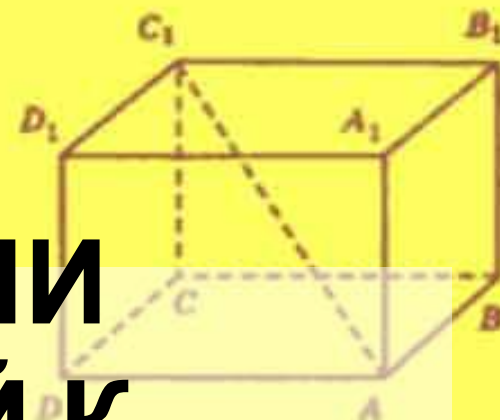


$$S=ab/2$$



О ПОСТРОЕНИИ КАСАТЕЛЬНОЙ К ОКРУЖНОСТИ



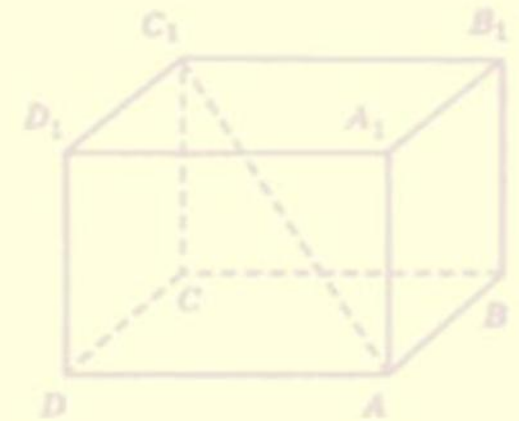
Учитель математики
ФКОУ ВСОШ-2 УФСИН России по Белгородской
области,
г. Новый Оскол

Двойнина Наталья Владимировна

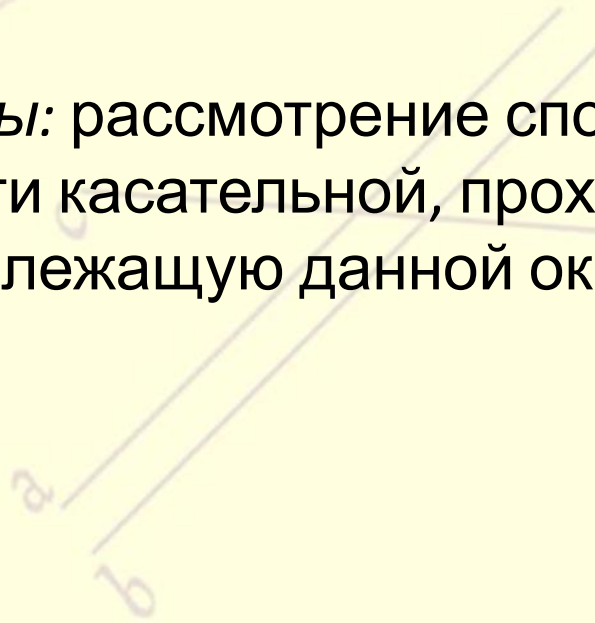
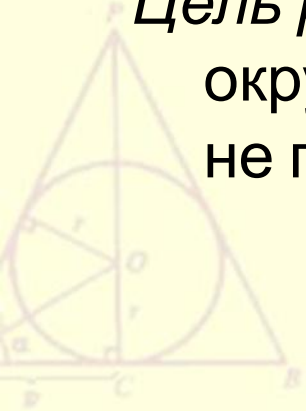
$$C=2\pi r$$

$$P=(a+b)*2$$

$$S = ab/2$$



Цель работы: рассмотрение способов построения к окружности касательной, проходящей через точку A, не принадлежащую данной окружности.

