Ряды. Сходимость рядов.

Презентацию подготовил:
Чавкина Т.В.
преподаватель математики
ГБУ ПО РМ "РЖПТ им. А.П. Байкузова"

- Рассмотрим некоторую последовательность неотрицательных чисел $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots$.
- Составим из членов этой последовательности бесконечную сумму:

$$a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n + \cdots .$$

- Положительным числовым рядом называется выражение вида:

$$\sum_{\boldsymbol{n=1}}^{\infty} \boldsymbol{a_n} = \boldsymbol{a_1} + \boldsymbol{a_2} + \boldsymbol{a_3} + \cdots + \boldsymbol{a_n} + \cdots$$

здесь

$\sum$– математический значок суммы,

a_n – общий член ряда,

n – «счетчик», $\boldsymbol{n \epsilon N}$ или $n = 0$.

ПРИМЕР 1

Записать первые три члена ряда $\sum_{n=1}^{\infty}(n^2$ - 1).

Решение:

При n=1, $a_1 = 1^2 - 1 = 0$;

при n=2, $a_2 = 2^2 - 1 = 4 - 1 = 3$;

при n=3, $a_3 = 3^2 - 1 = 9 - 1 = 8$;

Ответ:

$\sum_{n=1}^{\infty}(n^2$ - 1)=0+3+8+….

- **Частичной суммой ряда** называется выражение вида:

$$S_k = \sum_{n=1}^{k} a_n \text{, где k } - \text{конечное натуральное число.}$$

ПРИМЕР 2

Из примера 1 найдем:

$S_1 = a_1 = 0;$

$S_2 = a_1 + a_2 = 0 + 3 = 3;$

$S_3 = a_1 + a_2 + a_3 = 0 + 3 + 8 = 11.$

- Числовой ряд называется **сходящимся**, если существует конечный предел:

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \mathrm{S}$$

здесь S – сумма ряда.

ПРИМЕР 3

Рассмотрим бесконечно убывающую геометрическую прогрессию

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{4^n} = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{4^3} + \cdots.$$

Сумма членов бесконечно убывающей прогрессии находится по формуле $S = \frac{A}{1-q}$, где A – первый член прогрессии, q- основание прогрессии. В нашем случае A =1, $q = \frac{1}{4}$, тогда

$$S = \frac{4}{3}.$$

Получено конечное число, значит, исходный ряд – сходящийся.

- Числовой ряд называется **расходящимся**, если предел частичных сумм равен бесконечности или не существует:

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \pm\infty.$$

ПРИМЕР 4

Рассмотрим числовой ряд из примера 1:
$\sum_{n=1}^{\infty}(n^2 - 1)$.
Очевидно, что каждый следующий ряд больше чем предыдущий, поэтому
0+3+8+…=∞.

$\lim_{n\to\infty} S_n = \infty$

Ряд расходится.

НЕОБХОДИМЫЙ ПРИЗНАК СХОДИМОСТИ

- **Если общий член ряда <u>не стремится к нулю</u>, то ряд расходится**, т.е.:

$$\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0.$$

ПРИМЕР 5

Докажем, что ряд из примера 1 - расходящийся:

$\sum_{n=1}^{\infty}(n^2 - 1)$.

Решение:

$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}(n^2-1) = \infty$

т.е. ряд является расходящимся.

Ответ:

$\sum_{n=1}^{\infty}(n^2 - 1)$ – расходящийся.

ПРИМЕР 6

Исследовать на сходимость:

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4}{n+2}$.

Решение:

$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}\frac{4}{n+2} = 0$

т.е. ряд сходится.

Ответ:

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4}{n+2}$ – сходящийся.

ГАРМОНИЧЕСКИЙ РЯД

- $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ - гармонический ряд.
- Гармонический ряд является **расходящимся**!
- $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^a}$ - обобщенный гармонический ряд.
- Обобщенный гармонический ряд расходится при $a \leq 1$.

ПРИМЕР 7

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt[3]{n}}$, $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}$, $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ $-$ расходящиеся ряды.

- Обобщенный гармонический ряд сходится при $a > 1$.

ПРИМЕР 8

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n^3}}$, $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$, $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^3}$ $-$ сходящиеся ряды.

ПРИЗНАК СРАВНЕНИЯ ПОЛОЖИТЕЛЬНЫХ РЯДОВ

- Рассмотрим два положительных числовых ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$. **Если известно**, что ряд $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ – **сходится**, и выполнено неравенство $a_n \leq b_n$ (для n=1,2,3…), то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ **тоже сходится**.
- Т.е., из **сходимости ряда с бОльшими членами следует сходимость ряда с меньшими членами**.

ПРИМЕР 9

Исследовать ряд на сходимость $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+n+2}$.

Решение:

Известно, что обобщенный гармонический ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ - сходится. Справедливо неравенство $\frac{1}{n^2+n+2} \leq \frac{1}{n^2}$ при любом натуральном n. Следовательно, исходный ряд – сходится.

Ответ:

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+n+2}$.– сходящийся.

ПРИЗНАК СРАВНЕНИЯ ПОЛОЖИТЕЛЬНЫХ РЯДОВ

- Рассмотрим два положительных числовых ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$. **Если известно**, что ряд $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ – **расходится**, и выполнено неравенство $a_n \geq b_n$ (для n=1,2,3…), то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ **тоже расходится**.
- Т.е., из **расходимости ряда с меньшими членами следует сходимость ряда с бОльшими членами**.

ПРИМЕР 10

Исследовать ряд на сходимость $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\ln n}$.

Решение:

Известно, что обобщенный гармонический ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ - расходится. Справедливо неравенство $\frac{1}{\ln n} \geq \frac{1}{n}$ при любом натуральном n. Следовательно, исходный ряд расходится вместе с гармоническим радом $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$.

