Матрица

Общие сведения

Матрица — математический объект, записываемый в виде прямоугольной таблицы элементов кольца или поля (например, целых, действительных или комплексных чисел), которая представляет собой совокупность строк и столбцов, на пересечении которых находятся её элементы. Количество строк и столбцов матрицы задает размер матрицы. Хотя исторически рассматривались, например, треугольные матрицы, в настоящее время говорят исключительно о матрицах прямоугольной формы, так как они являются наиболее удобными и общими.

Матрицы широко применяются в математике для компактной записи систем линейных алгебраических или дифференциальных уравнений. В этом случае количество строк матрицы соответствует числу уравнений, а количество столбцов — количеству неизвестных. В результате решение систем линейных уравнений сводится к операциям над матрицами.

Для матрицы определены следующие алгебраические операции:

- сложение матриц, имеющих один и тот же размер;
- умножение матриц подходящего размера (матрицу, имеющую n столбцов, можно умножить справа на матрицу, имеющую n строк);
- в том числе умножение на матрицу вектора (по обычному правилу матричного умножения; вектор является в этом смысле частным случаем матрицы);
- умножение матрицы на элемент основного кольца или поля (то есть скаляр).

Относительно сложения матрицы образуют абелеву группу; если же рассматривать ещё и умножение на скаляр, то матрицы образуют модуль над соответствующим кольцом (векторное пространство над полем). Множество квадратных матриц замкнуто относительно матричного умножения, поэтому квадратные матрицы одного размера образуют ассоциативное кольцо с единицей относительно матричного сложения и матричного умножения.

Доказано, что каждому линейному оператору, действующему в n-мерном линейном пространстве, можно сопоставить единственную квадратную матрицу порядка n; и обратно — каждой квадратной матрице порядка n может быть сопоставлен единственный линейный оператор, действующий в этом пространстве. Свойства матрицы соответствуют свойствам линейного оператора. В частности, собственные числа матрицы — это собственные числа оператора, отвечающие соответствующим собственным векторам.

То же можно сказать о представлении матрицами билинейных (квадратичных) форм.

История

Впервые матрицы упоминались ещё в древнем Китае, называясь тогда «волшебным квадратом». Основным применением матриц было решение линейных уравнений. Также волшебные квадраты были известны чуть позднее у арабских математиков, примерно тогда появился принцип сложения матриц. После развития теории определителей в конце 17-го века, Габриэль Крамер начал разрабатывать свою теорию в 18-м столетии и опубликовал «правило Крамера» в 1751 году. Примерно в этом же промежутке времени появился «метод Гаусса». Теория матриц начала своё существование в середине XIX века в работах Уильяма Гамильтона и Артура Кэли. Фундаментальные результаты в теории матриц принадлежат Вейерштрассу, Жордану, Фробениусу. Термин «матрица» ввел Джеймс Сильвестр в 1850 г.

Введение

Матрицы естественным образом возникают при решении систем линейных уравнений, а также при рассмотрении линейных преобразований.

Системы линейных уравнений

Рассмотрим систему линейных уравнений вида:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}.$$

Эта система состоит из m линейных уравнений относительно n неизвестных. Она может быть записана в виде следующего матричного уравнения :

$Ax = b$, где

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & a_{ij} & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}; \; x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}; \; b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

Матрица A — это матрица коэффициентов системы линейных уравнений, вектор-столбец x — вектор неизвестных, а вектор-столбец b — некоторый заданный вектор.

Для того, чтобы система имела решение (хотя бы одно), необходимо и достаточно, чтобы вектор b был линейной комбинацией столбцов A, и тогда вектор x — это вектор, содержащий коэффициенты разложения вектора b по столбцам матрицы A.

На языке матриц условие разрешимости системы линейных уравнений формулируется в виде теоремы Кронекера-Капелли:

ранг матрицы A равен рангу расширенной матрицы $[A|b]$,

составленной из столбцов A и столбца b.