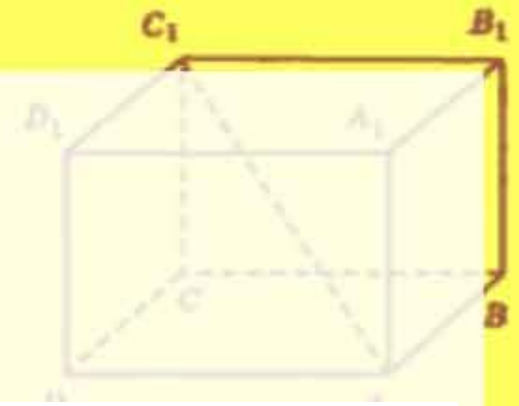


$$C = 2\pi r$$

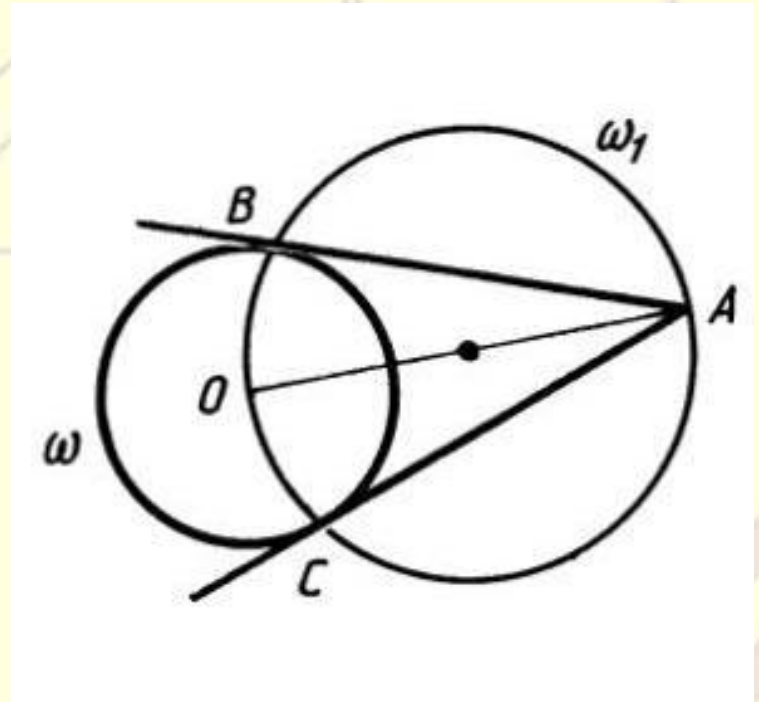
$$P = (a+b) * 2$$

$$S = ab/2$$

1 способ



Традиционное построение касательной циркулем и линейкой сводится к следующему: на отрезке OA как на диаметре строят окружность ω_1 , пересекающую данную окружность ω в точках B и C (см. рис.). Прямые AB и AC — искомые касательные.



Указанное построение основано на том, что $\angle OBA$, вписанный в окружность ω_1 и опирающийся на диаметр, равен 90° .

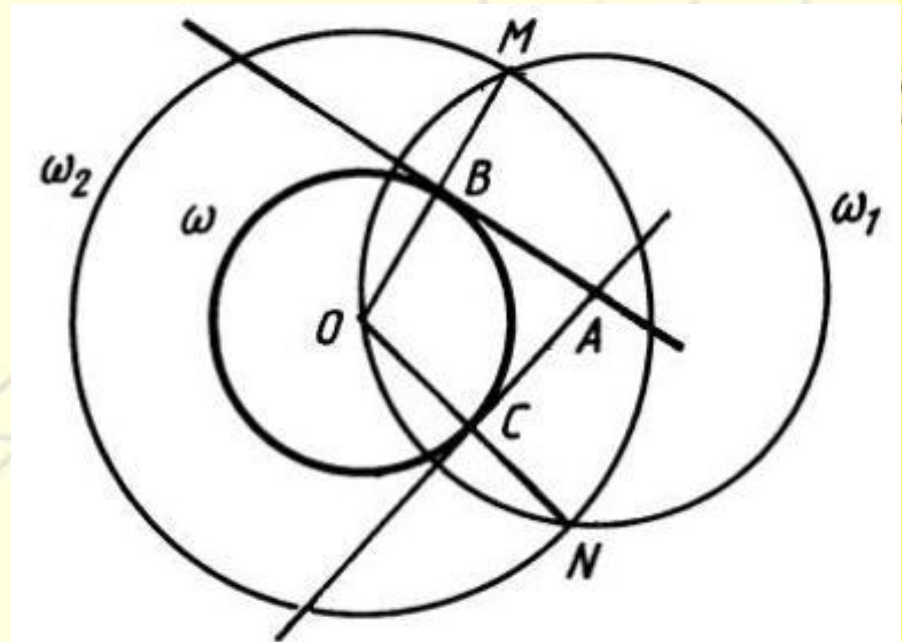
$$C = 2\pi r$$

$$P = (a+b) \cdot 2$$

$$S = ab/2$$

2 способ

Построим окружность ω_1 ($A, |AO|$) и пересечем ее окружностью $\omega_2(O, 2R)$. Обозначим полученные точки пересечения через M и N (см. рис.). Отрезки OM и ON пересекают данную окружность ω в точках B и C . Прямые AB и AC — искомые касательные.