Ответ:

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\ln n}$– расходящийся.

ПРЕДЕЛЬНЫЙ ПРИЗНАК СРАВНЕНИЯ ПОЛОЖИТЕЛЬНЫХ РЯДОВ

- Рассмотрим два положительных числовых ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$. Если предел отношения общих членов этих рядов равен конечному, отличному от нуля числу A, т.е. $\mathbf{lim}_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n}$**=A**, то оба ряда сходятся или расходятся одновременно.

ПРИМЕР 11

Исследовать ряд на сходимость $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2-n}$

Решение:

Известно, что обобщенный гармонический ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ - сходится.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n^2}}{\frac{1}{n^2-n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2-n}{n^2} = \lim_{n\to\infty} \left(1-\frac{1}{n}\right) = 1$$

Следовательно, исходный ряд сходится вместе с гармоническим радом $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$.

Ответ:

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2-n}$– сходящийся.

ПРЕДЕЛЬНЫЙ ПРИЗНАК СРАВНЕНИЯ ПОЛОЖИТЕЛЬНЫХ РЯДОВ

Предельный признак сравнения применяется тогда, когда в общем члене ряда:

- 1) В знаменателе находится многочлен.
- 2) Многочлены находятся и в числителе и в знаменателе.
- 3) Один или оба многочлена могут быть под корнем.

ПРИЗНАК СХОДИМОСТИ ДАЛАМБЕРА

- Рассмотрим **положительный числовой ряд** $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. Если существует предел отношения последующего члена к предыдущему: $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = D$, то:

  1) при $D < 1$ ряд **сходится**. В частности, ряд сходится при .

  2) при $D > 1$ ряд **расходится**. В частности, ряд расходится при .

  3) при $D = 1$ **признак не дает ответа**. Нужно использовать другой признак.

ПРИЗНАК СХОДИМОСТИ ДАЛАМБЕРА

Признак Даламбера применяется тогда, когда:

- 1) В общий член ряда входит любое число в степени, например, 2^n, 3^n, 7^n и так далее .
- 2) В общий член ряда входит факториал.
- 3) Если в общем члене ряда есть «цепочка множителей», например:

$1 \cdot 5 \cdot 25 \cdot \cdots \cdot 5n \cdot \cdots$.

ПРИМЕР 12

Исследователь ряд на сходимость $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2+n-1}{4^n}$.

Решение:

$$a_n=\frac{n^2+n-1}{4^n},\ a_{n+1}=\frac{(n+1)^2+(n+1)-1}{4^{n+1}}=\frac{n^2+3n+1}{4^{n+1}}.$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{n^2+3n+1}{4^{n+1}}}{\frac{n^2+n-1}{4^n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{4^n\left(n^2+3n+1\right)}{4^{n+1}(n^2+n-1)}=\frac{1}{4}\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^2+3n+1}{n^2+n-1}\right)=$$

$$=\frac{\infty}{\infty}=\frac{1}{4}\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\frac{n^2+3n+1}{n^2}}{\frac{n^2+n-1}{n^2}}\right)=\frac{1}{4}\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1+\frac{3}{n}+\frac{1}{n^2}}{1+\frac{1}{n}-\frac{1}{n^2}}\right)=\frac{1}{4}\cdot 1=\frac{1}{4}<1.$$

Ответ:

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2+n-1}{4^n}$ - сходится.

ПРИМЕР 13

Исследователь ряд на сходимость $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n+1}}{\sqrt{3n+5}}$.

Решение:

$$a_n = \frac{2^{n+1}}{\sqrt{3n+5}}, a_{n+1} = \frac{2^{(n+1)+1}}{\sqrt{3(n+1)+5}} = \frac{2^{n+2}}{\sqrt{3n+8}}.$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{2^{n+2}}{\sqrt{3n+8}}}{\frac{2^{n+1}}{\sqrt{3n+5}}} = \lim_{n\to\infty} \frac{2^{n+2}\sqrt{3n+5}}{2^{n+1}\sqrt{3n+8}} = 2\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{3n+5}}{\sqrt{3n+8}} =$$

$$= 2\lim_{n\to\infty} \sqrt{\frac{3n+5}{3n+8}} = \frac{\infty}{\infty} = 2\lim_{n\to\infty} \sqrt{\frac{3+\frac{5}{n}}{3+\frac{8}{n}}} = 2 \cdot 1 = 2 > 1.$$

Ответ:

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n+1}}{\sqrt{3n+5}}$- расходится.

ПРИМЕР 14

Исследователь ряд на сходимость $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{n!}$

Решение:

$$a_n = \frac{3^n}{n!}, a_{n+1} = \frac{3^{n+1}}{(n+1)!}.$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{3^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{3^n}{n!}} = \lim_{n\to\infty} \frac{3^{n+1} n!}{3^n (n+1)!} = 3 \lim_{n\to\infty} \frac{n!}{(n+1)!} =$$

$$= 3 \lim_{n\to\infty} \frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot\dots\cdot n}{1\cdot 2\cdot 3\cdot\dots\cdot n\cdot(n+1)} = 3 \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} = 3\cdot 0 = 0 < 1.$$

Ответ:

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{n!}$ - сходится.

ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

Исследовать ряды на сходимость:

- $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n^2-4n+3}{100n^2+1}\right)^2;$
- $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n+5}};$
- $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n-2}{n^3-n+1};$
- $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3n-1}{\sqrt{3n^2+5}};$
- $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{(n+3)};$
- $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2-4n+5}{3^n(n+1)};$
- $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{5^n(2n+3)};$