Линейные преобразования

Рассмотрим линейное преобразование $\mathcal{A}: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, действующее из n-мерного векторного пространства $\mathbb{R}^n$ в m-мерное векторное пространство $\mathbb{R}^m$, имеющее следующий вид:

$$\begin{cases} y_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \\ y_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \\ y_m = a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n \end{cases}.$$

В матричной форме это преобразование уравнения вида:

$y = Ax$.

Матрица A — это матрица коэффициентов линейного преобразования.

Если рассмотреть действие линейного преобразования $\mathcal{A}$ на векторы вида $e_j = \left(0, \dots, 0, 1_j, 0, \dots, 0\right)^T$, составляющие базис пространства $\mathbb{R}^n$, то $\mathcal{A}\mathbf{e}_j$— это есть j-ый столбец матрицы A.

Таким образом, матрица A полностью описывает линейное преобразование $\mathcal{A}$, и, поэтому, называется **матрицей линейного преобразования**.

Определения

Прямоугольная матрица

Пусть есть два конечных множества:

номера строк: $M = \{1,2,\ldots,m\}$;

номера столбцов: $N = \{1,2,\ldots,m\}$, где m и n — натуральные числа.

Назовём матрицей A размера $m \times n$ (читается m на n) (m - строк, n- столбцов) с элементами из некоторого кольца или поля $\mathcal{K}$ отображение вида $A: M \times N \to \mathcal{K}$. Матрица записывается как

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & a_{ij} & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix},$$

где элемент матрицы $a_{ij} = a(i,j)$ находится на пересечении i-й строки и j-го столбца.

- i-я строка матрицы $A(i,) = (a_{i1} \quad a_{i2} \quad \cdots \quad a_{in})$;
- j-й столбец матрицы $A(,j) = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{pmatrix}$.

При этом количество элементов матрицы равно $m \cdot n$.

В соответствии с этим

- каждую строку матрицы можно интерпретировать как вектор в n-мерном координатном пространстве $\mathcal{K}^n$;
- каждый столбец матрицы — как вектор в m-мерном координатном пространстве $\mathcal{K}^m$.

Сама матрица естественным образом интерпретируется как вектор в пространстве $\mathcal{K}^{mn}$, имеющем размерность mn. Это позволяет ввести покомпонентное сложение матриц и умножение матрицы на число; что касается матричного умножения, то оно существенным образом опирается на прямоугольную структуру матрицы.

Квадратная матрица

Если у матрицы количество строк m совпадает с количеством столбцов n, то такая матрица называется **квадратной**, а число $m = n$ называется *размером* квадратной матрицы или её **порядком**.

Вектор-строка и вектор-столбец

Матрицы размера $m \times 1$ и $1 \times n$ являются элементами пространств $\mathcal{K}^m$ и $\mathcal{K}^n$ соответственно:

- матрица размера $m \times 1$ называется вектор-столбцом и имеет специальное обозначение:

$$\operatorname{colon}(a_1,\ldots,a_i,\ldots,a_m) = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_i \\ \vdots \\ a_m \end{pmatrix} = (a_1,\ldots,a_i,\ldots,a_m)^T$$

- матрица размера $1 \times n$ называется вектор-строкой и имеет специальное обозначение:

$$\operatorname{row}(a_1,\ldots,a_i,\ldots,a_n) = (a_1,\ldots,a_i,\ldots,a_n).$$

Определения (продолжение)

Элементарные преобразования матриц

Элементарными преобразованиями строк матрицы называются следующие преобразования:

1. Умножение строки на число отличное от нуля,
2. Прибавление одной строки к другой строке,
3. Перестановка местами двух строк.

Элементарные преобразования столбцов матрицы определяются аналогично.

Ранг матрицы

Строки и столбцы матрицы являются элементами соответствующих векторных пространств:

- столбцы матрицы A составляют элементы пространства размерности m;
- строки матрицы A составляют элементы пространства размерности n.

Рангом матрицы называют количество линейно независимых столбцов матрицы (столбцовый ранг матрицы) или количество линейно независимых строк матрицы (строчный ранг матрицы). Этому определению эквивалентно определение ранга матрицы как порядка максимального отличного от нуля минора матрицы.

При элементарных преобразованиях ранг матрицы не меняется.