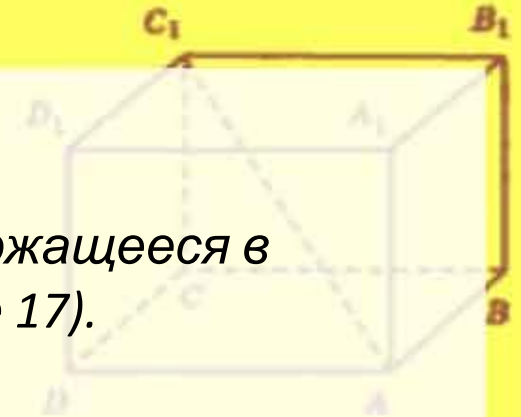


Действительно, точка B является серединой основания OM равнобедренного треугольника OAM , поэтому AB — его высота, а значит, $\angle OBA$ прямой. Отсюда следует, что AB — касательная к окружности ω .

Характерно, что в первых двух способах для построения касательных были предварительно найдены точки касания.

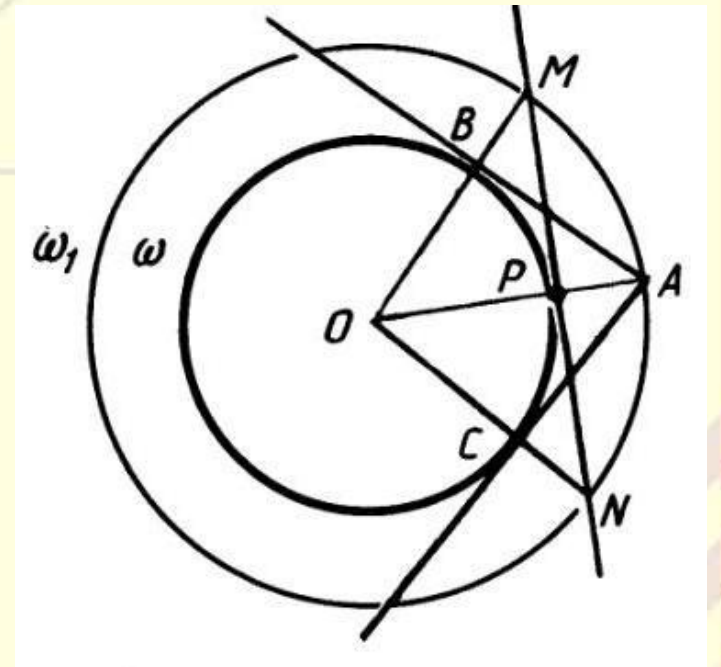
$$S = ab/2$$

3 способ



Построение касательной к окружности, содержащееся в третьей книге «Начал» Евклида (предложение 17).

Проводим окружность ω_1 (A , $|AO|$) (см. рис.). Строим в точке $P = \omega[AO]$ касательную t к окружности ω , пересекающую ω_1 в точках M и N . Отрезки OM и ON пересекают ω в точках B и C ; прямые AB и AC — искомые касательные.



Действительно, треугольники POM и BOA конгруэнтны, так как у них общий угол при вершине O , заключенный между соответственно конгруэнтными сторонами ($|OP| = |OB|$, $|OM| = |OA|$). Но треугольник OPM прямоугольный, ($\angle P = 90^\circ$). поэтому $\angle B = 90^\circ$, и, следовательно, прямая AB — касательная к окружности ω .

