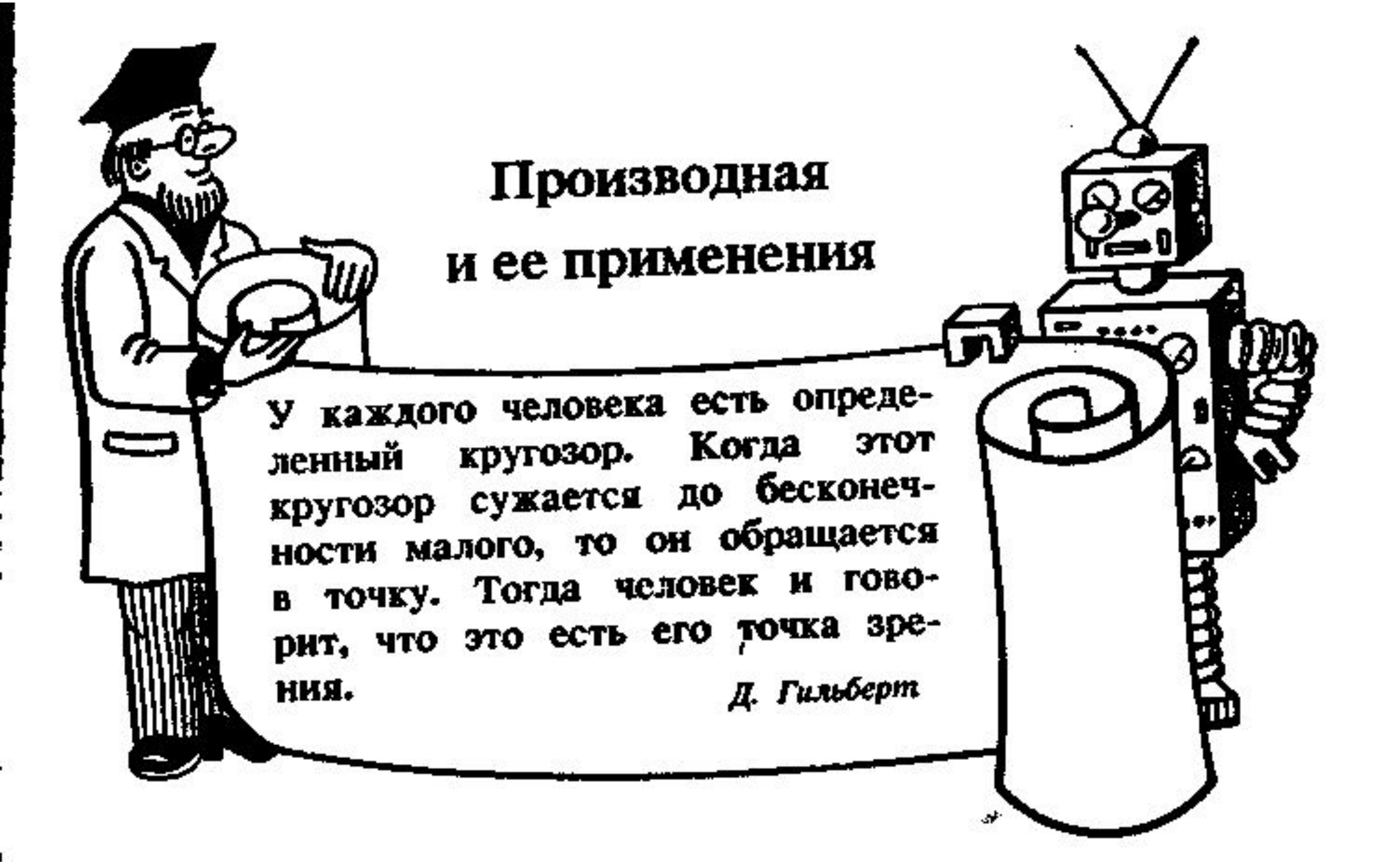
Тема « ПРОИЗВОДНАЯ»

УМК под редакцией Мордковича .
10 класс .

Учитель математики
МОУ СОШ с. Селезениха
Кирово – Чепецкого района
Кировской области
Погонец Наталия Сергеевна


Производная
и ее применения
У каждого человека есть опреде-
ленный кругозор. Когда этот
кругозор сужается до бесконеч-
ности малого, то он обращается
в точку. Тогда человек и гово-
рит, что это есть его точка зре-
ния.
Д. Гильберт

Тематическое планирование

Тема 4 (37 ч)

ПРОИЗВОДНАЯ

29.	**Числовые последовательности (определение, примеры, свойства)**	**1 ч**
30.	**Предел числовой последовательности:**	
	1) понятие предела последовательности	**1 ч**
	2) вычисление пределов последовательностей	**1 ч**

	3) сумма бесконечной геометрической прогрессии	1 ч
31.	Предел функции:	
	1) предел функции на бесконечности	2 ч
	2) предел функции в точке	2 ч
	3) приращение аргумента, приращение функции	1 ч
32.	Определение производной:	
	1) задачи, приводящие к понятию производной	1 ч
	2) определение производной, ее геометрический и физический смысл	1 ч
	3) алгоритм отыскания производной	2 ч
33.	Вычисление производных:	
	1) формулы дифференцирования (для функций $y = C$, $y = kx + m$, $y = \frac{1}{x}$, $y = x^2$, $y = \sqrt{x}$, $y = \sin x$, $y = \cos x$)	2 ч
	2) правила дифференцирования (сумма, произведение, частное; дифференцирование функций $y = x^n$, $y = \operatorname{tg} x$, $y = \operatorname{ctg} x$)	3 ч
	3) дифференцирование функции $y = f(kx + m)$	1 ч
	Контрольная работа № 6	1 ч
34.	Уравнение касательной к графику функции	2 ч
35.	Применение производной для исследования функций:	
	1) исследование функций на монотонность	2 ч
	2) отыскание точек экстремума	2 ч
	3) построение графиков функций	3 ч
36.	Отыскание наибольших и наименьших значений функций:	
	1) отыскание наибольшего и наименьшего значений непрерывной функции на промежутке	3 ч

Дидактический и наглядный материал для работы на уроках .

- Справочный материал
- Упражнения для устной работы
- Математические диктанты
- Самостоятельные работы
- Тесты
- Тренажеры
- Домашние контрольные работы (на выбор)
- Контрольные работы
- Зачет
- Презентации к урокам из интернета
- Разработки уроков

Справочный материал

Производная

$$y' = f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

вторая производная: $f''(x) = (f'(x))'$

производные высших порядков: $f^{(n)}(x) = (f^{(n-1)}(x))'$

Производные некоторых функций

$(C)' = 0$ (C — константа)

$(\cos x)' = -\sin x$

$(x)' = 1$

$(\sin x)' = \cos x$

$(x^2)' = 2x$

$(\operatorname{tg} x)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$

$(x^n)' = nx^{n-1}$

$(\operatorname{ctg} x)' = -\dfrac{1}{\sin^2 x}$

$\left(\dfrac{1}{x}\right)' = -\dfrac{1}{x^2}$

$(\arccos x)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

$\left(\dfrac{1}{x^n}\right)' = -\dfrac{n}{x^{n+1}}$

$(\arcsin x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

$(\sqrt{x})' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$

$(\operatorname{arctg} x)' = \dfrac{1}{1+x^2}$

$(\sqrt[n]{x})' = \dfrac{1}{n\sqrt[n]{x^{n-1}}}$

$(\operatorname{arcctg} x)' = -\dfrac{1}{1+x^2}$

$(\lg x)' = \dfrac{1}{x}\lg e$

$(\ln x)' = \dfrac{1}{x}$

$(\log_a x)' = \dfrac{1}{x\ln a}$

$(a^x)' = a^x \ln a$

$(e^x)' = e^x$

Правила вычисления производных ($u = u(x)$, $v = v(x)$)

$$(u+v)' = u' + v' \qquad (u-v)' = u' - v'$$

$$(u \cdot v)' = u'v + uv' \qquad (cu)' = cu'$$

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2} \qquad \left(\frac{u}{c}\right)' = \frac{u'}{c}$$

Производная сложной функции

$$(u(v(x)))' = u'(v(x)) \cdot v'(x) \qquad (u^n)' = n \cdot u^{n-1} \cdot u'$$

$$(\cos u)' = -\sin u \cdot u' \qquad (\sin u)' = \cos u \cdot u'$$

$$(\mathrm{tg}\, u)' = \frac{1}{\cos^2 u} \cdot u' \qquad (\mathrm{ctg}\, u)' = -\frac{1}{\sin^2 u} \cdot u'$$

