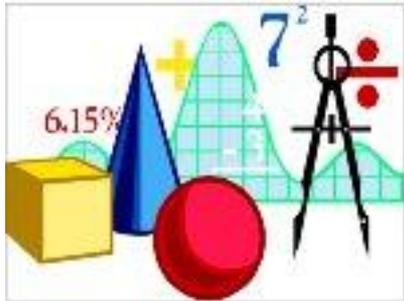


ГККП «Музыкальный колледж имени  
Курмангазы»

**Параллельные прямые в пространстве.  
Признак параллельности прямых. Признак  
параллельности прямой и плоскости.  
Признак параллельности плоскостей.  
Существование плоскости, параллельной  
данной плоскости.**



Выполнила:  
Катаева Сагира Насибулловна  
учитель математики

Западно – Қазақстанская область  
Уральск  
2014 г.



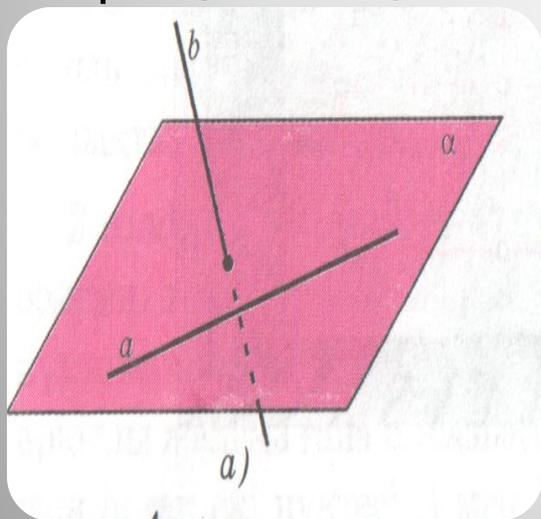
- : **Развивающие:** создать условия для развития познавательной активности учащихся, познавательного интереса к предмету; развивать навыки самостоятельной деятельности учащихся; развивать навыки самоконтроля; развивать активность учащихся, формировать учебно-познавательные действия, коммуникативные, исследовательские навыки учащихся, умение анализировать и устанавливать связь между элементами темы.
- **Воспитывающие:** создать условия успешности ученика на уроке; воспитывать культуру умственного труда; способность к самоанализу, рефлексии; развивать умение рецензировать и корректировать ответы товарищей. воспитывать умение критически относиться к результатам деятельности; обеспечить гуманистический характер Цели обучения;

## Цели урока:

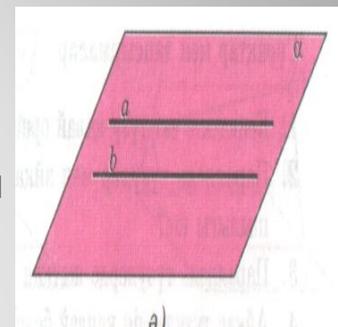
## Взаимное расположение двух прямых на плоскости :

### Определение:

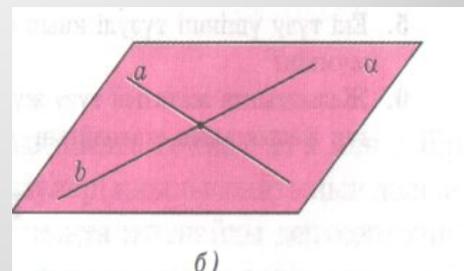
Прямые, которые не пересекаются и не лежат в одной плоскости, называются скрещивающимися



Определение: Две прямые в пространстве называются параллельными, если они лежат в одной плоскости и не пересекаются

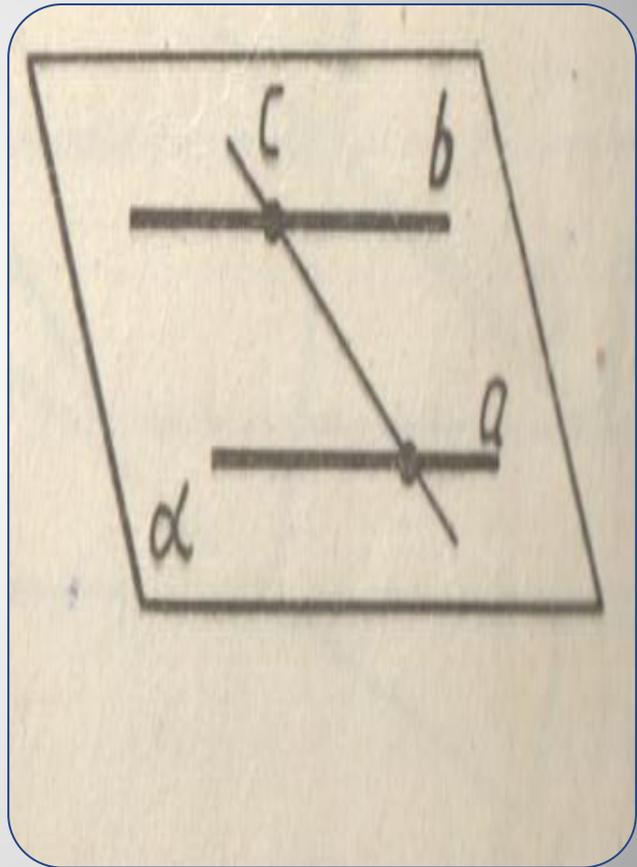


Определение. Если прямые имеют одну общую точку и лежат в одной плоскости, то они пересекаются.