$$P = (a+b) \cdot 2$$

C

$$S = ab/2$$

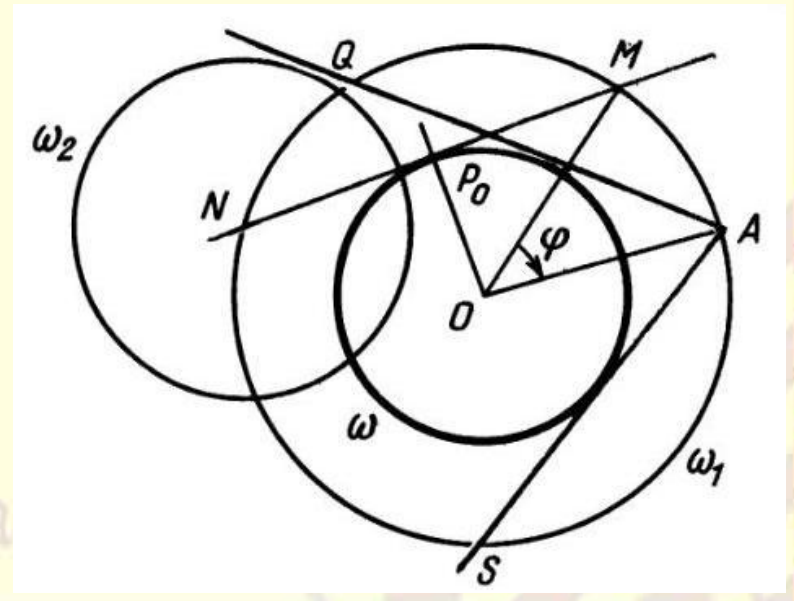
4 способ

Построение касательной к окружности без предварительного построения точек касания.

Проведем окружность ω_1 ($A, |AO|$). Касательная к окружности ω в произвольной точке $P_0 \in \omega$ пересекает окружность ω_1 в точках M и N (см. рис.). Поворот, при котором $M \rightarrow A$, отображает точку N на точку Q . Прямая AQ — искомая касательная. Действительно, поворот отображает касательную к ω на касательную к ω ($(MN) \rightarrow (AQ)$).

Чтобы сделать построение, проведем окружность ω_2 ($N, |AM|$). Одна из этих двух точек пересечения ω_2 и ω_1 и есть точка Q , а именно та, для которой направленный угол MOA равен направленному углу NOQ .

Построение второй касательной к окружности ω сводится к выполнению поворота, при котором точка N переходит в точку A . В этом случае точка M переходит в точку S и прямая AS — вторая касательная.



$$S = ab/2$$

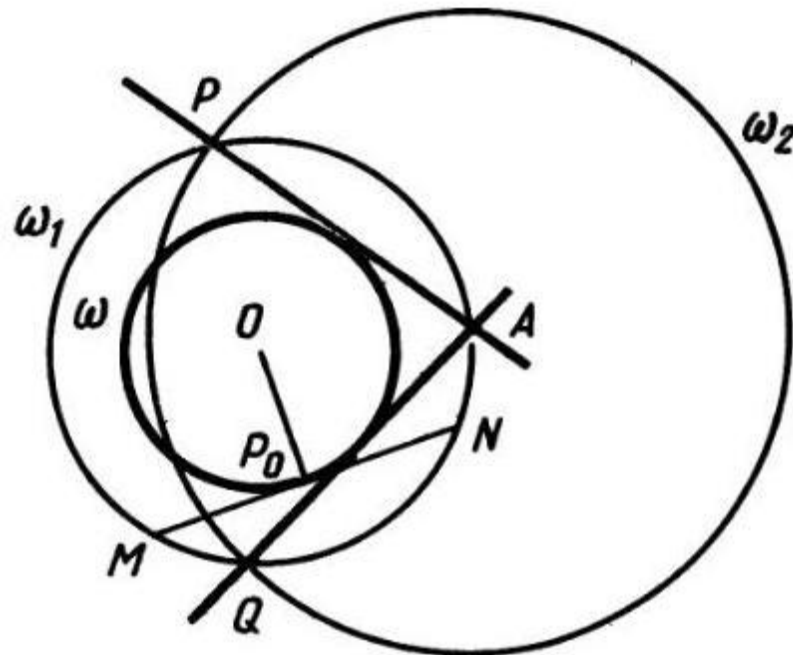
5 способ



Следующий способ сводится к использованию свойств хорд окружности, равноудаленных от ее центра, — эти хорды конгруэнтны.

