Муниципальный этап всероссийской олимпиады школьников по математике *2013-2014 учебный год*

Некоторые выборочные задания с решениями

5 класс

2. **Произведение четырех последовательных натуральных чисел равно 7920. Найти эти числа.**

Ответ: 8, 9, 10, 11

Ответ школьник может и не обосновывать.

Найти ответ можно, например, так:

число 7920 не делится на 7.

Поэтому, все сомножители больше 7.

А произведение 9x10x11x12 слишком велико.

Критерии: 7 баллов - есть ответ.

0 баллов – ответа нет, или он ошибочный.

6 класс

1. **Найти все такие двузначные числа (с ненулевыми цифрами), каждое из которых при перестановке его цифр становится меньше исходного не менее чем в три раза.**

Ответ: 51, 61, 71, 81, 91, 92.

Если последняя цифра единица, то подходят только 51,61,71,81,91.

Если последняя цифра 2 , то подходит только 92.

Для других последних цифр таких чисел нет.

Критерии: 1 балл за правильный ответ без обоснования.

Внимание! Возможное правильное решение – полный перебор всех (!) двузначных чисел, оценка за полный перебор–7 баллов.

6 класс

3. Можно ли составить из цифр 1,2,3,…,8,9 такое девятизначное число, что между цифрами 1 и 2 стоит нечетное количество цифр, между цифрами 2 и 3 - также нечетное количество цифр, …, между цифрами 8 и 9 - также нечетное количество цифр?

6 класс (продолжение)

Ответ: Нет, нельзя.

Отметим все цифры, стоящие на нечетных местах (их пять), и все цифры, стоящие на четных местах (их четыре). Если бы указанное число в условии было бы возможно, то все девять цифр оказались бы на местах одной четности, что невозможно.

Критерии: За правильный ответ без обоснования баллов не даётся.

7 класс

5. **Натуральные числа x, y, z таковы, что $28x+30y+31z=365$. Какие значения может принимать сумма $x+y+z$?**

Ответ: 12

Значение 12 получается при $x=1$, $y=4$, $z=7$

(смотри календарь на год).

Если $x+y+z \leq 11$, тогда $28x+30y+31z \leq 31 \times 11 = 341$.

Если $x+y+z \geq 13$, тогда $28x+30y+31z \geq 28 \times 11+30+31 = 369$.

Критерии: За правильный ответ без обоснования - 1 балл.

8 класс

1. **В вершинах и центре правильного восьмиугольника расставляют цифры от 1 до 9 (каждую по одному разу) так, чтобы суммы чисел вдоль всех больших диагоналей были одинаковы. Какие значения может принимать число в центре?**

Ответ: 1, 5, 9

Понятно, что больших диагоналей 4. поэтому сумма цифр на их концах должна делиться на 4. Вся сумма девяти цифр – 45. Значит, вычитать (ставить в центр) надо только числа, дающие остаток 1 при делении на 4. Необходимо привести способ расстановки восьми из цифр в каждом из трех вариантов.

Критерии: За правильный ответ без обоснования - 1 балл.

За неполный ответ с обоснованием (неполным) - 1 балл.

9 класс

2. **Каких шестизначных чисел больше: представимых в виде произведения двух трехзначных или остальных?**

Ответ: остальных больше.

Решение. Заметим, что всего существует 900000 шестизначных чисел и 900 трехзначных чисел. Подсчитаем общее количество чисел, представимых в виде произведения двух трехзначных чисел. Имеется не более $\frac{900 \cdot 899}{2}$ чисел, представимых в виде произведения двух различных трехзначных чисел, и еще 900, представимых в виде произведения двух одинаковых трехзначных чисел. Итого, получаем не более 405450 таких чисел. Шестизначных таких чисел будет еще меньше, т.е. меньше половины от всех шестизначных чисел.

Комментарий. Угаданный ответ без обоснования: 0 баллов.

10 класс

1. Карлсон задумал трехзначное число и выписал его на длинной стене 2013 раз подряд без пробелов, получив многозначное число. Могло ли оно делиться на 2013?

Ответ: Да, могло.

Решение. Заметим, что $2013=3\cdot671$. Если выписать 2013 раз подряд число 671, то полученное 6039-значное число будет делиться на 671. Кроме этого, сумма цифр этого 6039-значного числа равна $(6+7+1)\cdot2013=14\cdot3\cdot671$ — делится на 3. Значит, по признаку делимости на 3, выписанное число делится и на 3. Поскольку 3 и 671 — взаимно простые, то оно делится и на их произведение.

Комментарий. Угаданный ответ без обоснования: 0 баллов.

10 класс

2. Сколько раз в сутки часовая и минутная стрелка часов взаимно перпендикулярны?

Ответ: 44.

Решение. В сутки часовая стрелка делает 2 оборота, а минутная 24. Отсюда минутная стрелка обгоняет часовую 22 раза и каждый раз с часовой стрелкой образуется по два прямых угла, т.е. ответ: 44.

Комментарий. Угаданный ответ без обоснования: 1балл.

11 класс

4.Докажите, что для всех действительных чисел *x* и *y* выполнено неравенство.

$$x^2 + xy + y^2 \geq 6(x + y - 2)$$

Решение1. Пусть $x \geq y$ Умножим на (x-y):

$$x^3 - y^3 \geq 6(x^2 - y^2) - 12(x - y)$$

$$f(x) = x^3 - 6x^2 + 12x \geq y^3 - 6y^2 + 12y = f(y)$$

$$f(x) = x^3 - 6x^2 + 12x = (x - 2)^3 + 8$$

Функция *f* монотонна, поэтому $f(x) \geq f(y)$

11 класс (продолжение)

Решение2. Сделаем замену: $x = t + w$

$y = t - w$

$$(t+w)^2 + t^2 - w^2 + (t-w)^2 \geq 6(2t-2)$$

Спасибо за внимание!