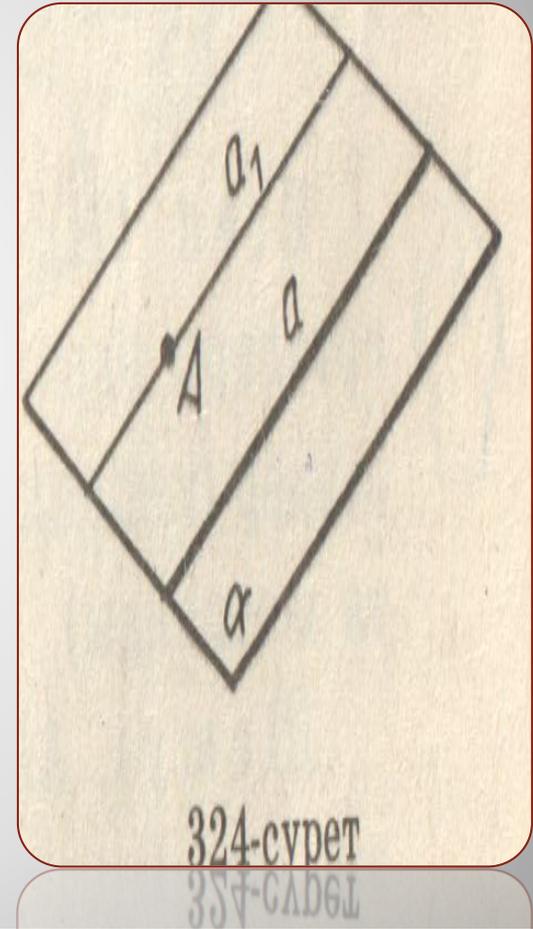
- **Задача (3).** Докажите, что все прямые, пересекающие две данные параллельные прямые, лежат в одной плоскости.
- **Решение.** Так как данные прямые  $a$  и  $b$  параллельны, то через них можно провести плоскость (рис. 323). Обозначим ее  $\alpha$ . Прямая  $c$ , пересекающая данные параллельные прямые, имеет с плоскостью две общие точки — точки пересечения с данными прямыми. По теореме 15.2 эта прямая лежит в плоскости  $\alpha$ . Итак, все прямые, пересекающие две данные параллельные прямые, лежат в одной плоскости — плоскости  $\alpha$ .

## Параллельные прямые в пространстве



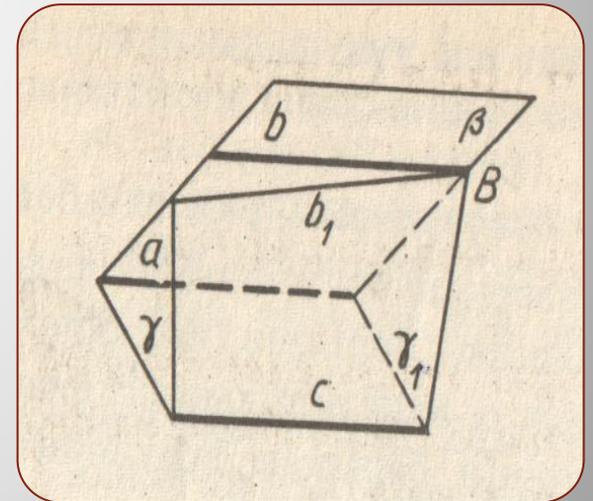
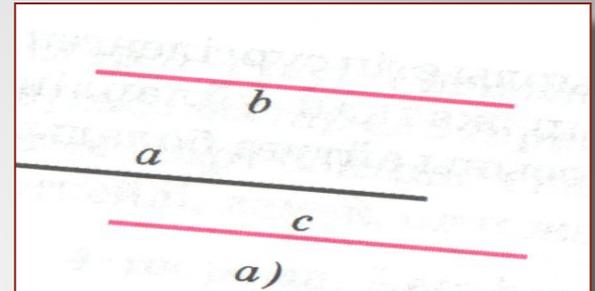
- **16.1. Через точку вне данной прямой можно провести прямую, параллельную этой прямой, и притом только одну.**
- Замечание. Утверждение единственности в теореме 16.1 не является простым следствием аксиомы параллельных, так как этой аксиомой утверждается единственность прямой, параллельной данной в данной плоскости. Поэтому она требует доказательства.
- Доказательство. Пусть  $a$  — данная прямая и  $A$  — точка, не лежащая на этой прямой (рис. 324). Проведем через прямую  $a$  и точку  $A$  плоскость  $\alpha$ . Проведем через точку  $A$  в плоскости  $\alpha$  прямую  $a_1$ , параллельную  $a$ . Докажем, что прямая  $a_1$ , параллельная  $a$ , единственна.
- Допустим, что существует другая прямая  $a_2$ , проходящая через точку  $A$  и параллельная прямой  $a$ .
- Через прямые  $a$  и  $a_2$  можно провести плоскость  $\alpha_2$ . Плоскость  $\alpha_2$  проходит через прямую  $a$  и точку  $A$ , следовательно, по теореме 15.1 она совпадает с  $\alpha$ . Теперь по аксиоме параллельных прямые  $a_1$  и  $a_2$  совпадают. Теорема доказана.