Сделаем последовательно окружность ω_1 ($A, |AO|$), касательную к окружности ω в произвольной точке P_0 , пересекающую ω_1 в точках M и N , и окружность ω_2 ($A, |MN|$), пересекающую ω_1 в точках P и Q (см. рис.). Прямые AP и AQ — искомые касательные.

Действительно, хорды AP и AQ конгруэнтны хорде MN , поэтому прямые AP и AQ находятся от центра O на таком же расстоянии R , как и прямая MN . Но в таком случае прямые AP и AQ — касательные к окружности ω .



$$P = (a+b) \cdot 2$$

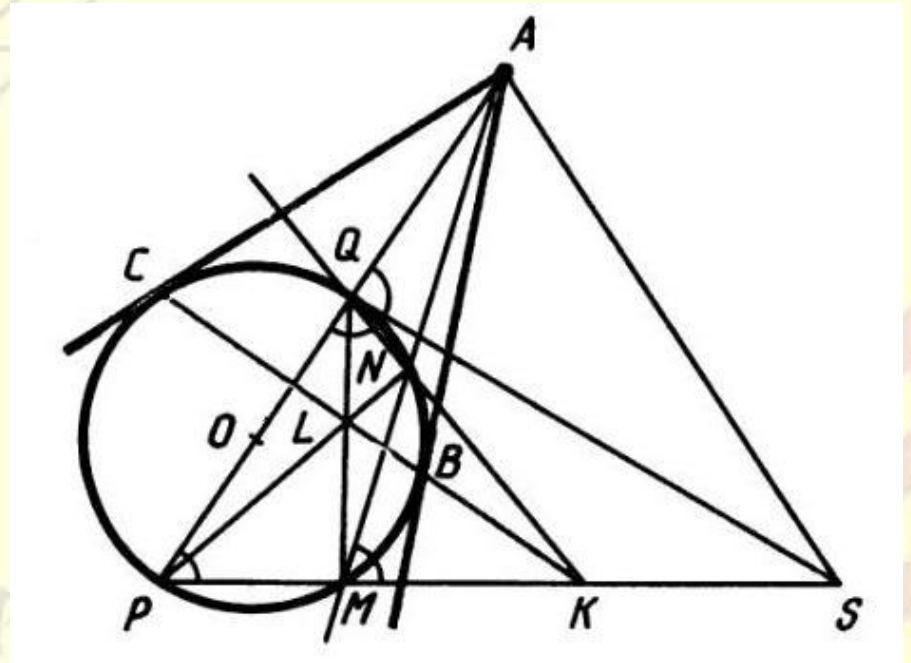
$$S = ab/2$$

6 способ

Касательную к окружности в данной на ней точке A можно построить одной линейкой. Также одной линейкой можно построить касательные к окружности, если данная точка A не принадлежит окружности. Эти построения можно выполнить одной линейкой и тогда, когда центр окружности не задан. Рассмотрим случай, когда центр O окружности ω задан, и задана точка $A \notin \omega$.

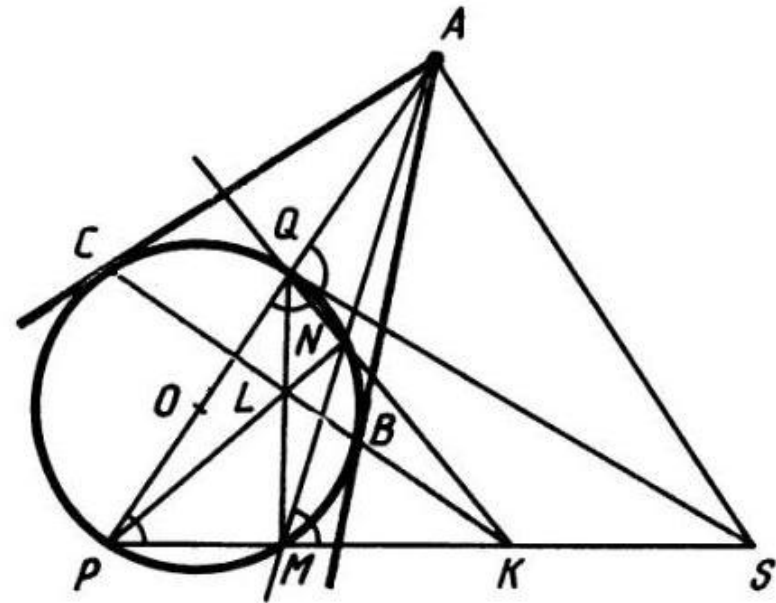
Проведем прямую OA , пересекающую окружность ω в точках P и Q (см. рис.). Далее, через точку A проведем произвольную прямую, пересекающую ω в точках N и M .