Обозначения

- Обычно матрицу обозначают заглавной буквой латинского алфавита: пусть $A\colon M \times N \to \mathcal{K}$,

тогда A — матрица, которая интерпретируется как прямоугольный массив элементов поля $\mathcal{K}$ вида $a_{ij} = A(i,j)$, где

- первый индекс означает индекс строки: $i = \overline{1,m}$;
- второй индекс означает индекс столбца: $j = \overline{1,n}$;

таким образом, a_{ij} — элемент матрицы A, находящийся на пересечении i-й строки и j-го столбца. В соответствии с этим принято следующее компактное обозначение для матрицы размера $m \times n$:

$$A = (a_{ij})_{i=1,j=1}^{m,n}$$

или просто:

$$A = (a_{ij}),$$

если нужно просто указать обозначение для элементов матрицы.

Иногда, вместо a_{ij}, пишут $a_{i,j}$, чтобы отделить индексы друг от друга и избежать смешения с произведением двух чисел.

Если необходимо дать развёрнутое представление матрицы в виде таблицы, то используют запись вида

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mj} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}, \quad \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mj} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix},$$

$$\begin{Vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mj} & \cdots & a_{mn} \end{Vmatrix}$$

Можно встретить как обозначения с круглыми скобками «(…)», так и обозначения с квадратными скобками «[…]». Реже можно встретить обозначения с двойными прямыми линиями «‖…‖».

Поскольку матрица состоит из строк и столбцов, для них используются следующие обозначения: $a_{i\cdot} = A_i = [a_{i1} \quad \cdots \quad a_{ij} \quad \cdots \quad a_{in}]$ — это i-тая строка матрицы A, а

$$a_{\cdot j} = A^j = \begin{bmatrix} a_{1j} \\ \vdots \\ a_{ij} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{bmatrix}$$ — это j-тый столбец матрицы A.

Таким образом, матрица обладает двойственным представлением — по столбцам: $A = [A^1 \quad \cdots \quad A^j \quad \cdots \quad A^n]$

Обозначения (продолжение)

и по строкам:

$$A = \begin{bmatrix} A_1 \\ \vdots \\ A_i \\ \vdots \\ A_m \end{bmatrix}.$$

Такое представление позволяет формулировать свойства матриц в терминах строк или в терминах столбцов.

Транспонирование матриц

Для каждой матрицы $A = (a_{i,j})_{\substack{i=\overline{1,m} \\ j=\overline{1,n}}} = \begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m,1} & \cdots & a_{m,n} \end{pmatrix}$

размера $m \times n$

можно построить матрицу

$B = (b_{j,i})_{\substack{j=\overline{1,n} \\ i=\overline{1,m}}} = \begin{pmatrix} b_{1,1} & \cdots & b_{1,m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n,1} & \cdots & b_{n,m} \end{pmatrix}$ размера $n \times m$,

у которой $b_{j,i} = a_{i,j}$ для всех $i = \overline{1,m}$ и $j = \overline{1,n}$.

Такая матрица называется транспонированной матрицей для A и обозначается A^T,

иногда (если нет возможности спутать с дифференцированием) обозначается A',

иногда (если нет возможности спутать с эрмитовым сопряжением) обозначается A^*.

При транспонировании строки (столбцы) матрицы A становятся столбцами (соответственно - строками) матрицы A^T.

Очевидно, что $(A^T)^T = A$.

Для матриц над кольцом $\mathcal{K}$ транспонирование является изоморфизмом $\mathcal{K}$ - модулей матриц, поскольку

$(A + B)^T = A^T + B^T$,

$(\lambda \cdot A)^T = \lambda \cdot A^T$, для любых $\lambda \in \mathcal{K}$.

Диагональная матрица

Диагональная матрица — квадратная матрица, все элементы которой кроме диагональных — нулевые $(i \neq j\colon a_{ij} = 0)$, иногда записывается как: $\mathrm{diag}(a_1, a_2, \ldots, a_n)$.

Операции над матрицами

Сложение матриц

Складывать можно только матрицы одинакового размера.