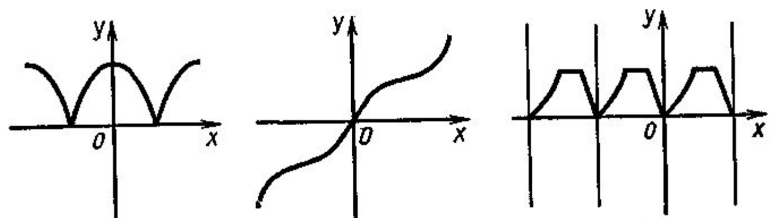
$$(\log_a u)' = \frac{1}{u \ln a} \cdot u' \qquad (\ln u)' = \frac{1}{u} \cdot u'$$

$$(a^u)' = a^u \cdot \ln a \cdot u' \qquad (e^u)' = e^u \cdot u'$$

Исследование функции с помощью производной

1. *Область определения*, т. е. множество значений аргумента, при которых задана функция.	1. Проекция графика на ось x.
2. *Корни*, т. е. точки, в которых функция обращается в нуль, или иначе решения уравнения $f(x)=0$.	2. Точки пересечения графика с осью x.
3. *Промежутки постоянного знака*, т. е. промежутки, на которых функция положительна (отрицательна), или иначе решения неравенства $f(x)>0$ ($f(x)<0$).	3. Участки оси x, соответствующие точкам графика, лежащим выше (ниже) оси x.
4. *Точки экстремума*, т. е. точки, лежащие внутри области определения, в которых функция принимает самое большое (максимум) или самое маленькое (минимум) значение по сравнению со значениями в близких точках.	4. «Вершины» на графике функции.
5. *Промежутки монотонности*, т. е. промежутки, на которых функция или возрастает, или убывает.	5. Участки оси x, где график идет вверх или вниз.
6. *Наибольшее и наименьшее значения функции* (по сравнению со всеми возможными в отличие от экстремумов, где сравнение ведется только с близкими точками).	6. Ординаты самой высокой и самой низкой точек графика.
7. *Область значений* функции, т. е. множество чисел, состоящее из всех значений функции.	7. Проекция графика на ось y.

Часто график функции является симметричным. На рисунке 5 представлены различные виды симметрии графика: осевая симметрия (относительно оси y; рис. 5, *а*); симметрия относительно начала координат (рис. 5, *б*). На рисунке 5, *в* график периодически повторяется. Первым из этих свойств графика обладают



а) *б)* *в)*

Таблица 20. ИССЛЕДОВАНИЕ ФУНКЦИЙ

Область определения функции $D(f)$ — множество значений x, при которых функция определена.

$f(x) = \dfrac{x}{x^2+1}$ $D(f) = R$	$f(x) = \dfrac{x^2}{x-1}$ $D(f) = \{x \mid x \neq 1\}$	$f(x) = \sqrt[4]{1-x}$ $D(f) = \{x \mid x \leqslant 1\}$

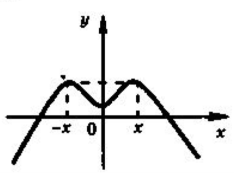
$f(x) = \sqrt{2x - x^2 - 1}$ $D(f) = \{1\}$	$f(x) = \lg x + \lg(-x)$ $D(f) = \varnothing$

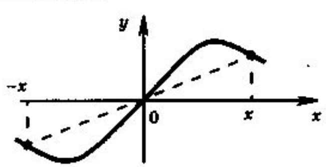
Область значений функции $E(f)$ — множество значений, которые может принимать $f(x)$ при $x \in D(f)$. (Все значения a, при которых уравнение $f(x) = a$ имеет решения.)

$f(x) = x^3 - 3x$ $E(f) = R$	$f(x) = 1 + \dfrac{1}{x^3}$ $E(f) = \{y \mid y \neq 1\}$	$f(x) = \sqrt[3]{2x - x^2}$ $E(f) = \{y \mid y \leqslant 1\}$

$f(x) = 1 + \sqrt{4x - x^2 - 4}$ $E(f) = \{1\}$	$f(x) = \sin x + \cos x$ $E(f) = \{y \mid -\sqrt{2} \leqslant y \leqslant \sqrt{2}\}$

Четность	Нечетность
$f(-x) = f(x),\ x \in D(f)$	$f(-x) = -f(x),\ x \in D(f)$
График четной функции симметричен относительно оси ординат.	График нечетной функции симметричен относительно начала координат.





Примеры четных функций $f(x) = x^4 - 21x^2$ $g(x) = 5^x + 5^{-x}$ $\varphi(x) = \sqrt[3]{1-x} + \sqrt[3]{1+x}$	*Примеры* нечетных функций $h(x) = x^3 - 20x$ $u(x) = 5^x - 5^{-x}$ $v(x) = \sqrt{1-x} - \sqrt{1+x}$

$f(x) = \sin x - \cos x$ не обладает четностью или нечетностью.

Таблица 20. ИССЛЕДОВАНИЕ ФУНКЦИЙ

Периодичность

$f(x - t) = f(x + t) = f(x),\ x \in D(f),\ t \neq 0$

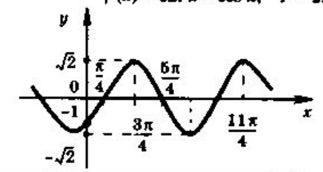
Число t называется *периодом функции*, а наименьшее положительное значение t *основным периодом функции* (T).

$f(x) = \sin 4x$ $T = \dfrac{2\pi}{4} = \dfrac{\pi}{2}$	$f(x) = \cos 2\pi x$ $T = \dfrac{2\pi}{2\pi} = 1$	$f(x) = 2 \cdot \operatorname{tg} \dfrac{x}{3}$ $T = \dfrac{\pi}{1/3} = 3\pi$	$f(x) = 17$ $t \in (0;\ +\infty)$ основного периода нет

$f(x) = x + \sin x$; $f(x) = \cos(x^2)$ — непериодические функции.

График периодической функции состоит из повторяющихся фрагментов на отрезке длины T; на любом таком отрезке периодическая функция принимает все свои значения.

$f(x) = \sin x - \cos x,\quad T = 2\pi$



Корень (нуль) функции — значение аргумента, при котором значение функции равно нулю.

$f(x) = 4x - \dfrac{1}{x}$ корни: $x = \pm\dfrac{1}{2}$	$f(x) = x \cdot \sqrt{1-x}$ корни: $x = 0$; $x = 1$	$f(x) = (1 + x) \cdot \sqrt{x}$ корень: $x = 0$

$f(x) = \sin x + \cos x$ корни: $x = -\dfrac{\pi}{4} + \pi n,\ n \in Z$	$f(x) = \dfrac{1}{\sin x}$ корней нет

Промежуток знакопостоянства — промежуток, на котором все значения функции положительны (или отрицательны), а на любом его расширении нет.

Примеры

$f(x) = 3x^2 + 5x - 8$; $\quad f(x) < 0$ при $x \in \left(-\dfrac{8}{3};\ 1\right)$;

$f(x) > 0$ при $x \in \left(-\infty;\ -\dfrac{8}{3}\right) \cup (1;\ +\infty)$.

$f(x) = x^{-2}$; два промежутка знакопостоянства $(-\infty;\ 0)$ и $(0;\ +\infty)$, на обоих функция положительна.

Таблица 20. ИССЛЕДОВАНИЕ ФУНКЦИЙ

Монотонность

Функция $f(x)$ называется *возрастающей* на промежутке I, если для любых x_1 и x_2 из этого промежутка $x_1 > x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$. Промежуток I называется *промежутком возрастания* функции $f(x)$, если на этом промежутке функция возрастает, а на любом его расширении нет.	Функция $f(x)$ называется *убывающей* на промежутке I, если для любых x_1 и x_2 из этого промежутка $x_1 > x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$. Промежуток I называется *промежутком убывания* функции $f(x)$, если на этом промежутке функция убывает, а на любом его расширении нет.

Промежутки возрастания и убывания называются *промежутками монотонности* функции.

Критерий монотонности функции

$f(x)$ возрастает на промежутке, если $f'(x) > 0$.	$f(x)$ убывает на промежутке, если $f'(x) < 0$.

Примеры

$f(x) = 3x^2 + 5x - 8$; $f'(x) = 6x + 5$;

$f'(x) > 0$ при $x > -\frac{5}{6}$; $f(x)$ возрастает на промежутке $\left[-\frac{5}{6};\ +\infty\right)$;

$f'(x) < 0$ при $x < -\frac{5}{6}$; $f(x)$ убывает на промежутке $\left(-\infty;\ -\frac{5}{6}\right]$.

$f(x) = -\frac{1}{x^3}$; два промежутка монотонности $(-\infty;\ 0)$ и $(0;\ +\infty)$; на обоих функция возрастает.

$f(x) = 3x + 4$ возрастает на R, один промежуток монотонности $(-\infty;\ +\infty)$.

$f(x) = 3x^2 + 6x - 8$; $f'(x) = 6(x + 1) = 0$ при $x = -1$;
$f'(-2) < 0 \Rightarrow f(x)$ убывает на $(-\infty;\ -1]$;
$f'(0) > 0 \Rightarrow f(x)$ возрастает на $[-1;\ +\infty)$;
$x_0 = -1$ — точка минимума; $f(-1) = -11$ — минимум.

$f(x) = x^3$ — экстремумов нет.