Пусть прямые PM и QN пересекаются в точке K , а прямые PN и QM — в точке L . Прямая KL пересекает окружность ω в точках B и C . Прямые AB и AC — искомые касательные. Докажем это.



6 способ (продолжение)

Заметим, что прямая KL перпендикулярна PQ . В самом деле, в треугольнике PQL отрезки PM и QN — высоты, пересекающиеся в точке K , поэтому KL содержит третью высоту, и, следовательно, $KL \perp PQ$.



Если $KL \cap PQ = D$, то $|OD| \cdot |OA| = R^2$. Действительно, пусть $\angle DPK = \alpha$, $\angle DQK = \beta$. Тогда

$$|PD| : |DQ| = \operatorname{ctg} \alpha : \operatorname{ctg} \beta \quad (1)$$

Построим перпендикуляр к прямой AP в точке A , пересекающий прямую PM в точке S . Очевидно, что

$$|PA| = |AS| \cdot \operatorname{ctg} \alpha \text{ и } |AQ| = |AS| \cdot \operatorname{ctg} \angle AQS.$$

Так как $\angle AQS = \angle AMS = 180^\circ - \angle PMN = \angle PQN = \beta$, то $|AQ| = |AS| \cdot \operatorname{ctg} \beta$.

Поэтому

$$|PA| : |AQ| = \operatorname{ctg} \alpha : \operatorname{ctg} \beta. \quad (2)$$

6 способ (продолжение)

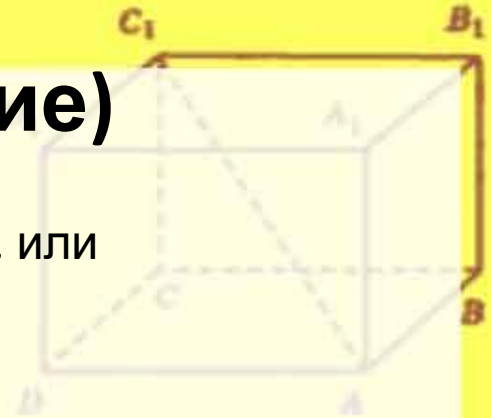
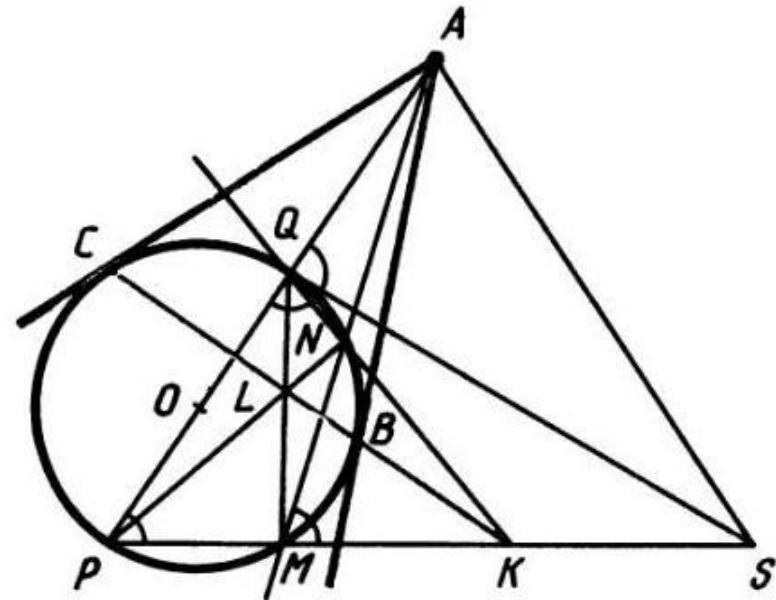
Сопоставляя (1) и (2), получаем $|PD|:|PA| = |DQ|:|AQ|$, или $(|OD| + R) \cdot (|OA| - R) = (R - |OD|) \cdot (|OA| + R)$.