Сложение матриц $A + B$ есть операция нахождения матрицы C, все элементы которой равны попарной сумме всех соответствующих элементов матриц A и B, то есть каждый элемент матрицы C равен $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$

Свойства сложения матриц:

- 1.коммутативность: $A + B = B + A$;
- 2.ассоциативность: $(A + B) + C = A + (B + C)$;
- 3.сложение с нулевой матрицей: $A + \Theta = A$;
- 4.существование противоположной матрицы: $A + (-A) = \Theta$;

Все свойства линейных операций повторяют аксиомы линейного пространства и поэтому справедлива теорема:

Множество всех матриц одинаковых размеров $m \times n$ с элементами из поля P (поля всех действительных или комплексных чисел) образует линейное пространство над полем P (каждая такая матрица является вектором этого пространства). Впрочем, прежде всего во избежание терминологической путаницы, матрицы в обычных контекстах избегают без необходимости (которой нет в наиболее обычных стандартных применениях) и четкого уточнения употребления термина называть векторами.

Умножение матрицы на число

Умножение матрицы A на число $\lambda \in \mathcal{K}$ заключается в построении матрицы $\lambda A = (\lambda a_{ij})$.

Свойства умножения матриц на число:

- $1A = A$;
- $(\lambda\beta)A = \lambda(\beta A)$;
- $(\lambda + \beta)A = \lambda A + \beta A$;
- $\lambda(A + B) = \lambda A + \lambda B$;

Умножение матриц

Умножение матриц (обозначение: AB, реже со знаком умножения $A \times B$ — есть операция вычисления матрицы C, каждый элемент которой равен сумме произведений элементов в соответствующей строке первого множителя и столбце второго.

$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj}$

Количество столбцов в матрице A должно совпадать с количеством строк в матрице B, иными словами, матрица A обязана быть **согласованной** с матрицей B. Если матрица A имеет размерность $m \times n$, B — $n \times k$, то размерность их произведения $AB = C$ есть $m \times k$.

Свойства умножения матриц:

- 1.ассоциативность $(AB)C = A(BC)$;
- 2.некоммутативность (в общем случае): $AB \neq BA$;
- 3.произведение коммутативно в случае умножения

Операции над матрицами (продолжение)

с единичной матрицей: $AI = IA$;

- 4.дистрибутивность: $(A+B)C = AC + BC$, $A(B+C) = AB + AC$;
- 5.ассоциативность и коммутативность относительно умножения на число: $(\lambda A)B = \lambda(AB) = A(\lambda B)$.

Умножение вектора на матрицу

По обычным правилам матричного умножения осуществляется умножение на матрицу слева вектора-столбца, а также умножение вектора-строки на матрицу справа. Поскольку элементы вектора-столбца или вектора-строки можно записать (что обычно и делается), используя один, а не два индекса, это умножение можно записать так:

для вектора-столбца v (получая новый вектор-столбец Av):

$(Av)_i = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} v_k$,

для вектора-строки s (получая новый вектор-строку sA):

$(sA)_i = \sum_{k=1}^{n} s_k a_{ki}$,

Вектор-строка, матрица и вектор-столбец могут быть умножены друг на друга, давая число (скаляр):

$sAv = \sum_{k,i} s_k a_{ki} v_i$.

(Порядок важен: вектор-строка слева, вектор-столбец справа от матрицы).

Эти операции являются основой матричного представления линейных операторов и линейных преобразований координат (смены базисов), таких, как повороты, масштабирования, зеркальные отражения, а также (последнее) матричного представления билинейных (квадратичных) форм.

Транспонирование и эрмитово сопряжение

Транспонирование уже обсуждалось выше: если $A = (a_{ij})$, то $A^T = (a_{ji})$. Для комплексных матриц более употребительно эрмитово сопряжение: $A^* = A^{-T}$. С точки зрения операторного взгляда на матрицы, транспонированная и эрмитово сопряжённая матрица — это матрицы оператора, сопряжённого относительно скалярного или эрмитова произведения, соответственно.