Таблица 20. ИССЛЕДОВАНИЕ ФУНКЦИЙ

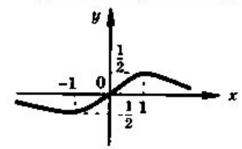
Исследование функции при помощи производной. Построение графика

Найдите $D(f)$.
Найдите производную, критические точки, исследуйте знаки производной.
Найдите промежутки монотонности, точки экстремума, определите вид точек экстремума.
Найдите экстремумы функции.
Исследуйте функцию на четность, нечетность, периодичность (периодическую функцию лучше исследовать на промежутке длины T).
«Набросайте» эскиз графика.
Найдите $E(f)$.
Найдите несколько значений функции (по крайней мере по одному в каждом промежутке монотонности).

По возможности
Исследуйте поведение функции на концах области определения и в точках разрывов.
Найдите горизонтальные и вертикальные асимптоты.
Найдите корни и промежутки знакопостоянства функции.

Постройте график функции

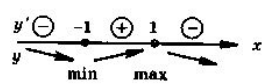
Пример: $y = \frac{x}{x^2+1}$.



$D(y) = R$.

$y' = \frac{1\cdot(x^2+1) - x\cdot 2x}{(x^2+1)^2} = \frac{1-x^2}{(1+x^2)^2}$;

y' существует при $x \in R$;
$y' = 0$ при $x = \pm 1$.



$y_{min} = y(-1) = -\frac{1}{2}$; $y_{max} = y(1) = \frac{1}{2}$.
Функция нечетная: $y(-x) = -y(x)$.

$E(y) = \left[-\frac{1}{2};\ \frac{1}{2}\right]$.

$\lim\limits_{x\to\infty} y = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{x}{x^2+1} = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{1}{x+\frac{1}{x}} = 0$.

$y = 0$ — горизонтальная асимптота; вертикальных асимптот нет.
$y = 0$ при $x = 0$ (корень),
$y > 0$ при $x > 0$;
$y < 0$ при $x < 0$.

Пример

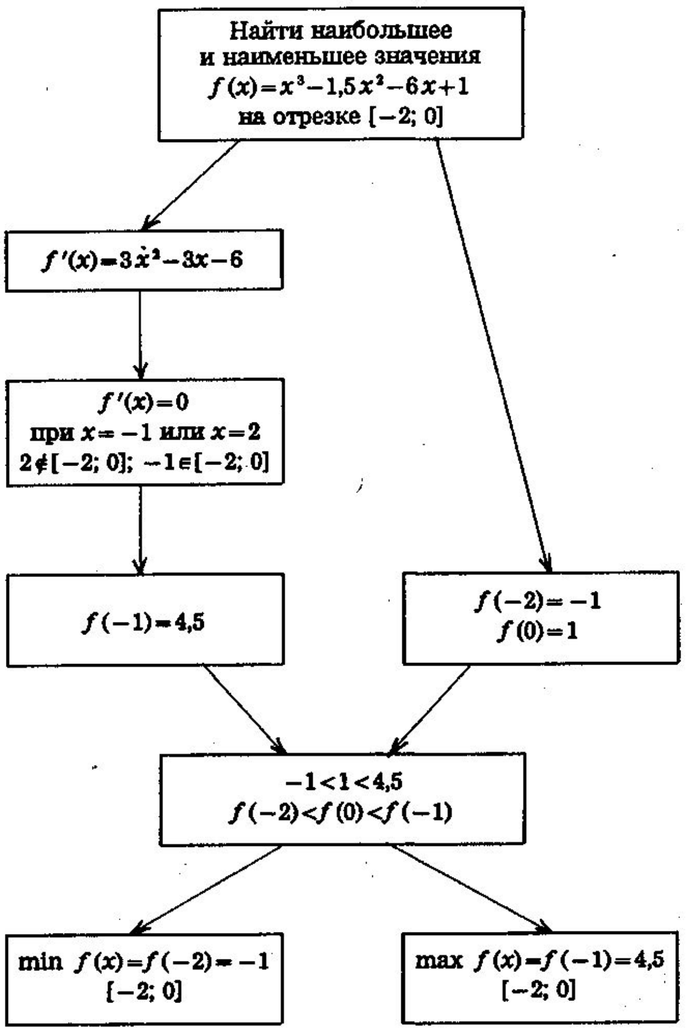


Схема исследования функции для построения графика

1. Область определения.
2. Четность или нечетность функции, периодичность.
3. Точки пересечения графика с осями координат.
4. Промежутки знакопостоянства.
5. Промежутки возрастания и убывания.
6. Точки экстремума и значения f в этих точках.
7. Исследование поведения функции при больших по модулю x.

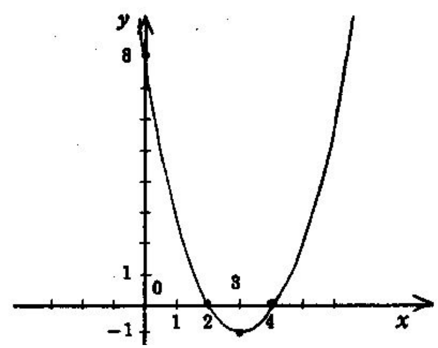
Пример. Исследовать функцию $f(x)=x^2-6x+8$

1. $D(f)=R$, т. к. f – многочлен.
2. $f(x)$ не является ни четной, ни нечетной. $f(x)$ не является периодической.
3. График $f(x)$ пересекает ось Ox в точках $(2;\ 0)$, $(4;\ 0)$; график $f(x)$ пересекает ось Oy в точке $(0;\ 8)$.
4. $f(x)>0$ при $x\in(-\infty;\ 2)\cup(4;\ \infty)$, $f(x)<0$ при $x\in(2;\ 4)$.

5, 6. $f'(x)=2x-6$, $f'(x)=0$ при $x=3$.

7.

x	$(-\infty;\ 3)$	3	$(3;\ \infty)$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	-1	↗
		min	



Правила дифференцирования

I. $C' = 0$, C — постоянная.
II. $(x)' = 1$.
III. $(u + v - w) = u' + v' - w'$.
IV. $(uv)' = u'v + uv'$.
V. $(Cu)' = Cu'$, C — постоянная.