После раскрытия скобок и упрощений находим, что

$$|OD| \cdot |OA| = R^2. \quad (3)$$

Из соотношения (3) следует, что $|OD|:R = R:|OA|$, т. е. треугольники ODB и OBA подобны. Поскольку $\angle ODB = 90^\circ$, то $\angle OBA = 90^\circ$. Следовательно, прямая AB - искомая касательная.

Предложенное построение выполняется только линейкой. Чтобы построить касательные AB и AC , потребовалось провести 9 прямых: AO , AM , PM , QN , KL , QM , PN , AB , AC .



$$S = ah/2$$



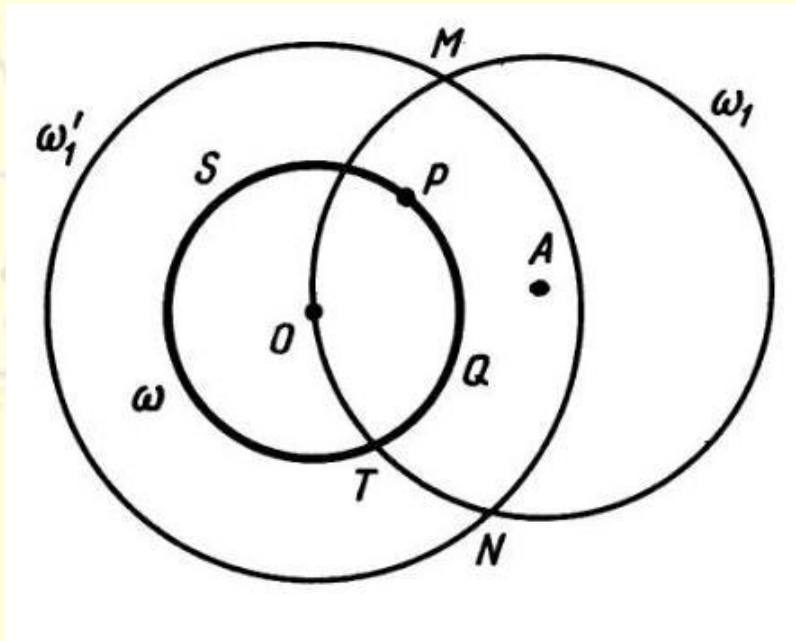
$$C = 2\pi r$$

P:

$$S = ab/2$$

7 способ

Способ построения касательной только циркулем, т. е. без привлечения линейки построим точки касания B и C по заданной окружности ω (O, R) и точке $A \notin \omega$.



Проведем окружность ω_1 ($A, |OA|$) см. (рис.). Далее найдем раствор циркуля, равный $2R$, для чего выберем на окружности ω точку S и отложим три дуги, содержащие по 60° дуговых градусов: $\angle SPQ = \angle RPQ = \angle QPT = 60^\circ$. Точки S и T диаметрально противоположны. Строим окружность $(O, |ST|)$, пересекающую ω_1 в точках M и N . Теперь остается одним циркулем построить середину отрезка MO .