След

Для квадратной матрицы A сумма диагональных элементов (т.е. главных миноров первого порядка) называется следом:

$\mathrm{Tr}A = \sum_i a_{ii} = a_{11} + \cdots + a_{nn}$

(другие обозначения Trace, Sp, Spur).

Связанные понятия

Линейные комбинации

В векторном пространстве линейной комбинацией векторов $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n$ называется вектор

$$\mathbf{x} = a_1\mathbf{x}_1 + \dots + a_n\mathbf{x}_n,$$

где $a_1, \dots, a_n$ — коэффициенты разложения:

- если все коэффициенты равны нулю, то такая комбинация называется тривиальной,
- если же хотя бы один коэффициент отличен от нуля, то такая комбинация называется нетривиальной.

Это позволяет описать произведение $C = AB$ матриц A и B в терминах линейных комбинаций:

- столбцы матрицы C — это линейные комбинации столбцов матрицы A с коэффициентами, взятыми из матрицы B;
- строки матрицы C — это линейные комбинации строк матрицы B с коэффициентами, взятыми из матрицы A.

Линейная зависимость

Если какой-либо вектор можно представить в виде линейной комбинации, то говорят о линейной зависимости данного вектора от элементов комбинации.

Точнее, говорят так: некоторая совокупность элементов векторного пространства называется линейно зависимой, если существует равная нулю линейная комбинация элементов данной совокупности или где не все числа $a_1, \dots, a_n$ равны нулю; если такой нетривиальной комбинации не существует, то данная совокупность векторов называется линейно независимой.

Линейная зависимость векторов означает, что какой-то вектор заданной совокупности линейно выражается через остальные векторы.

Каждая матрица представляет собой совокупность векторов (одного и того же пространства). Две такие матрицы — две совокупности. Если каждый вектор одной совокупности линейно выражается через векторы другой совокупности, то на языке теории матриц этот факт описывается при помощи произведения матриц:

- если строки матрицы C линейно зависят от строк матрицы B, то $C = AB$ для некоторой матрицы A;
- если столбцы матрицы C линейно зависят от столбцов другой матрицы A, то $C = AB$ для некоторой матрицы B.

Квадратные матрицы и смежные определения

Если количество строк матрицы равно количеству столбцов, то такая матрица называется квадратной.

Для квадратных матриц существует единичная матрица E (аналог единицы для операции умножения чисел) такая, что умножение любой матрицы на неё не влияет на результат, а именно

$$EA = AE = A$$

У единичной матрицы единицы стоят только по главной диагонали, остальные элементы равны нулю

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

Для некоторых квадратных матриц можно найти так называемую обратную матрицу. Обратная матрица A^{-1} такова, что если матрицу умножить на обратную ей матрицу, то получится единичная матрица:

$$AA^{-1} = E$$

Обратная матрица существует не всегда. Матрицы, для которых обратная матрица существует, называются невырожденными (или регулярными), а для которых нет — вырожденными (или сингулярными). Матрица невырождена, если все её строки (столбцы) линейно независимы как векторы. Максимальное число линейно независимых строк (столбцов) называется рангом матрицы. Определителем (детерминантом) матрицы называется значение нормированной кососимметрической (антисимметрической) полилинейной формы валентности $(p, 0)$ на столбцах матрицы. Квадратная матрица над числовым полем вырождена тогда и только тогда, когда её определитель равен нулю.

Кольцо матриц

- Из указанных выше свойств сложения и умножения матриц (ассоциативность и коммутативность сложения, дистрибутивность умножения, существование нулевой и противоположной по сложению матрицы) следует, что квадратные матрицы n на n с элементами из любого кольца R образуют кольцо, изоморфное кольцу эндоморфизмов свободного модуля R^n. Это кольцо обозначается $M(n, R)$ или $M_n(R)$. Если же R — коммутативное кольцо, $M(n, R)$ является также ассоциативной алгеброй над R. Определитель матрицы с элементами из коммутативного кольца можно вычислять по обычной формуле, при этом матрица будет обратима тогда и только тогда, когда её определитель обратим в R. Это обобщает ситуацию с матрицами с элементами из поля, так как в поле обратим любой элемент, кроме нуля.

