Элементы высшей математики

**Метод Гаусса для решения СЛАУ**

преподаватель Слюсаренко К.В.

***Математику нельзя изучать, наблюдая, как это делает сосед!*** (Айвен Нивен)

***Метод решения хорош, если с самого начала мы можем предвидеть - и далее подтвердить это, - что, следуя этому методу, мы достигнем цели.*** (Г. Лейбниц)

***Математика представляет искуснейшие изобретения, способные удовлетворить любознательность, облегчить ремёсла и уменьшить труд людей.*** (Р. Декарт)

# Решить систему уравнений доступными методами:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 = 3; \\ x_1 + 4x_2 + 5x_3 + 2x_4 = 2; \\ 2x_1 + 9x_2 + 8x_3 + 3x_4 = 7; \\ 3x_1 + 7x_2 + 7x_3 + 2x_4 = 12; \\ 5x_1 + 7x_2 + 9x_3 + 2x_4 = 20. \end{cases}$$

?

# Метод Гаусса для решения СЛАУ.

**Иога́нн Карл Фри́дрих Га́усс** (30 апреля 1777 — 23 февраля 1855) -
немецкий математик, механик, физик, астроном и геодезист.
Считается одним из величайших математиков всех времён, «королём математиков»
В возрасте 62 лет Гаусс начал изучать русский язык, чтобы ознакомиться с трудами Лобачевского, вполне преуспел в этом деле.
Гаусс любил говорить, что математика — царица наук.
Хотя в настоящее время данный метод повсеместно называется методом Гаусса, он был известен и до К. Ф. Гаусса. Первое известное описание данного метода — в китайском трактате «Математика в девяти книгах» (классическое сочинение, энциклопедия знаний древнекитайских математиков, написанное во II-I веках до н.э. )

Метод Гаусса основан на элементарных преобразованиях матриц, а именно:

- перемена местами строк;
- умножение всех элементов строки на любое, отличное от 0, число;
- прибавление ко всем элементам одной строки соответствующих элементов другой, умноженные на одно и то же число;
- исключение из системы нулевых строк.

СЛАУ в общем случае имеет вид:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m. \end{cases} \quad (1)$$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_m \end{pmatrix} \qquad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}$$

$AX = B$ – матричная запись СЛАУ (1)

С каждой системой (1) свяжем **расширенную матрицу $\tilde{A}$:**

$$\tilde{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} a_{11} & a_{12} \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} \dots & a_{2n} & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} \dots & a_{mn} & b_m \end{array}\right)$$

Две расширенные матрицы называются эквивалентными, если соответствующие им СЛАУ равносильны, т.е. имеют одни и те же решения. Эквивалентные матрицы обозначают ~.

**<u>Идея метода Гаусса.</u>**
**Над матрицей $\tilde{A}$ произвести элементарные преобразования, приводящую А к треугольному виду (<u>прямой ход</u>), а затем к единичной матрице (<u>обратный ход</u>). В новой расширенной матрице на месте столбцов свободных членов оказывается решение исходной системы.**

# Разрешимость системы.

Возможны 3 варианта при переходе матрицы А к треугольной:

1. В новой матрице не возникло ни одной нулевой строки (столбца). Матрица А имеет треугольную форму.
   В этом случае система имеет единственное решение.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\ \qquad\qquad a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \qquad\qquad\qquad \ldots \\ \qquad\qquad\qquad\qquad a_{mn}x_n = b_n. \end{cases}$$

(элементы главной диагонали не равны 0)

2. В новой матрице возникла строка вида
   $0x_1 + 0x_2 + \cdots + 0x_n$=С, где С≠0.
   В этом случае система несовместна, т.е. решений нет.

3. В новой матрице возникает хотя бы одна нулевая строка (столбец). Матрица A имеет форму трапеции.
В этом случае система имеет <u>бесконечное множество решений.</u>

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1r}x_r + a_{1(r+1)}x_{r+1} + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{22}x_2 + \cdots + a_{2r}x_r + a_{2(r+1)}x_{r+1} + \cdots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \cdots \\ a_{rr}x_r + a_{r(r+1)}x_{r+1} + \cdots + a_{rn}x_n = b_r. \end{cases}$$

(элементы главной диагонали не равны 0)

Переменные $x_1, x_2, \ldots, x_r$ - базисные переменные, $x_{r+1}, x_{r+2}, \ldots, x_n$ - свободные переменные.

Параметрическое решение – выражение базисных переменных через свободные.

# <u>Мини-тест по теме «Метод Гаусса».</u>

1. Из каких этапов состоит алгоритм решения СЛАУ методом Гаусса:
- Прямой и обратный ход
- Прямой и кривой ход
- Гладкий и кривой ход
- Главный и обратный ход

2. Можно ли решать методом Гаусса системы уравнений, где число уравнений не совпадает с числом неизвестных?
- Да
- Нет

3. Каким методом удобнее всего пользоваться для решения систем из 5 уравнений с 5 неизвестными?

- Матричный метод
- Метод Крамера
- Метод Гаусса

4. Если в результате прямого хода метода Гаусса был получен вид трапеции, то исходная СЛАУ :

- Не имеет решений
- Имеет бесконечное множество решений
- Имеет одно решение

МОЛОДЦЫ!