

Ряды. Сходимость рядов.

Презентацию подготовил:

Чавкина Т.В.

преподаватель математики

ГБУ ПО РМ "РЖПТ им. А.П. Байкузова"

- Рассмотрим некоторую последовательность неотрицательных чисел $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots$
- Составим из членов этой последовательности бесконечную сумму:

$$a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n + \dots.$$

- Положительным числовым рядом называется выражение вида:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n + \dots$$

здесь

Σ – математический значок суммы,

a_n – общий член ряда,

n – «счетчик», $n \in \mathbb{N}$ или $n = 0$.

ПРИМЕР 1

Записать первые три члена ряда
 $\sum_{n=1}^{\infty}(n^2 - 1)$.

Решение:

$$\text{При } n=1, a_1 = 1^2 - 1 = 0;$$

$$\text{при } n=2, a_2 = 2^2 - 1 = 4 - 1 = 3;$$

$$\text{при } n=3, a_3 = 3^2 - 1 = 9 - 1 = 8;$$

Ответ:

$$\sum_{n=1}^{\infty}(n^2 - 1) = 0 + 3 + 8 + \dots$$

o Частичной суммой ряда называется выражение вида:

$$S_k = \sum_{n=1}^k a_n, \text{ где } k \text{ — конечное натуральное число.}$$

ПРИМЕР 2

Из примера 1 найдем:

$$S_1 = a_1 = 0;$$

$$S_2 = a_1 + a_2 = 0 + 3 = 3;$$

$$S_3 = a_1 + a_2 + a_3 = 0 + 3 + 8 = 11.$$

- o Числовой ряд называется **сходящимся**, если существует конечный предел:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S$$

здесь S – сумма ряда.

ПРИМЕР 3

Рассмотрим бесконечно убывающую геометрическую прогрессию

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{4^n} = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{4^3} + \dots$$

Сумма членов бесконечно убывающей прогрессии находится по формуле $S = \frac{A}{1-q}$, где A – первый член прогрессии, q – основание прогрессии. В нашем случае $A = 1$, $q = \frac{1}{4}$, тогда

$$S = \frac{4}{3}.$$

Получено конечное число, значит, исходный ряд – сходящийся.

o Числовой ряд называется **расходящимся**, если предел частичных сумм равен бесконечности или не существует:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \pm \infty.$$

ПРИМЕР 4

Рассмотрим числовой ряд из примера 1:
 $\sum_{n=1}^{\infty} (n^2 - 1)$.

Очевидно, что каждый следующий ряд больше чем предыдущий, поэтому
 $0+3+8+\dots=\infty$.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \infty$$

Ряд расходится.

НЕОБХОДИМЫЙ ПРИЗНАК СХОДИМОСТИ

○ Если общий член ряда не стремится к нулю, то ряд расходится, т.е.:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \neq 0.$$

ПРИМЕР 5

Докажем, что ряд из примера 1 -
расходящийся:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (n^2 - 1).$$

Решение:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (n^2 - 1) = \infty$$

т.е. ряд является расходящимся.

Ответ:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (n^2 - 1) - \text{расходящийся.}$$

ПРИМЕР 6

Исследовать на сходимость:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{n+2}.$$

Решение:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4}{n+2} = 0$$

т.е. ряд сходится.

Ответ:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{n+2} - \text{сходящийся.}$$

ГАРМОНИЧЕСКИЙ РЯД

- $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ - гармонический ряд.
- Гармонический ряд является **расходящимся!**
- $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^a}$ - обобщенный гармонический ряд.
- Обобщенный гармонический ряд расходится при $a \leq 1$.

ПРИМЕР 7

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{n}}$, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ — расходящиеся ряды.

- Обобщенный гармонический ряд сходится при $a > 1$.

ПРИМЕР 8

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n^3}}$, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}$ — сходящиеся ряды.

ПРИЗНАК СРАВНЕНИЯ ПОЛОЖИТЕЛЬНЫХ РЯДОВ

- Рассмотрим два положительных числовых ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$. Если известно, что ряд $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ – сходится, и выполнено неравенство $a_n \leq b_n$ (для $n=1,2,3\dots$), то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ тоже сходится.
- Т.е., из сходимости ряда с большими членами следует сходимость ряда с меньшими членами.

ПРИМЕР 9

Исследовать ряд на сходимость $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+n+2}$.

Решение:

Известно, что обобщенный гармонический ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ – сходится.

Справедливо неравенство $\frac{1}{n^2+n+2} \leq \frac{1}{n^2}$ при любом натуральном n .

Следовательно, исходный ряд – сходится.

Ответ:

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+n+2}$ – сходящийся.

ПРИЗНАК СРАВНЕНИЯ ПОЛОЖИТЕЛЬНЫХ РЯДОВ

- Рассмотрим два положительных числовых ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$. Если известно, что ряд $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ – расходится, и выполнено неравенство $a_n \geq b_n$ (для $n=1,2,3\dots$), то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ тоже расходится.
- Т.е., из расходимости ряда с меньшими членами следует сходимость ряда с большими членами.

ПРИМЕР 10

Исследовать ряд на сходимость $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\ln n}$.

Решение:

Известно, что обобщенный гармонический ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ – расходится. Справедливо неравенство $\frac{1}{\ln n} \geq \frac{1}{n}$ при любом натуральном n . Следовательно, исходный ряд расходится вместе с гармоническим рядом $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$.