VI. $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$.

VII. $y'_x = y'_u u'_x$.

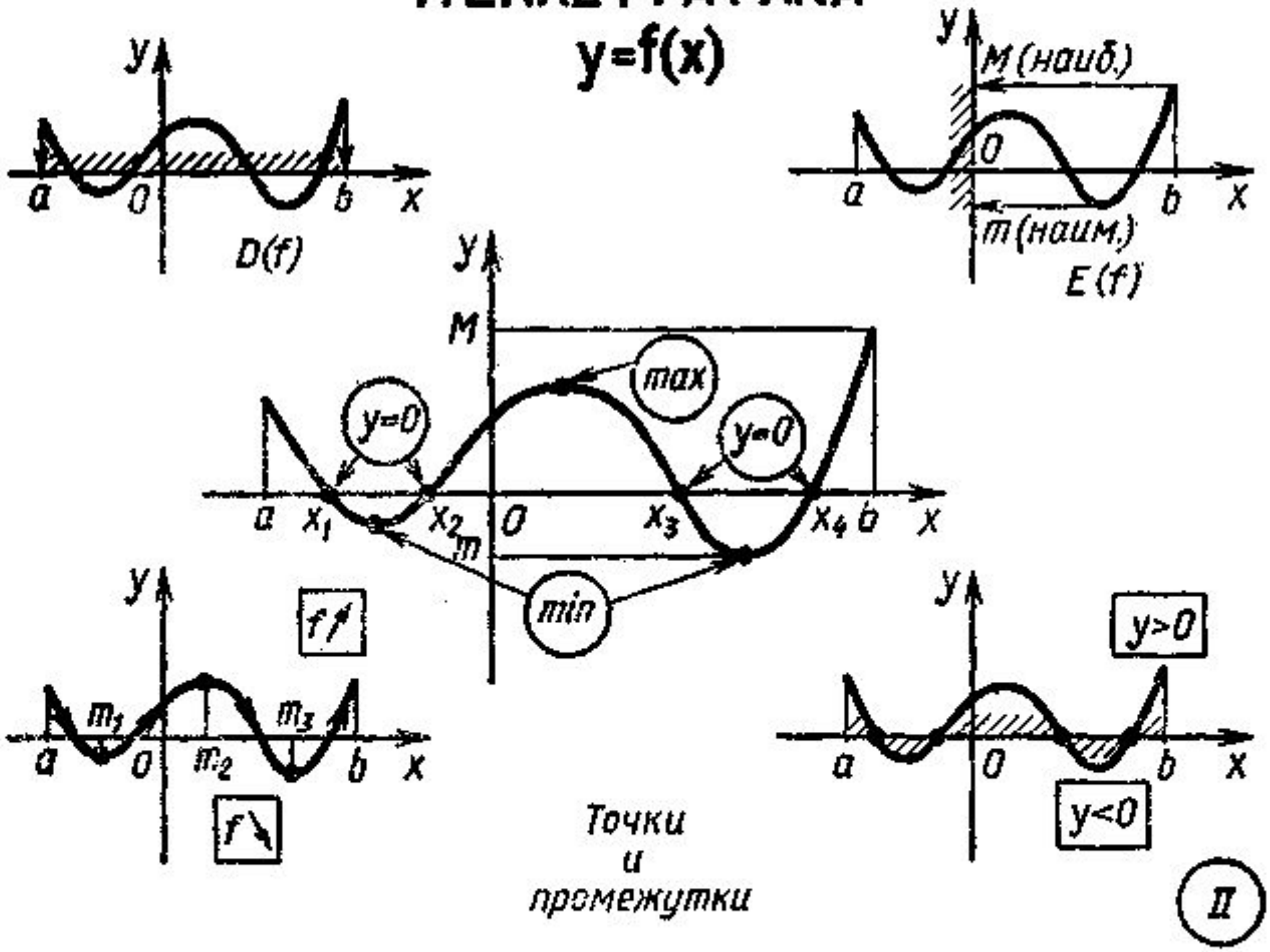
Формулы дифференцирования

Основные элементарные функции	*Сложные функции*
VIII. $(\ln x)' = \frac{1}{x}$,	$(\ln u)' = \frac{1}{u} \cdot u'$.
IX. $(\log_a x)' = \frac{1}{x \cdot \ln a}$,	$(\log_a u)' = \frac{1}{u \cdot \ln a} \cdot u'$.
X. $(x^n) = nx^{n-1}$,	$(u^n)' = nu^{n-1} \cdot u'$.
XI. $\left(\sqrt{x}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$,	$\left(\sqrt{u}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{u}} \cdot u'$.
XII. $(a^x)' = a^x \cdot \ln a$,	$(a^u)' = a^u \cdot \ln a \cdot u'$.
$(e^x)' = e^x$,	$(e^u)' = e^u \cdot u'$.
XIII. $(\sin x)' = \cos x$,	$(\sin u)' = \cos u \cdot u'$.
XIV. $(\cos x)' = -\sin x$,	$(\cos u)' = -\sin u \cdot u'$.
XV. $(\mathrm{tg}\, x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$,	$(\mathrm{tg}\, u)' = \frac{1}{\cos^2 u} \cdot u'$.
XVI. $(\mathrm{ctg}\, x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$,	$(\mathrm{ctg}\, u)' = -\frac{1}{\sin^2 u} \cdot u'$.
XVII. $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$,	$(\arcsin u)' = \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot u'$.
XVIII. $(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$,	$(\arccos u)' = -\frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot u'$.
XIX. $(\mathrm{acrtg}\, x)' = \frac{1}{1+x^2}$,	$(\mathrm{arctg}\, u)' = \frac{1}{1+u^2} \cdot u'$.

Карточки распечатываются и раздаются учащимся

ЧТЕНИЕ ГРАФИКА

y=f(x)



ПРОИЗВОДНАЯ

Аргумент x

Функция $y=f(x)$

Приращение *аргумента* Δx

Приращение *функции* $\Delta y=f(x+\Delta x)-f(x)$

$$(u+v)'=u'+v'$$

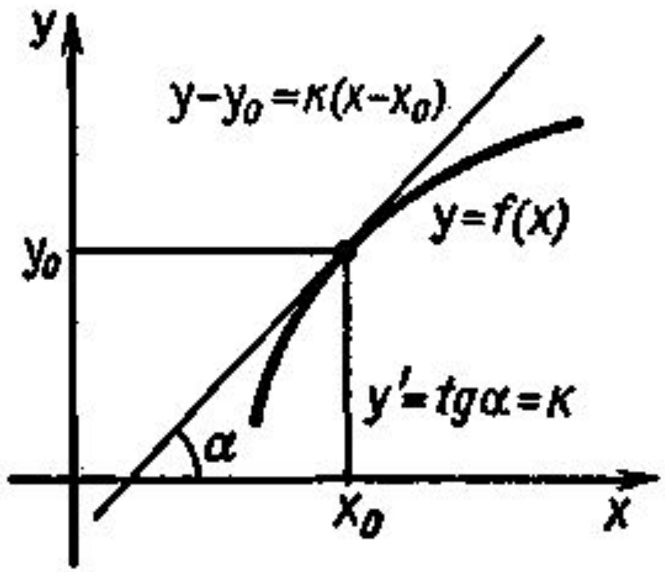
$$(cu)'=cu'$$

$$(uv)'=u'v+uv'$$

$$\left(\frac{u}{v}\right)'=\frac{u'v-uv'}{v^2}$$

$$(f(kx+b))'=kf'(kx+b)$$

$$(f(g(x)))'=f'(g(x))g'(x)$$



Средняя скорость $v_{cp}=\frac{\Delta y}{\Delta x}$

Производная $y'=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}$

y	y'
c	0
$kx+b$	k
x^n	nx^{n-1}
$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{x^2}$
$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$
$\sin x$	$\cos x$
$\cos x$	$-\sin x$
e^x	e^x
$\ln x$	$\frac{1}{x}$

VI


ИССЛЕДОВАНИЕ ФУНКЦИИ
Функция y
Производная y'
Монотонность
y
const
⟺ y' ≥ 0
⟺ y' ≤ 0
⟺ y' = 0
Экстремумы
max
min
⟹ y' = 0
y'
x0
+ 0 −
+ 0 −
x0
Перегиб
y'
x0
+ 0 +
x0
− 0 −
y = 1/x
Особая точка
y = |x|
Особая точка
VII

Производная обратной функции

$f(x)$ и $g(x)$ — взаимообратные функции;

если существует $f'(x_0)$ и $g'(x_0)$, то

$$g'(x_0) = \frac{1}{f'(x_0)}$$

Упражнения для устной работы

Темы :

- Определение производной
- Предел и непрерывность функции
- Уравнение касательной и применение производной
- Возрастание и убывание функции. Точки экстремума

Математические диктанты

- Формулы и правила дифференцирования

Д-Х. Формулы и правила дифференцирования

Вариант 1

1. Найдите $f'(-1)$, если $f(x) = -x^3 + 3x^2 + 4x - 2$.
2. Найдите $f'(x)$, если $f(x) = (1 - 2x)^3$.
3. Найдите $f'(4)$, если $f(x) = \frac{4x}{\sqrt{x}}$.
4. Дана функция $f(x) = \frac{\sqrt{x}}{x + 1}$, найдите ее производную.
5. Найдите $f'(x)$, если $f(x) = 2x \cdot \sin x$.
6. Решите уравнение $f'(x) = 0$, если $f(x) = \frac{x^2}{x - 1}$.
7. Решите неравенство $f'(x) > 0$, если $f(x) = \sin^2 x$.

8*. Вычислите значение $f'(1)$, если $f(x) = u(v(x))$ и $u(x) = \sqrt{x}$, $v(x) = x^3 - 2x$.

Вариант 2

1. Найдите $f'(-2)$, если $f(x) = -x^3 - x^2 + 3x - 4$.
2. Найдите $f'(x)$, если $f(x) = (3x - 4)^3$.
3. Найдите $f'(1)$, если $f(x) = \frac{x}{3\sqrt{x}}$.
4. Дана функция $f(x) = \frac{x - 1}{\sqrt{x}}$, найдите ее производную.
5. Найдите $f'(x)$, если $f(x) = 3x \cdot \cos x$.
6. Решите уравнение $f'(x) = 0$, если $f(x) = \frac{x^2}{x - 2}$.
7. Решите неравенство $f'(x) > 0$, если $f(x) = \cos^2 x$.

8*. Вычислите значение $f'(1)$, если $f(x) = u(v(x))$ и $u(x) = x^2 - 4x + 3$, $v(x) = \sqrt{x}$.

Темы математических диктантов

- Уравнение касательной и применение производной.
- Возрастание и убывание функций. Точки экстремума.
- Построение графиков функций с помощью производной.

Самостоятельные работы

Материала из пособий:

1. Л.А. Александрова . Алгебра и начала анализа. Самостоятельные работы/ Под ред. А.Г.Мордковича
2. М.И . Башмаков и др.Алгебра и начала анализа 10- 11кл./дидактические материалы.

Тесты по темам

- Производная. Техника дифференцирования.
- Метод интервалов. Геометрический и физический смысл производной.
- Исследование функции с помощью производной
- Производная и её применение

Производная. Техника дифференцирования

ПРОИЗВОДНАЯ И ЕЕ ПРИМЕНЕНИЕ

Вариант 1

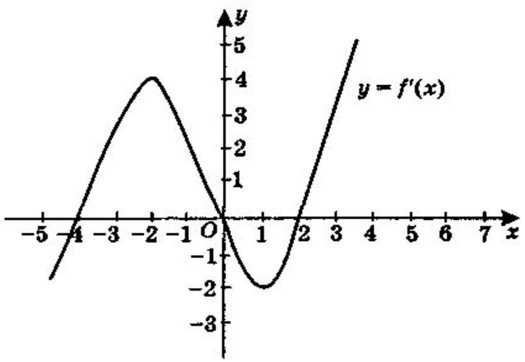
Часть 1

1. Найдите производную функции $y = 3x^7 - 12x$.
А) $y' = 3(7x^6 - 4x)$; Б) $y' = 12 - 21x^6$;
В) $y' = 3(7x^6 - 4)$; Г) $y' = 21x^6 + 4$.