## Параллельные прямые в пространстве



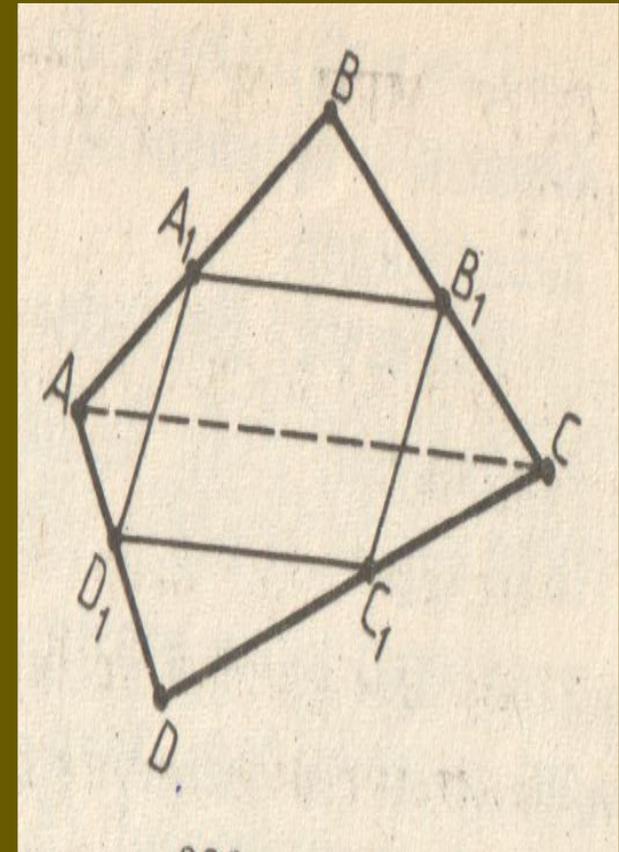
- **Теорема 16.2. Две прямые, параллельные третьей прямой, параллельны.**
- **Доказательство.** Пусть прямые  $b$  и  $c$  параллельны прямой  $a$ . Докажем, что прямые  $b$  и  $c$  параллельны. Случай, когда прямые  $a, b, c$  лежат в одной плоскости, был рассмотрен в планиметрии. Поэтому предположим, что наши прямые не лежат в одной плоскости. Пусть  $\alpha$  — плоскость, в которой лежат прямые  $a$  и  $b$ , а  $\gamma$  — плоскость, в которой лежат прямые  $a$  и  $c$ . Плоскости  $\alpha$  и  $\gamma$  различны. Отметим на прямой  $b$  какую-нибудь точку  $B$  и проведем плоскость  $\beta$  через прямую  $c$  и точку  $B$ . Она пересечет плоскость  $\alpha$  по прямой  $b_1$ . Прямая  $b_1$  не пересекает плоскость  $\gamma$ . Действительно, точка пересечения должна принадлежать прямой  $a$ , так как прямая  $b_1$  лежит в плоскости  $\alpha$  с другой стороны, она должна лежать и на прямой  $c$ , так как прямая  $b_1$  лежит в плоскости  $\beta$ . Но прямые  $a$  и  $c$  как параллельные не пересекаются. Так как прямая  $b_1$  лежит в плоскости  $\alpha$  и не пересекает прямую  $a$ , то она параллельна  $a$ , а значит, совпадает с  $b$  по аксиоме параллельных. Таким образом, прямая  $b$ , совпадая с прямой  $b_1$ , лежит в одной плоскости с прямой  $c$  (в плоскости  $\beta$ ) и не пересекает ее. Значит, прямые  $b$  и  $c$  параллельны. Теорема доказана.

