Булевы функции

Дисциплина Дискретная математика

Специальность 09.02.01 Компьютерные системы и комплексы

Алексеева Юлия Владимировна

Преподаватель информатики

Политехнический колледж

Новгородского Государственного Университета

имени Ярослава Мудрого

История булевых функция

Булевы функции получили своё название по имени английского математика Дж. Буля (02.11.1815–08.12.1864). С давних времён эти функции играют важную роль в вопросах оснований математики и математической логике. С середины 20-го века булевы функции широко используются в различных теоретических и прикладных задачах дискретной математики и математической кибернетики.

Основные понятия

- Переменные, которые могут принимать значения только 0 или 1 называются **<u>логическими или булевыми переменными</u>** Сами значения 0 и 1 называются **<u>булевыми константами</u>**.

Функции аргументами которой являются булевы переменные называется **<u>булевыми функциями</u>**.

Множества всех булевых функции **n** переменных обозначается $\boldsymbol{P_n}$

Количество всех булевых функции **n** переменных находится по формул

$$|P_n| = 2^{2^n}$$

Например, булевых функции 1 переменной $|P_1| = 2^{2^1} = 4$

Основные понятия

Таблицы, в которых каждой интерпретации поставлено в соответствие ее значение, называются <u>**таблицами истинности булевой функции**</u>

В таблице истинности каждой переменной и значению самой функции соответствует по одному столбцу, а каждой интерпретации - по одной строке.
количество строк в таблице соответствует количеству различных интерпретаций функции.

Таблица 2

Таблицы истинности для логических функций одной переменной

Обозначение функции	x		Название функции
	0	1	
$f_0 = 0$	0	0	Константа «0»
$f_1 = x$	0	1	Переменная x
$f_2 = \bar{\tilde{o}}$	1	0	Инверсия x
$f_3 = 1$	1	1	Константа «1»

Элементарные функции

К элементарным функциям обычно относят: **функцию инверсии (отрицания), конъюнкцию, дизъюнкцию, импликацию, штрих Шеффера и стрелку Пирса**.

Новые функции можно получить из известных функций либо путем перенумерации аргументов, либо путем подстановки в функцию новых функций вместо аргументов.

Функция, полученная с помощью этих правил, называется **<u>суперпозицией функций</u>**.

Функции 2-ух переменных

Функция в аналити-ческом выражении	Наименование	Словестное выражение	Выражение в элементарном базисе
$f_0=0$	Константа “0”	Всегда ложно	$x_1x_1 \vee x_2x_2$
$f_1=x_1x_2$ $f_1=x_1\&x_2$	Коньюнкция, И	x_1 и x_2	$x_1\&x_2$
$f_2=x_1\leftarrow x_2$	Запрет x_1	Запрет по x_2	x_1x_2
$f_3=x_1$	Повторение x_1	Повторение x_1	x_1
$f_4=x_2\leftarrow x_1$	Запрет x_2	Запрет по x_1	x_1x_2
$f_5=x_2$	Повторение x_2	Повторение x_2	x_2
$f_6=x_1\oplus x_2$	Сложение по модулю 2, неравнозначность, исключающее ИЛИ	x_1 неравнозначно x_2	$x_1x_2 \vee x_1x_2$
$f_7=x_1 \vee x_2$ $f_7=x_1+x_2$	Дизъюнкция, ИЛИ	x_1 или x_2	$x_1 \vee x_2$
$f_8=x_1\downarrow x_2$	Стрелка Пирса[1], ИЛИ-НЕ	не x_1 и не x_2	x1 v x2
$f_9=x_1\equiv x_2$	Равнозначность, эквивалентность	x_1 равнозначно x_2	$x_1x_2 \vee x_1x_2$
$f_{10}=x_2$	Инверсия, отрицание x_2	Не x_2	x_2
$f_{11}=x_2\rightarrow x_1$	Импликация x_1	Если x_2, то x_1	$x_1 \vee x_2$
$f_{12}=x_1$	Инверсия, отрицание x_1	Не x_1	x_1
$f_{13}=x_1\rightarrow x_2$	Импликация x_2	Если x_1, то x_2	$x_1 \vee x_2$
$f_{14}=x_1\mid x_2$	Штрих Шеффера[2], И-НЕ	Не x_1 или не x_2	x1 x2
$f_{15}=1$	Константа “1”	Всегда истинно	$(x_1 \vee x_1)(x_2 \vee x_2)$

Формулы

Так же, как составные высказывания строятся из более простых, с помощью логических операций, можно комбинировать булевы переменные с помощью булевых операций, получая булевы выражения, которые называются формулами.

Всякой формуле однозначно соответствует некоторая функция, при этом говорят, что формула реализует функцию.

Приоритет операций

Если в формуле отсутствуют скобки, то операции выполняются в следующей последовательности:

1. Отрицание
2. Конъюнкция
3. Дизъюнкция
4. Импликация
5. Эквивалентность.

Основные определения

Формулы называются **равносильными**, если реализуют одну и ту же функцию.

Формула называется **тождественно истинной или тавтологией**, если она реализует тождественную единицу при любых значениях булевых переменных.

Формула называется **тождественно ложной**, если она реализует тождественный ноль при любых значениях булевых переменных.

Аксиомы булевы алгебры

Аксиомы конъюнкции

$$0 \wedge 0 = 0; \quad 0 \wedge 1 = 0; \quad 1 \wedge 0 = 0; \quad 1 \wedge 1 = 1$$

Аксиомы дизъюнкции

$$0 \vee 0 = 0; \quad 0 \vee 1 = 1; \quad 1 \vee 0 = 1; \quad 1 \vee 1 = 1$$

Законы булевой алгебры

Поглощение

$A + (A*B) = A$ $A*(A + B) = A$

Аннулирование

$A + 1 = 1$ $A*0 = 0$

Ассоциативность

$(A+B)+C=A+(B+C)$ $(A*B)*C=A*(B*C)$

Коммутативность (перестановка)

$A + B = B + A$ $A*B=B*A$

Двойное отрицание

$\neg\neg A=A$

Законы булевой функции

Дополнение

$A + \neg A = 1$ $\quad$ $A*\neg A = 0$

Правило Де Моргана

$\neg(A + B) = \neg A*\neg B$ $\quad$ $\neg(A*B) = \neg A + \neg B$

Тождественность

$A + 0 = A$ $\quad$ $A*1=A$

Тавтология

$A*A = A$ $\quad$ $A + A = A$

Контрольные вопросы

1. Приведи примеры логических функций одной переменной.
2. Приведи примеры логических функций двух переменных.
3. Сколько может быть полностью определенных n переменных?
4. Что такое булевы переменные?
5. Приведи примеры логических операций, используемые при формировании двух переменных.
6. Приведите структуру таблицы истинности.

Задания для самостоятельной работы

1. Упростите формулу:

(x*y+1)*(0+x);

(x+y’)*(z’+y’);

(x+y+z)’->((x+y)(x+z));

2. Докажите:

0’=1;

x | y = (x · y)’

x ↓ y = (x+y)’