2. Среди заданных функций укажите ту, производная которой имеет вид $y' = -(10x + \sin x)$.
А) $y = \sin x + 4x$; Б) $y = \cos x - 5x^2$;
В) $y = -\cos x + 4x$; Г) $y = -5x^2 - \sin x$.

3. Найдите угловой коэффициент касательной к графику функции $y = 7\sin x + \cos x$ в точке $x_0 = \frac{\pi}{2}$.
А) 1; Б) 0; В) −1; Г) 7.

4. На рисунке изображен график производной функции $y = f'(x)$. Найдите точку максимума функции $y = f(x)$.



5. Завершите предложение так, чтобы получилось истинное высказывание: «Функция $y = |x| + 1$ имеет производную...»
А) во всей области определения;
Б) на промежутке $[-1; 1]$;
В) в точке $x = 0$;
Г) на промежутке $(0; +\infty)$.

6. Найдите промежутки возрастания и убывания функции $y = \frac{1}{3}x^3 - 4x$.

Часть 2

7. Найдите значение производной функции $y = x - \frac{1 + \cos 4x}{2(1 - \sin^2 2x)}$ в точке $x = \frac{\pi}{4}$.
А) 2; Б) 0; В) 1; Г) −1.

8. При каких значениях аргумента касательная к графику функции $y = \frac{x^3}{3} - 6x^2 + x$ будет составлять с положительным направлением оси абсцисс угол 45°?
А) 1; 6; Б) 0; 12; В) 1; −12; Г) 1; 0.

9. Постройте график производной функции $y = f'(x)$ и восстановите по нему схематично график функции $y = f(x)$, если
$$f'(x) = \begin{cases} x + 1 \text{ при } x \leqslant 2, \\ -3 \text{ при } x > 2. \end{cases}$$

10. При каких значениях параметра b уравнение $\frac{1}{3}x^3 - x = b$ имеет три корня?

Производная.
Техника дифференцирования

Вариант I

1. Найдите производную функции

$$f(x) = \frac{x^3}{6} - 0{,}5x^2 - 3x + 2,$$

вычислите ее значение при $x = -1$.

а) $-2{,}5$; б) $1{,}5$; в) $-1{,}5$; г) $2{,}5$.

2. Найдите $f'(x)$, если $f(x) = x\sqrt{x}$.

а) $\frac{3}{2\sqrt{x}}$; б) $\frac{2\sqrt{x}}{3}$; в) $\frac{2}{3\sqrt{x}}$; г) $1{,}5\sqrt{x}$.

3. Найдите производную функции

$$g(x) = \frac{3 + 2x}{x - 5}.$$

а) $-\frac{13}{(x-5)^2}$; б) $\frac{8}{(x-5)^2}$; в) $\frac{-5}{(x-5)^2}$; г) $\frac{1-x}{(x-5)^2}$.

4. Найдите значение $f'(0{,}5)$, если

$$f(x) = \frac{3}{5 - 4x}.$$

а) 3; б) $\frac{4}{9}$; в) $2\frac{2}{3}$; г) 2.

5. Для функции $f(x) = 3\sin^2 x$ вычислите

$$f'\left(-\frac{\pi}{4}\right).$$

а) 6; б) -3; в) $-1{,}5$; г) $0{,}5$.

6. $f(x) = (2x - 3)\sqrt{x}$. Найдите $f'(1) + f(1)$.

а) 15; б) $7{,}5$; в) $2{,}75$; г) $0{,}5$.

7. $f(x) = 4x + \frac{8}{x}$. Решите уравнение

$$f'(x) = 0.$$

а) $0; 2$; в) $-\sqrt{2}; \sqrt{2}$;

б) $\sqrt{2}$; г) $-2; 2$.

8. $g(x) = (x - 3)(x + 2)^2$. Решите неравенство

$$g'(x) < 0.$$

а) $\left(-1\frac{1}{3}; 2\right)$; в) $(-2; 3)$;

б) $\left(-2; 1\frac{1}{3}\right)$; г) $(-0{,}5; 1)$.

9. При каких значениях x функция $f(x) = \sqrt{x^4 - 2x^2 + 1}$ не дифференцируема?

а) 1; б) 0; в) $-1; 1$; г) $\varnothing$.

10. $u(x) = \sqrt{x}$, $v(x) = 3x - 2$, $f(x) = u(v(x))$.

Решите уравнение

$$f'(x) = 0{,}375.$$

а) 12; б) $8{,}5$; в) $2{,}5$; г) 6.

Метод интервалов. Геометрический и физический смысл производной

Вариант I

1. Точка движется по координатной прямой по закону

$$s(t) = t^2 - 5t + 3.$$

Найдите $v_{ср.}$ на промежутке [4; 6].

а) 3; б) 5; в) 7,5; г) 10.

2. Точка движется по координатной прямой по закону

$$s(t) = -t^2 + 10t - 7.$$

Найдите $v_{мгн.}(3)$.

а) −5; б) 14; в) 19; г) 4.

3. Вращение точки вокруг оси совершается по закону

$$\varphi(t) = -t^3 + 12t^2 + 7t,$$

где $\varphi(t)$ — угол в радианах, t — время в секундах. Известно, что ускорение a в некоторый момент времени t равно 9 $\frac{рад}{с^2}$.

Найдите этот момент времени t.

а) 5; б) 4; в) 2,5; г) 3,5.

4. Найдите уравнение касательной к графику функции

$$f(x) = -x^2 - 4x + 2$$

в точке с абсциссой $x_0 = -1$.

а) $y = -2x - 3$; б) $y = 2x - 1$; в) $y = -2x + 3$; г) $y = 2x + 3$.

5. К графику функции $y = \frac{3}{x + 2}$ проведены две параллельные касательные, одна из которых проходит через точку графика с абсциссой $x_0 = -1$. Найдите абсциссу точки, в которой другая касательная касается графика данной функции.

а) −2; б) 2; в) 1; г) −3.

6. Напишите уравнение касательной к графику функции

$$f(x) = x^2 - 4x + 5,$$

если эта касательная проходит через точку (0; 4) и абсцисса точки касания положительна.

а) $y = 2x + 4$; в) $y = -4x + 4$;
б) $y = -2x + 4$; г) $y = 4x - 3$.

7. Решите неравенство

$$\frac{3}{x} > 4 - x.$$

а) $(0; 1) \cup (3; +\infty)$; в) $(-\infty; -1) \cup (1; 3)$;
б) $(-\infty; 0) \cup (1; 3)$; г) $(-\infty; 1) \cup (3; +\infty)$.

8. Решите неравенство

$$\frac{(x^2 - 9)\sqrt{2 - x}}{2x + 3} \geqslant 0,$$

найдите произведение целых чисел, удовлетворяющих данному неравенству.

а) −6; б) 6; в) 12; г) 0.

9. При каких значениях a все положительные числа являются решениями неравенства

$$x^3 - ax + x > 0?$$

а) $a < 0$; б) $a \geqslant 1$; в) $a \leqslant 1$; г) $a \geqslant 0$.

10. Прямая $y = x - 2$ касается графика функции $y = f(x)$ в точке $x_0 = -1$. Найдите $f(-1)$.

а) 1; б) −3; в) −2; г) 2.

Исследование функций с помощью производной

Вариант I

1. Дана функция

$$f(x) = -\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + 2x - 3.$$

Найдите ее критические точки.

а) 2; −1; б) 1; −2; в) −3; 1; г) −2; 3.

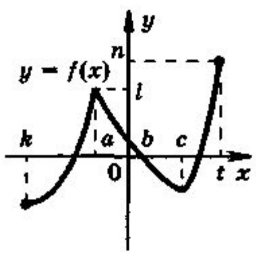
2. Найдите точки экстремума функции

$$f(x) = 0{,}5x^4 - 2x^3.$$

а) $x_{max} = 3$, $x_{min} = 0$; в) $x_{min} = 3$, $x_{max} = 0$;
б) $x_{min} = 3$; г) $\varnothing$.

3. Дан график функции $y = f(x)$. Какие из утверждений верные:

1) a, c — критические точки;
2) a, c — точки экстремума;
3) на $(k; t)$ $f(x)$ — дифференцируемая;
4) $[a, c]$ — промежуток убывания функции;
5) l — точка максимума;
6) $\max\limits_{[k;\, t]} f(x) = n$;
7) $x_{max} = a$.



а) 2, 3, 4, 6, 7; в) 3, 4, 5, 6, 7;
б) 1, 2, 4, 6, 7; г) 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7.

4. Найдите промежутки убывания функции

$$f(x) = x^3 - 6x^2 + 5.$$

а) $[-4; 0]$; в) $[0; 4]$;
б) $(-\infty; 0]$; $[4; +\infty)$; г) $\varnothing$.

