число α $(0 < \alpha < 1)$, что для любых x и y из X выполняется неравенство

$$\rho(Tx, Ty) \leq \alpha\rho(x, y). \qquad (1)$$

Пример: Пусть $X = [0; \frac{1}{3}]$, $\rho(x, y) = |y - x|$, $T(x) = x^2$. Если x_1 и x_2 произвольные точки X, то

$$\rho(Tx_1, Tx_2) = \left|x_2^2 - x_1^2\right| = |x_2 + x_1| \cdot |x_2 - x_1| \leq$$

$$\leq \frac{2}{3} \cdot |x_2 - x_1| = \frac{2}{3} \cdot \rho(x_1, x_2).$$

Таким образом, T сжимающее отображение.

- **1-лемма**. Если *T сжимающее отображение, то оно непрерывно.*

Доказательство. Пусть a произволбная точка пространства X и $\forall\varepsilon > 0$. Тогда для всех $x \in X$ удовлетворяющих условие $\rho(x, a) < \varepsilon$ в силу неравенство (1) имеем:

$$\rho(Tx, Ta) \leq \alpha\rho(x, a) < \alpha\varepsilon < \varepsilon.$$

А это доказывает непрерывность отображения T в произвольной точке a. Значит, T непрерывное отображение.

Последовательность итерации

- **3-определение**. Пусть T отображение метрического пространства *(X,ρ)* в себя. Последовательность точек этого пространства $x_n = Tx_{n-1} \quad (n \in N, \forall x_0 \in X)$ *последовательностью итерации* (или последовательных приближении) для отображения T.

2-лемма. Если отображения T непрерывно, а последовательность итерации $\{x_n\}$ сходится, то её предел есть неподвижная точка отображения T.

Доказательство. Пусть $\lim_{n\to\infty} x_n = x_0$, тогда $\lim_{n\to\infty} Tx_n = Tx_0$. С другой стороны $\mathrm{T}x_0 = \lim_{n\to\infty} Tx_n = \lim_{n\to\infty} x_{n+1} = x_0$. Откуда x_0 неподвижная точка.

3-лемма. Если Т сжимающее отображение, то последовательность итерации для Т удовлетворяет неравенству

$$\rho(x_{n+1}, x_n) \leq \alpha^n \rho(x_1, x_0)$$

- **Доказательство**. Так как, по определению последовательных приближений $x_1 = Tx_0, x_2 = Tx_1,$ а в силу условия сжимаемости

$$\rho(Tx_1, Tx_0) \leq \alpha\rho(x_1, x_0),$$

то

$$\rho(x_2, x_1) = \rho(Tx_1, Tx_0) \leq \alpha\rho(x_1, x_0).$$

Аналогично

$$\rho(x_3, x_2) = \rho(Tx_2, Tx_1) \leq \alpha\rho(x_2, x_1) \leq \alpha^2\rho(x_1, x_0),$$

$\dots, \rho(x_{n+1}, x_n) \leq \alpha^n\rho(x_1, x_0).$

4-лемма. Если Т сжимающее отображение, то последовательность итераций для отображения Т является фундаментальной.

- **Доказательство**. Так как $0 < \alpha < 1$, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha^n \rho(x_1, x_0)$ сходится. Значит, сходится и ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \rho(x_{n+1}, x_n)$. Тогда

$\forall \varepsilon > 0$ найдется такое n_0, что при $m > n > n_0$ имеем $\sum_{k=n}^{m-1} \rho(x_k, x_{k+1}) < \varepsilon$. Но тогда и

$$\rho(x_n, x_m) \leq \sum_{k=n}^{m-1} \rho(x_k, x_{k+1}) < \varepsilon .$$

Откуда $\{x_n\}$ фундаментальная последовательность.

Принцип сжимающих отображений

- **Теорема (Банах).** Всякое сжимающее отображение T полного метрического пространства *(X,ρ)* в себя имеет одну и только одну неподвижную точку, т.е. уравнение *Tx=x* имеет единственный корень.

Доказательство. Пусть x_0 произвольная точка X. Рассмотрим $x_n = Tx_{n-1}$ последовательность итераций для T. В 4-лемме было доказано что, $\{x_n\}$ является фундаментальной. В силу полноты пространства X она сходится к некоторой точке $\bar{x}$: $\lim_{n\to\infty} x_n = \bar{x}$. Так как T непрерывное отображение (1-лемма), имеем

$$T(\bar{x}) = \lim_{n\to\infty} Tx_n = \lim_{n\to\infty} x_{n+1} = \bar{x}\,.$$

Таким образом, $\bar{x}$ является неподвижной точкой отображения T.

- Докажем единственность этой точки. Пусть x' другая неподвижная точка. Тогда имеем

$$\rho(\bar{x}, x') = \rho(T\bar{x}, Tx') \leq \alpha\rho(\bar{x}, x')$$

Если допустим, что $\bar{x} \neq x'$, то $\rho(\bar{x}, x') > 0$. И последнее неравенство можно сократить на $\rho(\bar{x}, x')$. Получаем $1 \leq \alpha$, что невозможно. Значит, неподвижная точка единственна.

Заключение

1. Сжимающее отображение непрерывно
2. Последовательность итераций отображения сходится к неподвижной точке этого отображения (если сходится)
3. Последовательность итераций сжимающегося отображения фундаментальна
4. Неподвижную точку сжимающегося отображения полного пространства в себя можно найти как предел последовательности итераций