Ответ:

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\ln n}$ – расходящийся.

ПРЕДЕЛЬНЫЙ ПРИЗНАК СРАВНЕНИЯ ПОЛОЖИТЕЛЬНЫХ РЯДОВ

○ Рассмотрим два положительных числовых ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$. Если предел отношения общих членов этих рядов равен конечному, отличному от нуля числу A , т.е. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = A$, то оба ряда сходятся или расходятся одновременно.

ПРИМЕР 11

Исследовать ряд на сходимость $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 - n}$

Решение:

Известно, что обобщенный гармонический ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ - сходится.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{n^2}}{\frac{1}{n^2 - n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 - n}{n^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right) = 1$$

Следовательно, исходный ряд сходится вместе с гармоническим рядом $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$.

Ответ:

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 - n}$ - сходящийся.

ПРЕДЕЛЬНЫЙ ПРИЗНАК СРАВНЕНИЯ ПОЛОЖИТЕЛЬНЫХ РЯДОВ

Пределный признак сравнения применяется тогда, когда в общем члене ряда:

- 0 1) В знаменателе находится многочлен.
- 0 2) Многочлены находятся и в числителе и в знаменателе.
- 0 3) Один или оба многочлена могут быть под корнем.

ПРИЗНАК СХОДИМОСТИ ДАЛАМБЕРА

○ Рассмотрим **положительный числовой ряд** $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. Если существует предел отношения последующего члена к предыдущему: $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = D$, то:

- 1) при $D < 1$ ряд **сходится**. В частности, ряд сходится при .
- 2) при $D > 1$ ряд **расходится**. В частности, ряд расходится при .
- 3) при $D = 1$ **признак не дает ответа**. Нужно использовать другой признак.

ПРИЗНАК СХОДИМОСТИ ДАЛАМБЕРА

Признак Даламбера применяется тогда, когда:

- o 1) В общий член ряда входит любое число в степени, например, 2^n , 3^n , 7^n и так далее .
- o 2) В общий член ряда входит факториал.
- o 3) Если в общем члене ряда есть «цепочка множителей», например:

$$1 \cdot 5 \cdot 25 \cdot \dots \cdot 5n \cdot \dots$$

ПРИМЕР 12

Исследовать ряд на сходимость $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+n-1}{4^n}$.

Решение:

$$a_n = \frac{n^2+n-1}{4^n}, a_{n+1} = \frac{(n+1)^2+(n+1)-1}{4^{n+1}} = \frac{n^2+3n+1}{4^{n+1}}.$$

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{n^2+3n+1}{4^{n+1}}}{\frac{n^2+n-1}{4^n}} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4^n(n^2+3n+1)}{4^{n+1}(n^2+n-1)} = \frac{1}{4} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n^2+3n+1}{n^2+n-1} \right) = \\ &= \frac{\infty}{\infty} = \frac{1}{4} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{\frac{n^2+3n+1}{n^2}}{\frac{n^2+n-1}{n^2}} \right) = \frac{1}{4} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1 + \frac{3}{n} + \frac{1}{n^2}}{1 + \frac{1}{n} - \frac{1}{n^2}} \right) = \frac{1}{4} \cdot 1 = \frac{1}{4} < 1. \end{aligned}$$

Ответ:

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+n-1}{4^n}$ - СХОДИТСЯ.

ПРИМЕР 13

Исследовать ряд на сходимость $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n+1}}{\sqrt{3n+5}}$.

Решение:

$$a_n = \frac{2^{n+1}}{\sqrt{3n+5}}, a_{n+1} = \frac{2^{(n+1)+1}}{\sqrt{3(n+1)+5}} = \frac{2^{n+2}}{\sqrt{3n+8}}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{2^{n+2}}{\sqrt{3n+8}}}{\frac{2^{n+1}}{\sqrt{3n+5}}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^{n+2} \sqrt{3n+5}}{2^{n+1} \sqrt{3n+8}} = 2 \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{3n+5}}{\sqrt{3n+8}}$$

$$= 2 \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{3n+5}{3n+8}} = \frac{\infty}{\infty} = 2 \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{3+\frac{5}{n}}{3+\frac{8}{n}}} = 2 \cdot 1 = 2 > 1.$$

Ответ:

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n+1}}{\sqrt{3n+5}}$ расходится.

ПРИМЕР 14

Исследовать ряд на сходимость $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{n!}$

Решение:

$$a_n = \frac{3^n}{n!}, a_{n+1} = \frac{3^{n+1}}{(n+1)!}$$

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{3^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{3^n}{n!}} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3^{n+1} n!}{3^n (n+1)!} = 3 \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!}{(n+1)!} \\ &= 3 \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n \cdot (n+1)} = 3 \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n+1} = 3 \cdot 0 = 0 < 1. \end{aligned}$$

Ответ:

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{n!}$ - СХОДИТСЯ.

ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

Исследовать ряды на сходимость:

- $\circ \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n^2 - 4n + 3}{100n^2 + 1} \right)^2 ;$
- $\circ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{(n+3)} ;$
- $\circ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n+5}} ;$
- $\circ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 - 4n + 5}{3^n(n+1)} ;$
- $\circ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n-2}{n^3 - n + 1} ;$
- $\circ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{5^n(2n+3)} ;$
- $\circ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n-1}{\sqrt{3n^2+5}} ;$