## Признак параллельности прямых



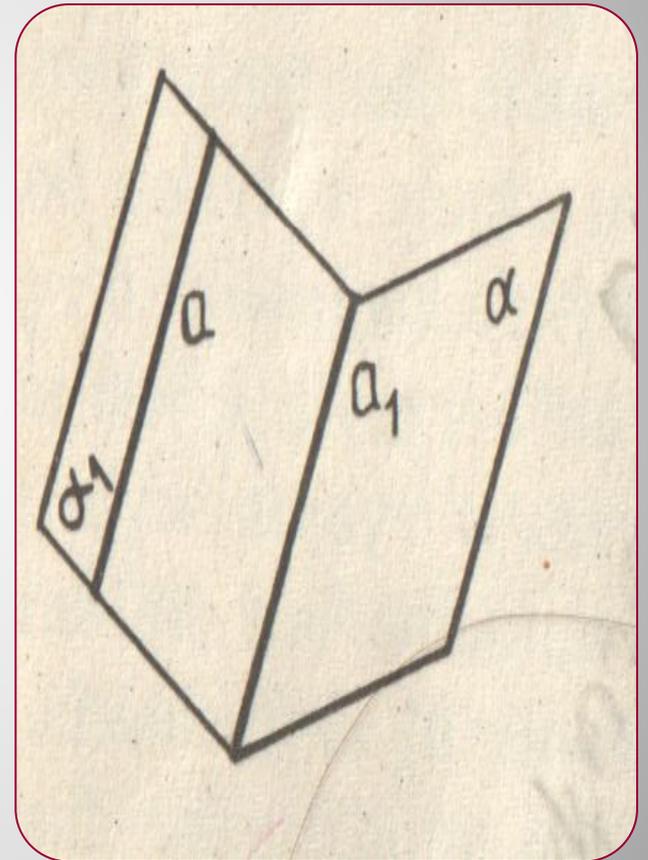
- **Задача (11). Докажите, что середины сторон пространственного четырехугольника являются вершинами параллелограмма (вершины пространственного четырехугольника не лежат в одной плоскости).**
- **Решение. Пусть  $ABCD$  — данный пространственный четырехугольник (рис. 326). Пусть  $A_1, B_1, C_1, D_1$  — середины его сторон. Тогда  $A_1B_1$  — средняя линия треугольника  $ABC$ , параллельная стороне  $AC$ ,  $C_1D_1$  — средняя линия треугольника  $ACD$ , тоже параллельная стороне  $AC$ . По теореме 16.2 прямые  $A_1B_1$  и  $C_1D_1$  параллельны, а значит, лежат в одной плоскости. Точно так же доказывается параллельность прямых  $A_1D_1$  и  $B_1C_1$ . Итак, четырехугольник  $A_1B_1C_1D_1$  лежит в одной плоскости и его противоположные стороны параллельны. Следовательно, он параллелограмм.**
- **138. Признак параллельности прямой плоскости**
- **Прямая и плоскость называются параллельными, если они не пересекаются**

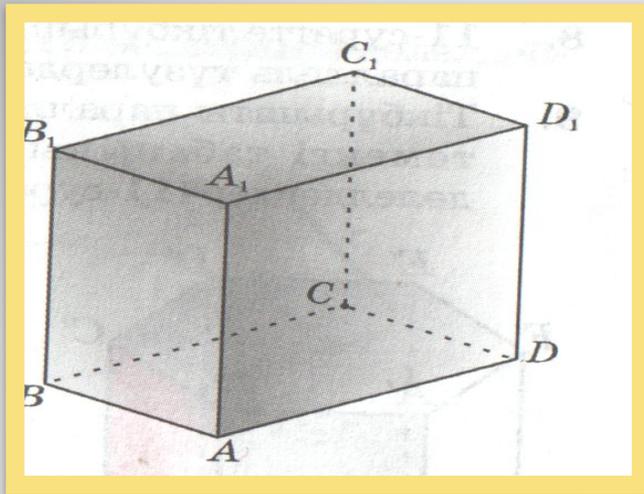
## Признак параллельности прямой и плоскости