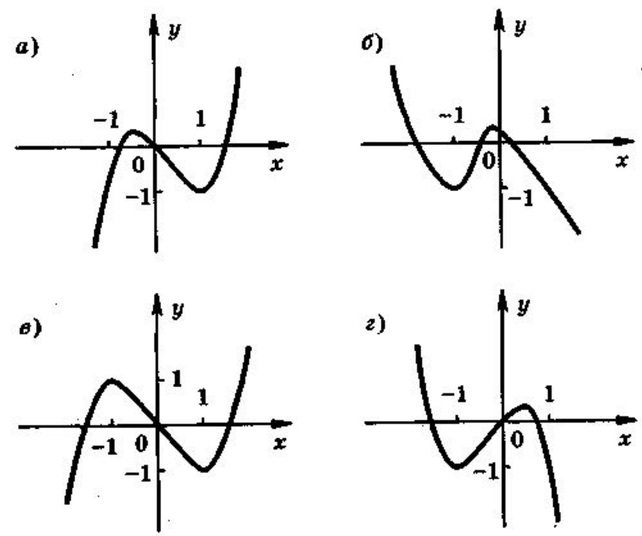
5. Найдите промежутки возрастания функции

$$f(x) = \frac{3x + 2}{1 - 4x}.$$

а) $(-\infty; 0{,}25)$; $\left(\frac{2}{3}; +\infty\right)$; в) $(-0{,}25; 0{,}25)$;
б) $(-\infty; 0{,}25)$; $(0{,}25; +\infty)$; г) $\varnothing$.

6. Укажите график функции

$$f(x) = x^3 - x^2 - x.$$



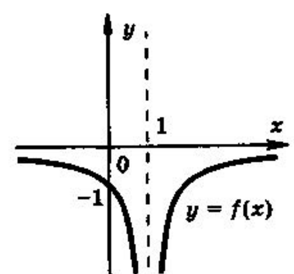
7. Укажите формулу, которой задана функция $y = f(x)$.

а) $f(x) = \frac{1}{-x^2 - 2x - 1}$;

б) $f(x) = -\frac{1}{x - 1}$;

в) $f(x) = -\frac{1}{(x - 1)^2}$;

г) $f(x) = \frac{1}{x^2 - 1}$.



8. Найдите экстремумы функции

$$f(x) = (6 - 3x)\sqrt{x}.$$

а) 2; б) 1,5; в) $\frac{2}{3}$; г) $4\sqrt{\frac{2}{3}}$.

9. При каком значении a функция

$$f(x) = x\sqrt{a - x^2}$$

имеет экстремум в точках $x = -2$ и $x = 2$?

а) 2; б) 12; в) 8; г) 4.

10. Укажите наименьшее целое число, удовлетворяющее неравенству

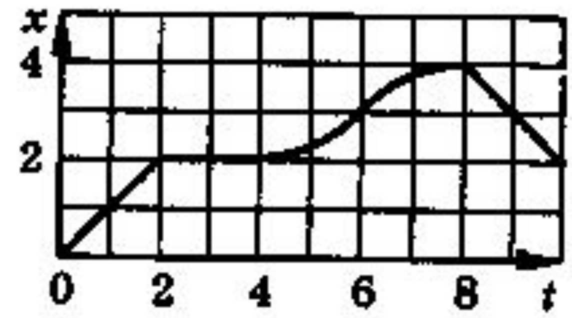
$$2x - \sin x > 0.$$

а) 0; б) -1; в) 2; г) 1.

Физический смысл производной

Вариант А1

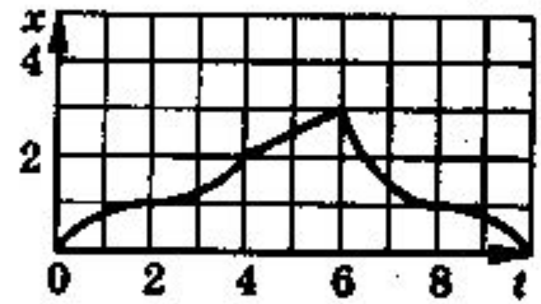
Дан график движения пешехода. Для каждого указанного в таблице промежутка времени отметьте верные утверждения.



Скорость	Промежуток времени				
	$0<t<2$	$2<t<4$	$4<t<6$	$6<t<8$	$8<t<10$
равна нулю на всем промежутке					
увеличивается					
постоянна и отлична от нуля					
уменьшается					

Вариант Б1

Дан график прямолинейного движения. Для каждого указанного в таблице промежутка времени отметьте верные утверждения.

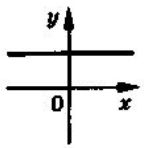
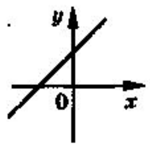
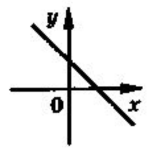
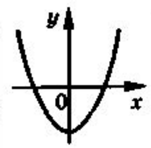
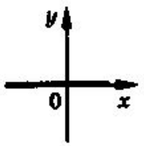
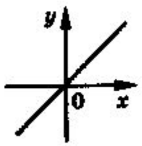
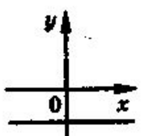
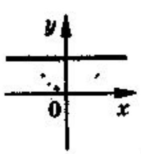


Скорость	Промежуток времени				
	[0; 2]	[2; 4]	[4; 6]	[6; 8]	[8; 10]
постоянная					
возрастает					
убывает					
положительная					
отрицательная					

График функции и график производной

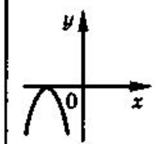
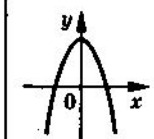
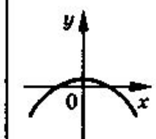
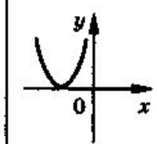
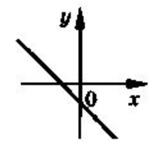
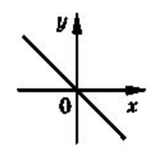
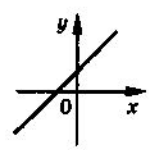
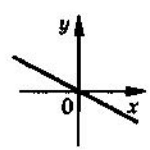
Для функции y, заданной графически, найдите график ее производной y'.

Вариант А1

График функции y / График производной y'				
				
				
				
				

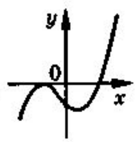
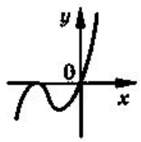
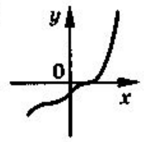
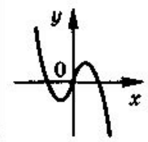
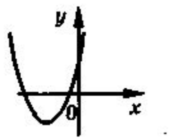
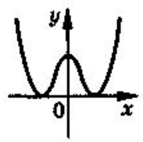
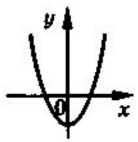
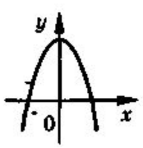
Вариант Б1

Для функции y, заданной графически, найдите график ее производной y'.

График функции y / График производной y'				
				
				
				
				

Вариант В1

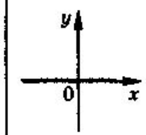
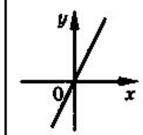
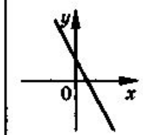
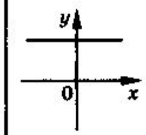
Для каждой функции y, заданной графически, найдите график ее производной y'.

График функции y / График производной y'				
				
				
				
				

Дифференцирование

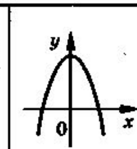
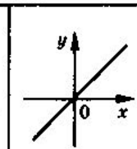
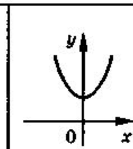
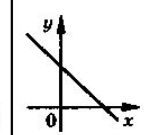
Вариант А1

Укажите пары: «функция — график производной этой функции».

График производной y' / Функция y				
$y = 3x - 7$				
$y = 7$				
$y = x^2 - 7$				
$y = -x^2 + x$				

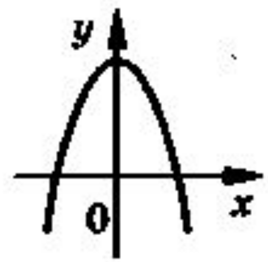
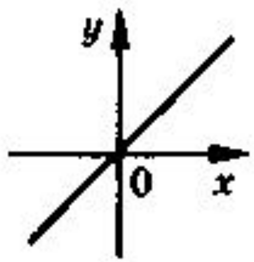
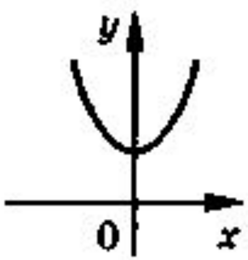
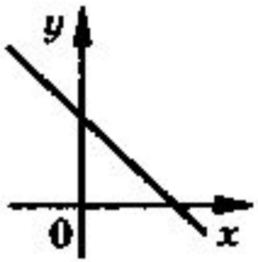
Вариант Б1

Укажите пары: «функция — график производной этой функции».

