

**Муниципальный этап всероссийской  
олимпиады школьников по математике  
*2013-2014 учебный год***

Некоторые  
выборочные задания с  
решениями



## 5 класс

**2. Произведение четырех последовательных натуральных чисел равно 7920. Найти эти числа.**

**Ответ: 8, 9, 10, 11**

Ответ школьник может и не обосновывать.

Найти ответ можно, например, так:  
число 7920 не делится на 7.

Поэтому, все сомножители больше 7.

А произведение  $9 \times 10 \times 11 \times 12$  слишком велико.

**Критерии:** 7 баллов - есть ответ.

0 баллов – ответа нет, или он ошибочный.

## 6 класс

1. Найти все такие двузначные числа ( с ненулевыми цифрами), каждое из которых при перестановке его цифр становится меньше исходного не менее чем в три раза.

**Ответ: 51, 61, 71, 81, 91, 92.**

Если последняя цифра единица, то подходят только 51,61,71,81,91.

Если последняя цифра 2 , то подходит только 92.

Для других последних цифр таких чисел нет.

**Критерии:** 1 балл за правильный ответ без обоснования.

**Внимание!** Возможное правильное решение – полный перебор всех (!) двузначных чисел, оценка за полный перебор–7 баллов.

## 6 класс

**3. Можно ли составить из цифр 1,2,3,...,8,9 такое девятизначное число, что между цифрами 1 и 2 стоит нечетное количество цифр, между цифрами 2 и 3 - также нечетное количество цифр, ..., между цифрами 8 и 9 - также нечетное количество цифр?**

## 6 класс (продолжение)

**Ответ:** Нет, нельзя.

Отметим все цифры, стоящие на нечетных местах (их пять), и все цифры, стоящие на четных местах (их четыре). Если бы указанное число в условии было бы возможно, то все девять цифр оказались бы на местах одной четности, что невозможно.

**Критерии:** За правильный ответ без обоснования баллов не даётся.

## 7 класс

5. **Натуральные числа  $x, y, z$  таковы, что  $28x+30y+31z=365$ .  
Какие значения может принимать сумма  $x+ y+ z$  ?**

**Ответ: 12**

Значение 12 получается при  $x=1, y=4, z=7$

(смотри календарь на год).

Если  $x+ y+ z \leq 11$ , тогда  $28x+30y+31z \leq 31 \times 11 = 341$ .

Если  $x+ y+ z \geq 13$ , тогда  $28x+30y+31z \geq 28 \times 11 + 30 + 31 = 369$ .

**Критерии:** За правильный ответ без обоснования - 1 балл.

## 8 класс

1. В вершинах и центре правильного восьмиугольника расставляют цифры от 1 до 9 (каждую по одному разу) так, чтобы суммы чисел вдоль всех больших диагоналей были одинаковы. Какие значения может принимать число в центре?

**Ответ: 1, 5, 9**

Понятно, что больших диагоналей 4. поэтому сумма цифр на их концах должна делиться на 4. Вся сумма девяти цифр – 45. Значит, вычитать (ставить в центр) надо только числа, дающие остаток 1 при делении на 4. Необходимо привести способ расстановки восьми из цифр в каждом из трех вариантов.

**Критерии:** За правильный ответ без обоснования - 1 балл.  
За неполный ответ с обоснованием (неполным) - 1 балл.

## 9 класс

**2. Каких шестизначных чисел больше: представимых в виде произведения двух трехзначных или остальных?**

**Ответ:** остальных больше.

**Решение.** Заметим, что всего существует 900000 шестизначных чисел и 900 трехзначных чисел. Подсчитаем общее количество чисел, представимых в виде произведения двух трехзначных чисел. Имеется не более  $\frac{900 \cdot 899}{2}$  чисел, представимых в виде произведения двух различных трехзначных чисел, и еще 900, представимых в виде произведения двух одинаковых трехзначных чисел. Итого, получаем не более 405450 таких чисел. Шестизначных таких чисел будет еще меньше, т.е. меньше половины от всех шестизначных чисел.

**Комментарий.** Угаданный ответ без обоснования: 0 баллов.

# 10 класс

**1. Карлсон задумал трехзначное число и выписал его на длинной стене 2013 раз подряд без пробелов, получив многозначное число. Могло ли оно делиться на 2013?**

**Ответ:** Да, могло.

**Решение.** Заметим, что  $2013=3 \cdot 671$ . Если выписать 2013 раз подряд число 671, то полученное 6039-значное число будет делиться на 671. Кроме этого, сумма цифр этого 6039-значного числа равна  $(6+7+1) \cdot 2013=14 \cdot 3 \cdot 671$  — делится на 3. Значит, по признаку делимости на 3, выписанное число делится и на 3. Поскольку 3 и 671 — взаимно простые, то оно делится и на их произведение.

**Комментарий.** Угаданный ответ без обоснования: 0 баллов.

## 10 класс

**2. Сколько раз в сутки часовая и минутная стрелка часов взаимно перпендикулярны?**

**Ответ:** 44.

**Решение.** В сутки часовая стрелка делает 2 оборота, а минутная 24. Отсюда минутная стрелка обгоняет часовую 22 раза и каждый раз с часовой стрелкой образуется по два прямых угла, т.е. ответ: 44.

**Комментарий.** Угаданный ответ без обоснования:  
1балл.

# 11 класс

4. Докажите, что для всех действительных чисел  $x$  и  $y$  выполнено неравенство.

$$x^2 + xy + y^2 \geq 6(x + y - 2)$$

**Решение1.** Пусть  $x \geq y$ . Умножим на  $(x-y)$ :

$$x^3 - y^3 \geq 6(x^2 - y^2) - 12(x - y)$$

$$f(x) = x^3 - 6x^2 + 12x \geq y^3 - 6y^2 + 12y = f(y)$$

$$f(x) = x^3 - 6x^2 + 12x = (x - 2)^3 + 8$$

Функция  $f$  монотонна, поэтому  $f(x) \geq f(y)$

## 11 класс (продолжение)

**Решение2.** Сделаем замену:  $x = t + w$   
 $y = t - w$

$$(t + w)^2 + t^2 - w^2 + (t - w)^2 \geq 6(2t - 2)$$

*Спасибо за внимание!*