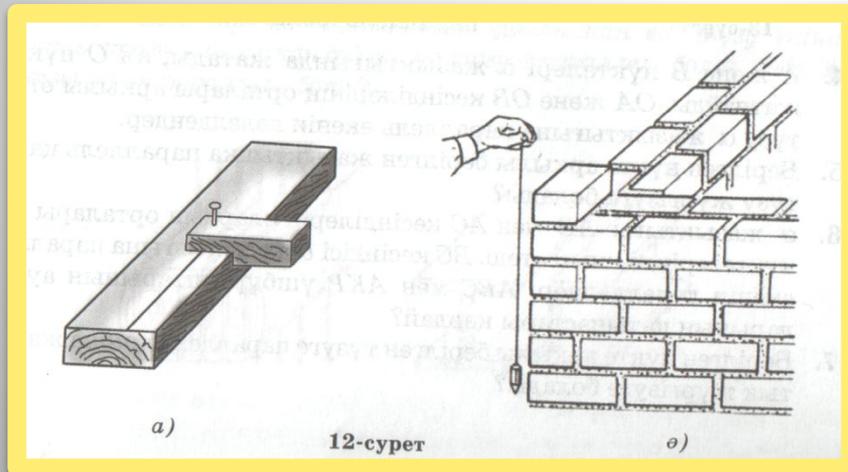
- **Теорема 16.3. Если прямая, не принадлежащая плоскости, параллельна какой-нибудь прямой в этой плоскости, то она параллельна и самой плоскости.**
- Доказательство. Пусть  $\alpha$  — плоскость,  $a$  — не лежащая в ней прямая и  $a_1$  — прямая в плоскости  $\alpha$ , параллельная прямой  $a$ . Проведем плоскость  $\alpha_1$  через прямые  $a$  и  $a_1$
- Плоскости  $\alpha$  и  $\alpha_1$  пересекаются по прямой  $a_1$ . Если бы прямая  $a$  пересекала плоскость  $\alpha$ , то точка пересечения принадлежала бы прямой  $a_1$ . Но это невозможно, так как прямые  $a$  и  $a_1$  параллельны.
- Итак, прямая  $a$  не пересекает плоскость  $\alpha$ , а значит, параллельна
- плоскости  $\alpha$ . Теорема доказана.

### Параллельность прямой и плоскости.





**Параллельность  
прямой и плоскости.**



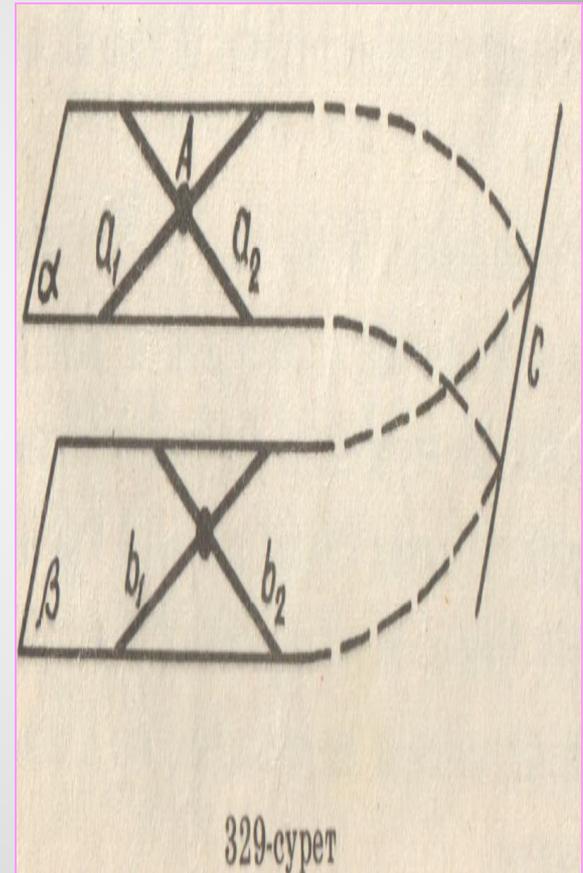
a)

12-сурет

б)

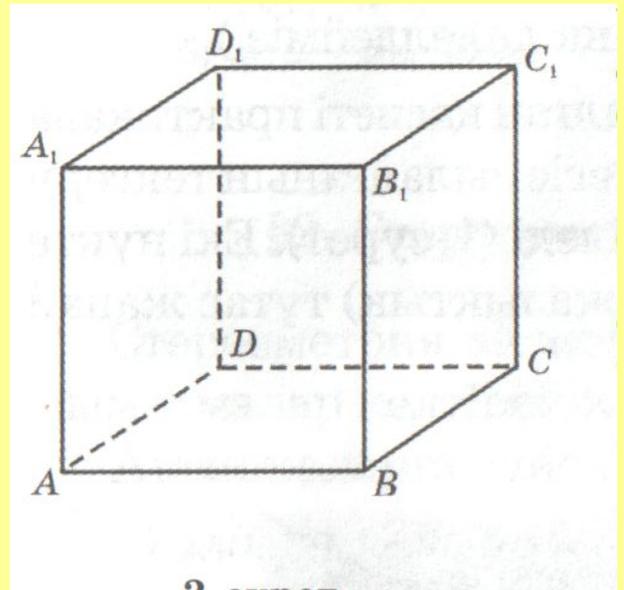
- **Две плоскости называются**
- **параллельными, если они не пересекаются.**
- **Теорема 16.4. Если две пересекающиеся прямые одной плоскости соответственно параллельны двум прямым другой плоскости, то эти плоскости параллельны.**
- **Доказательство.** Пусть  $\alpha$  и  $\beta$  данные плоскости,  $a_2$  и  $a_1$  — прямые в плоскости  $\alpha$ , пересекающиеся в точке  $A$ ,  $b_1$  и  $b_2$  — соответственно параллельные им прямые в плоскости  $\beta$ . Допустим, что плоскости  $\alpha$  и  $\beta$  не параллельны, т. е. пересекаются по некоторой прямой  $c$ . По теореме 16.3 прямые  $a_2$  и  $a_1$ , как параллельные прямым  $b_1$  и  $b_2$  » параллельны плоскости  $\beta$ , и поэтому они не пересекают лежащую в этой плоскости прямую  $c$ . Таким образом, в плоскости  $\alpha$  через точку  $A$  проходят две прямые ( $a_2$  и  $a_1$ ), параллельные прямой  $c$ . Но это невозможно по аксиоме параллельных. Мы пришли к противоречию. Теорема доказана.