Матрицы в теории групп

Матрицы играют важную роль в теории групп. Они используются при построении общих линейных групп, специальных линейных групп, диагональных групп, треугольных групп, унитреугольных групп.

Конечную группу (в частности, симметрическую) можно (изоморфно) промоделировать матрицами перестановок (содержащими только «0» и «1»),

например, для S_3: $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Поле $\mathbb{C}$ комплексных чисел может быть (изоморфно) промоделировано над полем $\mathbb{R}$ вещественных чисел:

для $z = x + iy$, $c = a + ib \in \mathbb{C}$ матричные аналоги $Z = \begin{pmatrix} x & y \\ -y & x \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$, где $x, y, a, b \in \mathbb{R}$;

Место для формулы. Соответствует $z + c = (x + a) + i(y + b)$ соответствует $Z + C = \begin{pmatrix} x + a & y + b \\ -y - b & x + a \end{pmatrix}$;

$zc = (xa - yb) + i(xb + ya)$ соответствует $ZC = \begin{pmatrix} xa - yb & xb + ya \\ -ya - xb & -yb + xa \end{pmatrix}$;

$\dot{z} = x - iy$ соответствует $Z^T = \begin{pmatrix} x & -y \\ y & x \end{pmatrix}$;

$|z|^2 = z\dot{z} = x^2 + y^2 = det(Z) \in \mathbb{R}$;

$\frac{1}{z} = \frac{\dot{z}}{z\dot{z}} = \frac{x-iy}{x^2+y^2}$ при $z \neq 0$ соответствует $Z^{-1} = \frac{Z^T}{det(Z)}$ при $det(Z) \neq 0$;

$e^z = e^{x+iy} = e^x(cos(y) + isin(y))$ соответствует $e^x \begin{pmatrix} cos(y) & sin(y) \\ -sin(y) & cos(y) \end{pmatrix}$.

В частности, для $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $I = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$

$z = x + iy \in \mathbb{C}$ соответствует $Z = xE + yI$,

где $I^2 = -E$.

Литература

- Беллман Р. Введение в теорию матриц. — М.: Мир, 1969.
- Биркгоф Г. (Garrett Birkhoff), Барти Т. (Thomas C. Bartee) Современная прикладная алгебра. — М.: Мир, 1976, 400 стр. с илл.
- Ван дер Варден Б. Л. (B. L. van der Waerden) Алгебра. (2-е изд.) — М.: Наука, 1979, 624 стр. с илл.
- Гантмахер Ф. Р. Теория матриц.- 5-е изд.— М.: ФизМатЛит, 2004.- 560 с.- ISBN 5-9221-0524-8.; (2-е изд.).- М.: Наука, 1966.
- Голуб Дж. (Gene H. Golub), Ван Лоун Ч. (Charles F. Van Loan) Матричные вычисления. — М.: Мир, 1999, 548с., ил. (ISBN 5-03-002406-9)
- Курош А. Г. Курс высшей алгебры. (9-е изд.) — М.: Наука, 1968, 432 стр. с илл.
- Курош А. Г. Лекции по общей алгебре. (2-е изд.) — М.: Наука, 1973, 400 стр. с илл.
- Ланкастер П. (P. Lankaster) Теория матриц: Пер. с англ.- 2-е изд.- М.: Наука, 1982.- 272с.; (1-е изд.).- М.: Наука, 1973.
- Ленг С. (Serge Lang) Алгебра. — М.: Мир, 1968, 564с., ил.
- Наймарк М. А. Теория представлений групп. — М.: Наука, 1976, 560 стр. с илл.
- Соколов Н. П. Пространственные матрицы и их приложения. — М.: ГИФМЛ, 1960.
- Хорн Р. (Roger A. Horn), Джонсон Ч. (Charles C. Johnson) Матричный анализ. — М.: Мир, 1989, 655с., ил. (ISBN 5-03-001042-4)
- Халмош П. Конечномерные векторные пространства = Finite-dimensional vector spaces. — М.: Физматгиз, 1963. — 264 с.

Спасибо за внимание