График производной y' / Функция y				
$y = 2x - x^3$				
$y = \frac{1}{3}x^3 + 2x$				
$y = \frac{1}{2}x^2 + 2$				
$y = 2x - \frac{1}{2}x^2$				

Вариант Б1

Укажите пары: «функция — график производной этой функции».

График производной y' / Функция y				
$y = 2x - x^3$				
$y = \frac{1}{3}x^3 + 2x$				
$y = \frac{1}{2}x^2 + 2$				
$y = 2x - \frac{1}{2}x^2$				

Связь свойств функции и производной

Вариант А1

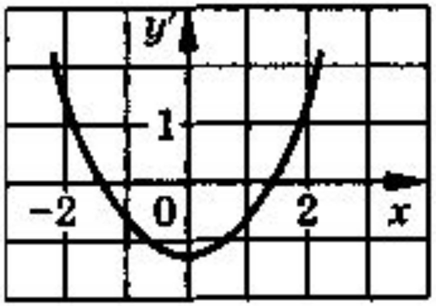
Укажите, какому свойству удовлетворяет функция $y(x)$ на отрезке [1; 3], если задана ее производная.

Свойство функции / Производная	Монотонно возрастает	Имеет максимум во внутренней точке	Имеет минимум во внутренней точке	Постоянна	Монотонно убывает
$y' = -5$					
$y' = 2 - x$					
$y' = 1 + 2x$					
$y' = 0$					
$y' = 5$					

Исследование функции по графику производной

Вариант А1

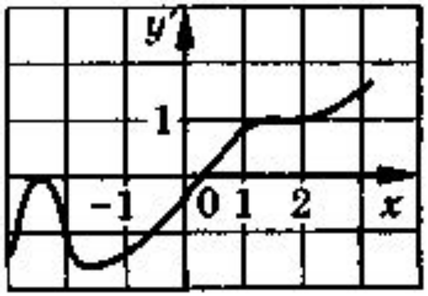
На рисунке изображен график *производной* некоторой функции. Укажите в таблице интервалы, на которых функция обладает указанным свойством.



Свойство функции	Интервал				
	(−2; 0)	(−1; 0)	(−1; 1)	(1; 2)	(2; 3)
Монотонно возрастает					
Монотонно убывает					
Имеет максимум					
Имеет минимум					

Вариант Б1

На рисунке изображен график *производной* некоторой функции. Укажите в таблице интервалы, на которых функция обладает указанным свойством.



Свойство функции	Интервал				
	(−3; −1)	(−2; 0)	(1; 3)	(0; 2)	(2; 3)
Монотонно возрастает					
Монотонно убывает					
Имеет максимум					
Имеет минимум					
Имеет перегиб					

Тренажеры по теме «Производная»

- Устный счет. Карточка №9.
- Тренажеры по теме

« ПРОИЗВОДНАЯ И ЕЁ ПРИМЕНЕНИЕ»

М.И . Башмаков и др.Алгебра и начала анализа 10- 11кл./дидактические материалы.

- Функция, её производная и первообразная на ЕГЭ.

Карточка № 9

Найдите производную

5^{10}	π	90	$\sqrt{2}$	$\frac{1}{6}$	7^3	$(x+6)^2$
$2x$	x	$-10x$	$\frac{1}{8}x$	πx	$-x$	$\sqrt{3}\,x$
$\frac{3}{x}$	$\frac{5}{x-1}$	$\frac{\pi}{x}$	$\frac{10}{x+2}$	$\frac{6}{x-3}$	$\frac{\sqrt{2}}{3-x}$	$\frac{7}{x+5}$
x^3	x^4	x^5	x^6	x^7	x^8	x^{100}
$2x^5$	$3x^4$	$7x^3$	$8x^2$	$9x^6$	$10x^7$	$11x^8$
$(x-3)^2$	$(x+2)^2$	$(x-6)^4$	$(x+7)^5$	$(8+x)^6$	$(7-x)^7$	$(9-x)^8$
$(2x-5)^4$	$(3x+6)^3$	$(7-5x)^2$	$(8-2x)^3$	$(7x-8)^4$	$(5-3x)^3$	$(7-8x)^3$
$\frac{2}{x^2}$	$\frac{3}{x^3}$	$-\frac{4}{x^2}$	$\frac{5}{x^6}$	$-\frac{6}{x^6}$	$\frac{7}{x^4}$	$-\frac{8}{x^6}$
$\frac{3}{(x+5)^2}$	$\frac{2}{(x-3)^2}$	$\frac{1}{(x-6)^2}$	$\frac{7}{(5-x)^2}$	$\frac{8}{(3-x)^3}$	$\frac{5}{(x+2)^4}$	$\frac{7}{(8-x)^3}$
$\frac{1}{\sqrt{x}}$	$\frac{2}{\sqrt{x}}$	$\frac{1}{\sqrt[3]{x}}$	$\frac{1}{\sqrt[4]{x}}$	$\frac{2}{\sqrt[5]{x}}$	$\frac{3}{\sqrt{x}}$	$\frac{3}{\sqrt[3]{3}}$
$\sqrt[3]{x}$	$\sqrt[3]{x^2}$	$\sqrt[4]{x}$	$\sqrt[4]{x^3}$	$\sqrt[5]{x}$	$\sqrt[5]{x^2}$	$\sqrt[5]{x^4}$
$\frac{1}{\sqrt{6x-7}}$	$\frac{1}{\sqrt{2x-3}}$	$\frac{1}{\sqrt{3x-5}}$	$\frac{1}{\sqrt[3]{4-2x}}$	$\frac{1}{\sqrt[3]{7-5x}}$	$\frac{1}{\sqrt[3]{6-8x}}$	$\frac{1}{\sqrt[4]{7x-8}}$
$\sin 2x$	$\sin 3x$	$\sin\frac{x}{4}$	$\sin 5x$	$\sin\left(3x-\frac{\pi}{3}\right)$	$\sin\left(4x+\frac{\pi}{6}\right)$	$\sin(2-5x)$
$\cos 3x$	$\cos 2x$	$\cos 5x$	$\cos\left(x-\frac{\pi}{6}\right)$	$\cos\left(2x+\frac{\pi}{7}\right)$	$\cos\left(\frac{\pi}{9}-3x\right)$	$\cos\left(\frac{\pi}{8}+6x\right)$
$\operatorname{tg} 2x$	$\operatorname{tg}\left(3x-\frac{\pi}{6}\right)$	$\operatorname{tg}\left(4x+\frac{\pi}{3}\right)$	$\operatorname{tg} 5x$	$\operatorname{tg}\frac{x}{6}$	$\operatorname{tg} 7x$	$\operatorname{tg} 8x$
$\operatorname{ctg} 3x$	$\operatorname{ctg}\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)$	$\operatorname{ctg}\left(3x-\frac{\pi}{6}\right)$	$\operatorname{ctg} 2x$	$\operatorname{ctg} 3x$	$\operatorname{ctg}\frac{x}{4}$	$\operatorname{ctg} 4x$
$2\sin 3x$	$3\sin 2x$	$4\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$	$2\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)$	$3\sin\left(\frac{x}{3}-\frac{\pi}{5}\right)$	$4\sin\left(\frac{x}{7}-\frac{\pi}{6}\right)$	$3\sin\left(\frac{\pi}{4}+2x\right)$
$3\cos 2x$	$2\cos 3x$	$4\cos 3x$	$5\cos\frac{x}{5}$	$6\cos\frac{x}{6}$	$7\cos\left(x-\frac{\pi}{6}\right)$	$8\cos\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)$
$4\operatorname{tg} 2x$	$3\operatorname{tg}\left(x+\frac{\pi}{3}\right)$	$2\operatorname{tg}\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)$	$3\operatorname{tg} 3x$	$5\operatorname{tg} 2x$	$3\operatorname{tg}\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)$	$2\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}-x\right)$