## Признак параллельности плоскостей



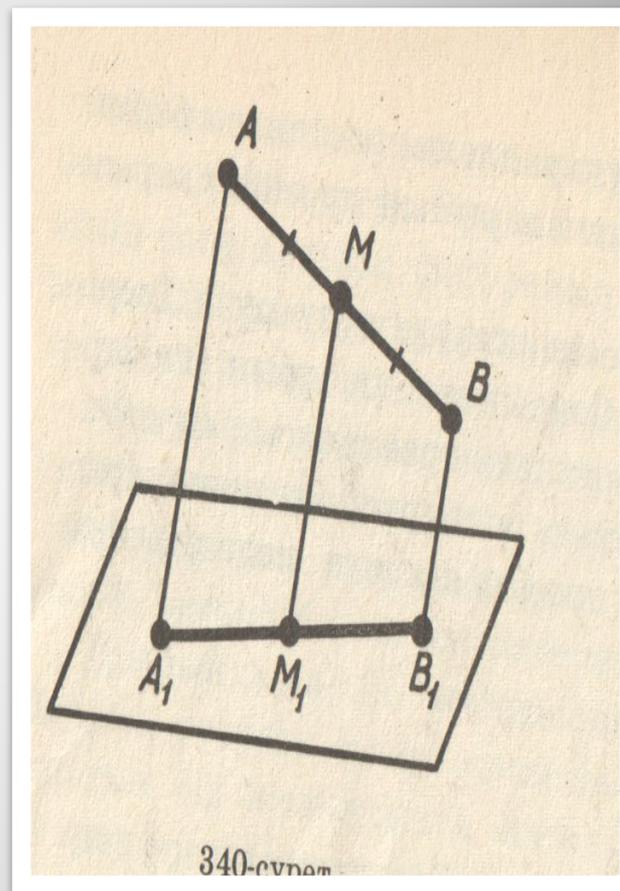
- №6
- Дано куб  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ .  
А) Укажите параллельные ребры куба. Сколько параллельных ребер с одним ребром ? Б) Укажите скрещивающиеся ребры. Сколько скрещивающихся ребер с одним ребром.

## Признак параллельности плоскостей



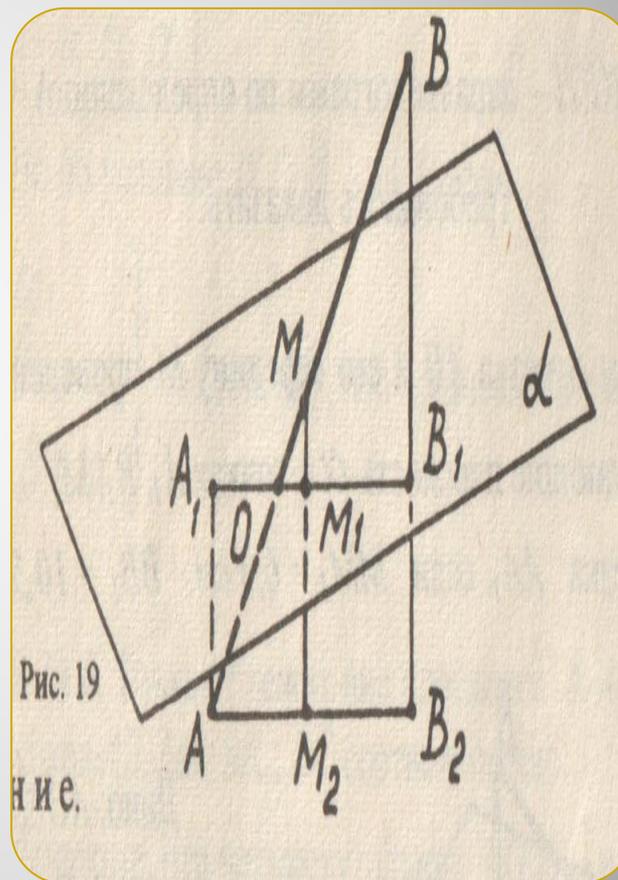
- №5. Через концы отрезка  $AB$  и его середину  $M$  проведены параллельные прямые, пересекающие плоскость  $\alpha$  в точках  $A_1, B_1, M_1$ . Найдите длину отрезка  $MM_1$  если :
  - 1)  $AA_1 = 3\text{м}$ ,  $BB_1 = 7\text{м}$ ,
  - 2)  $AA_1 = 3,6\text{дм}$ ,  $BB_1 = 4,8\text{дм}$ ,
  - 3)  $AA_1 = 8,3\text{м}$ ,  $BB_1 = 4,1\text{см}$ ,
  - 4)  $AA_1 = a$ ,  $BB_1 = b$ .

