


Элементы высшей математики

Метод Гаусса для решения СЛАУ

преподаватель Слюсаренко К.В.





Математику нельзя изучать, наблюдая, как это делает сосед! (Айвен Нивен)

Метод решения хорош, если с самого начала мы можем предвидеть - и далее подтвердить это, - что, следуя этому методу, мы достигнем цели. (Г. Лейбниц)

Математика представляет искуснейшие изобретения, способные удовлетворить любознательность, облегчить ремёсла и уменьшить труд людей. (Р. Декарт)



Решить систему уравнений
доступными методами:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 = 3; \\ x_1 + 4x_2 + 5x_3 + 2x_4 = 2; \\ 2x_1 + 9x_2 + 8x_3 + 3x_4 = 7; \\ 3x_1 + 7x_2 + 7x_3 + 2x_4 = 12; \\ 5x_1 + 7x_2 + 9x_3 + 2x_4 = 20. \end{cases}$$

?

Метод Гаусса для решения СЛАУ.



Иога́нн Карл Фри́дрих Га́усс (30 апреля 1777 — 23 февраля 1855) - немецкий математик, механик, физик, астроном и геодезист.

Считается одним из величайших математиков всех времён, «королём математиков»

В возрасте 62 лет Гаусс начал изучать русский язык, чтобы ознакомиться с трудами Лобачевского, вполне преуспел в этом деле.

Гаусс любил говорить, что математика — царица наук.

Хотя в настоящее время данный метод повсеместно называется методом Гаусса, он был известен и до К. Ф. Гаусса. Первое известное описание данного метода — в китайском трактате «Математика в девяти книгах» (классическое сочинение, энциклопедия знаний древнекитайских математиков, написанное во II-веках до н.э.)

Метод Гаусса основан на элементарных преобразованиях матриц, а именно:

- перемена местами строк;
- умножение всех элементов строки на любое, отличное от 0, число;
- прибавление ко всем элементам одной строки соответствующих элементов другой, умноженные на одно и то же число;
- исключение из системы нулевых строк.

СЛАУ в общем случае имеет вид:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m. \end{cases}$$

(1)

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_m \end{pmatrix}$$

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}$$

$Ax = B$ – матричная запись СЛАУ (1)

С каждой системой (1) свяжем расширенную матрицу \tilde{A} :

$$\tilde{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} a_{11} & a_{12} \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} \dots & a_{2n} & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} \dots & a_{mn} & b_m \end{array} \right)$$

Две расширенные матрицы называются эквивалентными, если соответствующие им СЛАУ равносильны, т.е. имеют одни и те же решения. Эквивалентные матрицы обозначают \sim .

Идея метода Гаусса.

Над матрицей \tilde{A} произвести элементарные преобразования, приводящую A к треугольному виду (прямой ход), а затем к единичной матрице (обратный ход). В новой расширенной матрице на месте столбцов свободных членов оказывается решение исходной системы.

Разрешимость системы.

Возможны 3 варианта при переходе матрицы A к треугольной:

1. В новой матрице не возникло ни одной нулевой строки (столбца). Матрица A имеет треугольную форму. В этом случае система имеет единственное решение.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \dots \\ a_{mn}x_n = b_n. \end{cases}$$

(элементы главной диагонали не равны 0)

2. В новой матрице возникла строка вида $0x_1 + 0x_2 + \dots + 0x_n = C$, где $C \neq 0$. В этом случае система несовместна, т.е. решений нет.

3. В новой матрице возникает хотя бы одна нулевая строка (столбец). Матрица A имеет форму трапеции. В этом случае система имеет бесконечное множество решений.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1r}x_r + a_{1(r+1)}x_{r+1} + \dots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{22}x_2 + \dots + a_{2r}x_r + a_{2(r+1)}x_{r+1} + \dots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \dots \\ a_{rr}x_r + a_{r(r+1)}x_{r+1} + \dots + a_{rn}x_n = b_r. \end{cases}$$

(элементы главной диагонали не равны 0)

Переменные x_1, x_2, \dots, x_r - базисные переменные, $x_{r+1}, x_{r+2}, \dots, x_n$ - свободные переменные.

Параметрическое решение – выражение базисных переменных через свободные.


Мини-тест по теме «Метод Гаусса».

1. Из каких этапов состоит алгоритм решения СЛАУ методом Гаусса:

- Прямой и обратный ход
- Прямой и кривой ход
- Гладкий и кривой ход
- Главный и обратный ход

2. Можно ли решать методом Гаусса системы уравнений, где число уравнений не совпадает с числом неизвестных?

- Да
- Нет



3. Каким методом удобнее всего пользоваться для решения систем из 5 уравнений с 5 неизвестными?

- Матричный метод
- Метод Крамера
- Метод Гаусса

4. Если в результате прямого хода метода Гаусса был получен вид трапеции, то исходная СЛАУ :

- Не имеет решений
- Имеет бесконечное множество решений
- Имеет одно решение

МОЛОДЦЫ!