$5\operatorname{ctg} 3x$	$3\operatorname{ctg} 3x$	$5\operatorname{ctg} 2x$	$2\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{4}-x\right)$	$3\operatorname{ctg}\left(x+\frac{\pi}{3}\right)$	$7\operatorname{ctg} 2x$	$2\operatorname{ctg}\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)$
$\sin^2 2x$	$\sin^3 x$	$\sin^2 3x$	$\sin^2\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)$	$\sin^2\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{3}\right)$	$\sin^2\left(\frac{\pi}{3}-2x\right)$	$\sin^4 3x$
$\cos^3 x$	$\cos^2\left(x+\frac{\pi}{3}\right)$	$\cos^2\left(x-\frac{\pi}{6}\right)$	$\cos^2 2x$	$\cos^2 3x$	$\cos^2\left(\frac{\pi}{4}-x\right)$	$\cos^2\left(\frac{\pi}{6}+x\right)$
$\operatorname{tg}^2 x$	$\operatorname{tg}^2 2x$	$\operatorname{tg}^2 3x$	$\operatorname{tg}^2\left(x+\frac{\pi}{3}\right)$	$\operatorname{tg}^2\left(x-\frac{\pi}{6}\right)$	$\operatorname{tg}^3 x$	$\operatorname{tg}^3 2x$
$\operatorname{ctg}^2 x$	$\operatorname{ctg}^3 3x$	$\operatorname{ctg}^2 2x$	$\operatorname{ctg}^3 x$	$\operatorname{ctg}^2\left(x+\frac{\pi}{3}\right)$	$\operatorname{ctg}^2\left(x-\frac{\pi}{6}\right)$	$\operatorname{ctg}^2 3x$
$2\sin^3 2x$	$3\cos^2 3x$	$2\operatorname{tg}^3 2x$	$3\operatorname{ctg}^2 3x$	$2\cos^2\left(3x-\frac{\pi}{6}\right)$	$3\operatorname{ctg}^2\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)$	$4\cos^2 6x$
e^{2x}	e^{3x}	$2e^{5x}$	$3e^{x}$	$4e^{2x}$	$7e^{x^2}$	$e^{\cos x}$
2^x	3^{2x}	4^{x^2}	5^{2x-1}	$7^{\sin x}$	$8^{2\cos x}$	$9^{\operatorname{tg} x}$
$2\ln x$	$\ln(x+1)$	$\ln(x^2-2)$	$\ln^2 x$	$2\ln^3 x$	$2\ln^3(x-5)$	$3\ln\sin x$
$\log_3 x$	$\log_4 2x$	$4\log_5^2 x$	$\log_7(5x-1)$	$\lg^3(2x-1)$	$2\lg\sin x$	$3\lg^2(x^2-5)$

Домашние контрольные работы

- Тесты 3 уровней
- Контрольные к другим УМК
- Тесты (выбор ответа, истина или ложь, заполнение пропусков)
- Использование различных пособий при составлении индивидуальных тематических заданий
- Использование пособий для подготовки к ЕГЭ

Вариант 0

1. Найдите производную функции в точке x_0:

а) $y = x^2$, $x_0 = 2$;

б) $y = \sin x$, $x_0 = \frac{\pi}{2}$;

в) $y = 3\cos x$, $x_0 = \pi$;

г) $y = \sqrt{x}$, $x_0 = 16$.

2. Приведя функцию к виду $k \cdot x^m$ $(m \in Z)$, найдите производную:

а) $y = 2x^2 \cdot x$; б) $y = \frac{3}{x^2}$;

в) $y = \frac{1}{3x^2}$; г) $y = \frac{x^2}{3}$.

3. Используя формулу производной от суммы, найдите производную функции:

а) $y = x^2 - 6x + 1$;

б) $y = x^2(x - 2)$;

в) $y = \frac{3x^3 - 7x^2 + x}{x}$.

4. Используя формулы производной произведения и частного, найдите производную функции:

а) $y = (x^3 + x^4)(x^5 - x^2)$;

б) $y = \frac{x}{x^2 - 1}$.

5. Используя правило дифференцирования сложной функции, найдите производную функции:

а) $y = (x^2 - 2)^6$; б) $y = \sqrt{x^2 - 2}$;

в) $y = \sin 2x$; г) $y = \cos^2 \frac{x}{2}$.

Касательная

Подготовительный вариант

1. Напишите уравнение касательной к графику функции $y = f(x)$ в точке x_0:

а) $f(x) = \frac{1}{2}x^2$, $x_0 = 2$;

б) $f(x) = -\cos x$, $x_0 = 0$.

2. Напишите уравнение касательной к графику функции $y = x^2 - 4x$, параллельной оси абсцисс.

3. Найдите все общие точки графика функции

$$y = x^2 - x^3$$

и касательной к этому графику в точке с абсциссой $x_0 = 0$.

4. Найдите общую точку касательных к графику

$$y = x^2 - 7x + 12,$$

одна из которых касается графика в точке с абсциссой 3, другая в точке с абсциссой 4.

5. Напишите уравнение всех касательных к графику функции

$$y = -2x^2,$$

проходящих через точку $M(-1; 0)$.

Исследование функции при помощи производной

Подготовительный вариант

1. Найдите критические точки функции, определенной на множестве действительных чисел:

а) $f(x) = 4x + 3$;

б) $f(x) = x^2 - 3x - 3$;

в) $f(x) = x^3 - 2x^2 - 7x + 3$.

2. Найдите промежутки возрастания и убывания функции и определите ее точки экстремума:

а) $f(x) = 4x + 1$;

б) $f(x) = x^2 - 3x + 2$;

в) $f(x) = x^3 + 2x^2 - 7x - 2$.

3. Найдите экстремумы функции:

а) $f(x) = x^2 (x + 1)$;

б) $f(x) = x^3 (x - 5)$.

4. При каких значениях b один из экстремумов функции

$$y = x^3 - 6x + b$$

равен 2?

Контрольные работы

КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА № 6

(Правила и формулы отыскания производных)

Вариант 1

1. Найдите производную функции:

а) $y = x^5$;

б) $y = 3$;

в) $y = \frac{4}{x}$;

г) $y = 3 - 2x$;

д) $y = 2\sqrt{x} + 3\sin x$;

е) $y = x\cos x$;

ж) $y = \frac{\operatorname{tg} x}{x}$;

з) $y = (3x + 5)^4$.

2. Найдите угол, который образует с положительным лучом оси абсцисс касательная к графику функции $y = \frac{x^{10}}{10} - \frac{x^7}{7} + x\sqrt{3} - 2$ в точке $x_0 = 1$.

3. Вычислите $f'\left(\frac{\pi}{3}\right)$, если

$$f(x) = 2\sin x + 3x^2 - 2\pi x + 3.$$

4. Прямолинейное движение точки описывается законом $s = t^5 - t^3$ (м). Найдите ее скорость в момент времени $t = 2$ с.

---

5. Найдите все значения x, при которых выполняется неравенство $f'(x) \leq 0$, если $f(x) = 12x - x^3$.

---

6. Найдите все значения x, при которых выполняется равенство $f'(x) = 0$, если

$$f(x) = \cos 2x + x\sqrt{3} \quad \text{и} \quad x \in [0; 4\pi].$$

КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА № 7 (2 ч)

(Применение производной к исследованию функций)

Вариант 1

1. Дана функция $y = x^3 - 3x^2 + 4$. Найдите:

а) промежутки возрастания и убывания функции;

б) точки экстремума;

в) наибольшее и наименьшее значения функции на отрезке $[-1; 4]$.

2. Постройте график функции

$$y = x^3 - 3x^2 + 4.$$

3. Составьте уравнение касательной к графику функции $y = 4\sqrt{x}$ в точке $x = 4$.

---

4. Площадь прямоугольного участка 144 м². При каких размерах участка длина окружающего его забора будет наименьшей?

---

5. Постройте график функции

$$y = \frac{x^2 - 4}{x^2 + 4}.$$

Вариант 2

1. Напишите уравнение касательной к графику функции $y = f(x)$ в точке x_0:

а) $f(x) = -x^2$, $x_0 = 1$;

б) $f(x) = \sin x$, $x_0 = 0$.

2. Напишите уравнение касательной к графику функции

$$y = 3x - x^2,$$

параллельной оси абсцисс.

3. Найдите все общие точки графика функции

$$y = x^3 + 2x^2$$

и касательной к этому графику в точке с абсциссой $x_0 = 0$.

4. Найдите общую точку касательных к графику

$$y = x^2 - 3x + 2,$$

одна из которых касается графика в точке с абсциссой 2, другая в точке с абсциссой 1.

5. Напишите уравнение всех касательных к графику функции

$$y = -x^2,$$

проходящих через точку $M(1; 0)$.

Вариант 1

1. Найдите производную функции в точке x_0:

а) $y = 3x^2$, $x_0 = 1$;

б) $y = \cos x$, $x_0 = \frac{\pi}{6}$;

в) $y = -2\sin x$, $x_0 = \frac{\pi}{4}$;

г) $y = 2 + \sqrt{x}$, $x_0 = 4$.

2. Приведя функцию к виду $k \cdot x^m$ $(m \in Z)$, найдите производную:

а) $y = 3x^2 \cdot x^3$; б) $y = \frac{2}{x^2}$;

в) $y = \frac{1}{3x^5}$; г) $y = \frac{x^5}{175}$.

3. Используя формулу производной от суммы, найдите производную функции:

а) $y = x^2 - 5x + \frac{1}{x}$;

б) $y = x(x^2 - 5x + 1)$;

в) $y = \frac{x^3 - 5x^2 + 1}{x}$.

4. Используя формулы производной произведения и частного, найдите производную функции:

а) $y = x\cos x$;

б) $y = \frac{x^2}{1 + x}$.

5. Используя правило дифференцирования сложной функции, найдите производную функции:

а) $y = (x^2 - 3x + 1)^7$; б) $y = \sqrt{x^2 - 3x + 1}$;

в) $y = \operatorname{tg}\left(3x - \frac{\pi}{3}\right)$; г) $y = \cos^2 x$.

Зачет

- Вопросы по теоретическому материалу
- Упражнения на отработку основных понятий, техники и правил дифференцирования
- Построение графиков функций с помощью производной
- Применение производной при решении прикладных задач на максимум, минимум