## Признак параллельности прямой и плоскости



- №6\*. Отрезок  $AB$  пересекает плоскость  $\alpha$ . Через концы отрезка в его середину  $M$  проведены параллельные прямые, пересекающие плоскость  $\alpha$  в точках  $A_1, B_1, M_1$ . Найдите длину отрезка  $MM_1$ , если  $AA_1 = 5,7$  см,  $BB_1 = 8,5$  см.
- Жауабы. 7,1 см

## Признак параллельности прямой и плоскости



- №7. Через конец  $A$  отрезка проведена плоскость. Через конец  $B$  и точку  $C$  этого отрезка проведены параллельные прямые, пересекающие плоскость в точках  $B_1$  и  $C_1$ . Найдите длину отрезка  $BB_1$ :
- 1)  $CC_1 = 15\text{ м}$ ,  $AC:BC = 2:3$ ; 2)  $CC_1 = 8,1\text{ см}$ ,  $AB:AC = 11:9$ ; 3)  $AB = 6\text{ см}$ ,  $AC:CC_1 = 2:5$ ;
- 4)  $AC = a$ ,  $BC = b$ ,  $CC_1 = c$ .

## Признак параллельности прямой и плоскости.

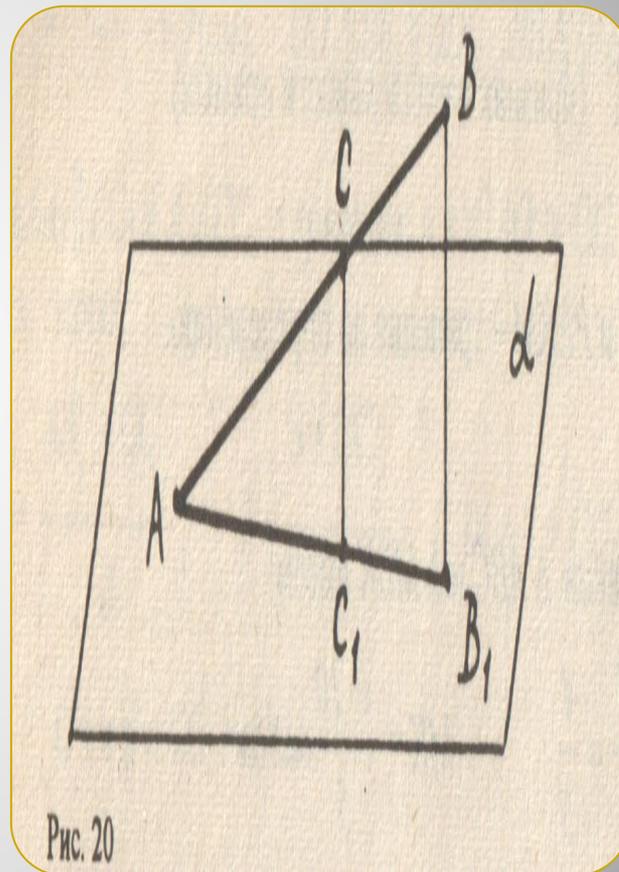
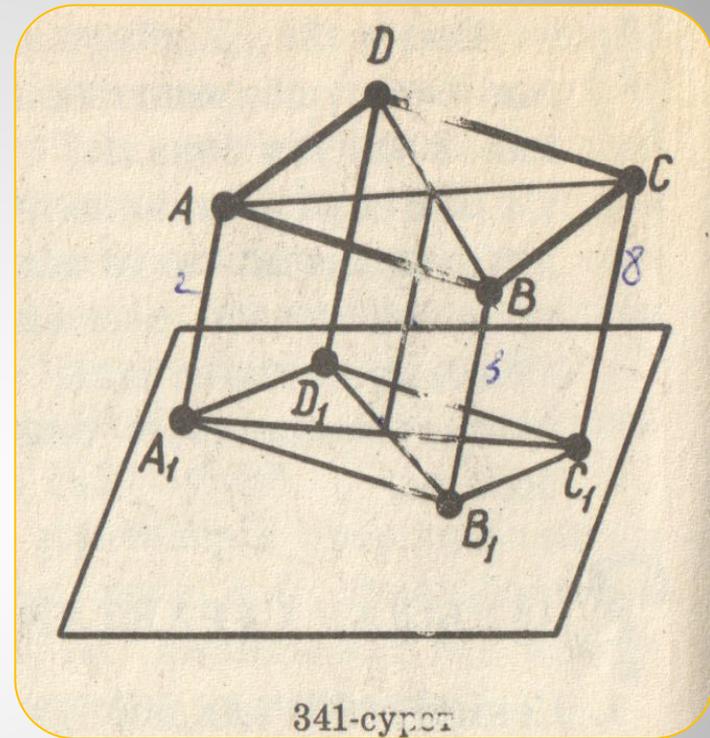


Рис. 20

Рис. 20

- №8\*. Даны ABCD параллелограмм и не пересекающая его плоскость. Через вершины параллелограмма проведены параллельные прямые, пересекающие данную плоскость в точках  $A_1, B_1, C_1, D_1$ . Найдите длину отрезка  $DD_1$ , если:
  - $AA_1 = 2\text{м}$   $BB_1 = 3\text{м}$ ,  $CC_1 = 8\text{м}$
  - $AA_1 = 4\text{м}$   $BB_1 = 3\text{м}$ ,  $CC_1 = 1\text{м}$
  - $AA_1 = a$ ,  $BB_1 = b$ ,  $CC_1 = c$



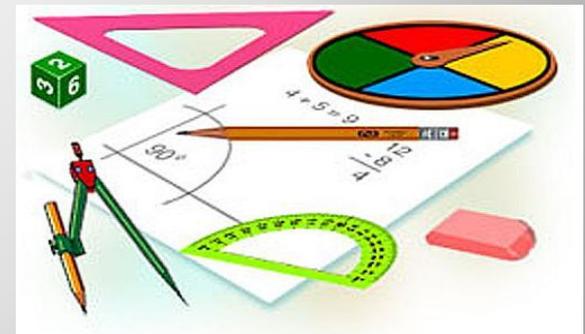
341-сурет  
341-сурет

## ПРИЗНАК ПАРАЛЛЕЛЬНОСТИ ПРЯМОЙ И ПЛОСКОСТИ.



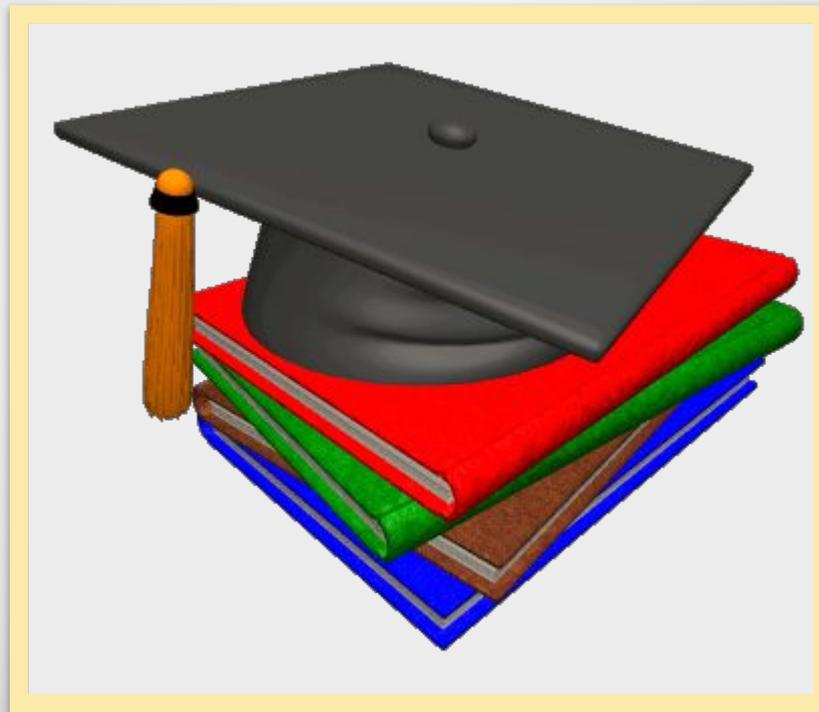
## Домашнее задание

- П. 136, 137, 138, 139;
- №7 Основание пирамиды  $SABCD$  – квадрат. Точки  $K, M, N, P, R$  – середины сторон  $AS, DS, AD, SB, AB$ . а)  $KM \parallel BC$ ; б)  $PR \parallel MN$ .
- Приведите примеры на параллельные прямые в пространстве.



# Библиография

- ❖ А.В. Погорелов  
«Геометрия, 7-11», М., Алматы: Рауан, 1997





***СПАСИБО ЗА ВНИМАНИЕ!***