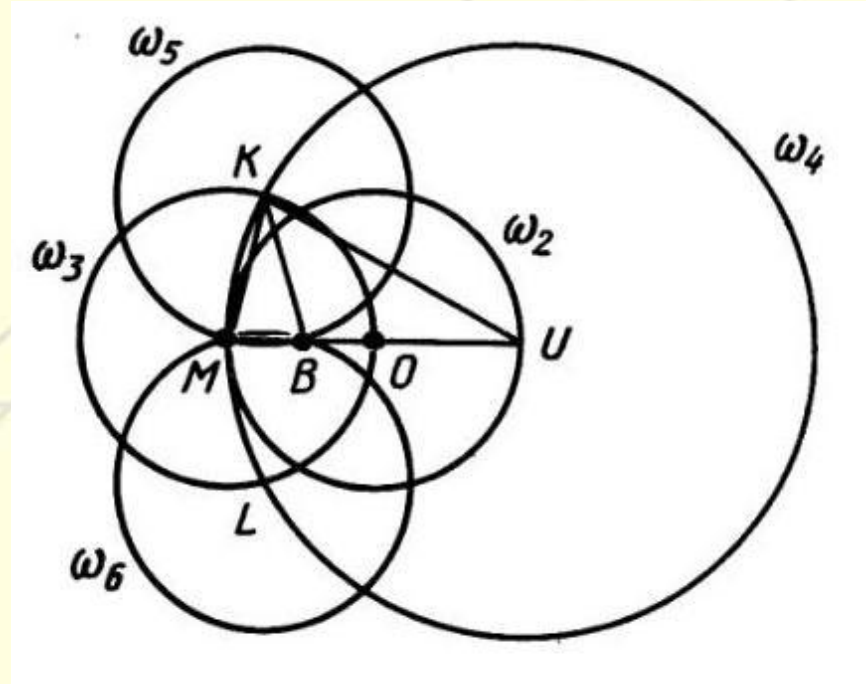
$$C = 2\pi r$$

$$P = (a+b)/2$$

7 способ (продолжение)

Для этого строим окружности ω_2 (O , $|OM|$) и ω_3 (M , $|MO|$), а затем для точек M и O находим на них диаметрально противоположные точки U и V (см. рис.). Далее строим окружность ω_4 (U , $|UM|$), пересекающую ω_3 в точках K и L . Наконец, строим окружности ω_5 (K , $|KM|$) и ω_6 (L , $|LM|$), пересекающиеся в искомой точке B — середине MO . Действительно, треугольники KMB и UMK равнобедренные и подобные. Поэтому из того, что $|KM| = \frac{1}{2} |MU|$, следует, что $|MB| = \frac{1}{2} |MK| = \frac{1}{2} R$.

Итак, точка B — искомая точка касания. Аналогично находим точку касания C .



$$S = ab/2$$

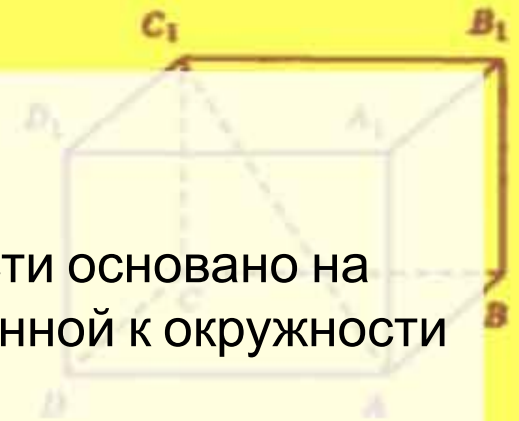
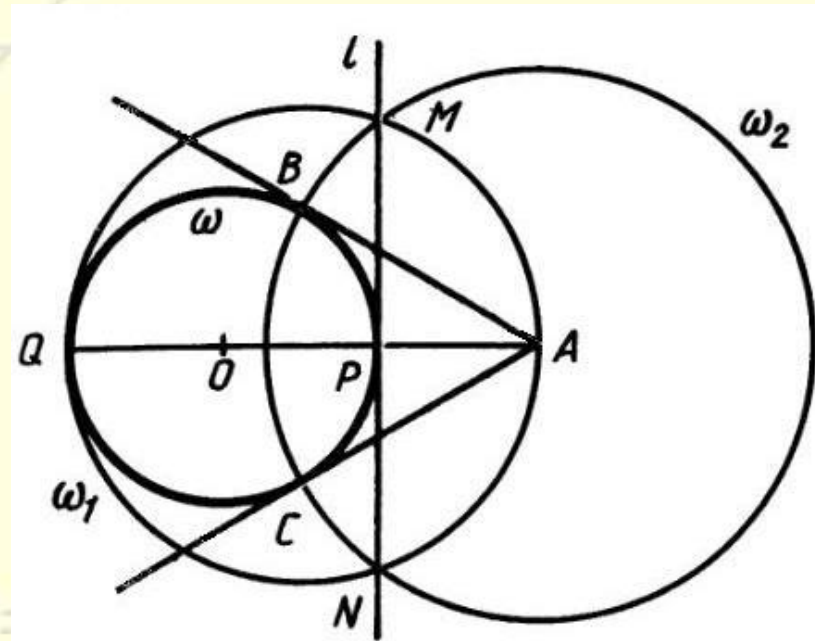
8 способ

Еще одно построение касательной к окружности основано на следующем свойстве отрезков секущей, проведенной к окружности (см. рис.):

$$|AB|^2 = |AP| \cdot |AQ|$$

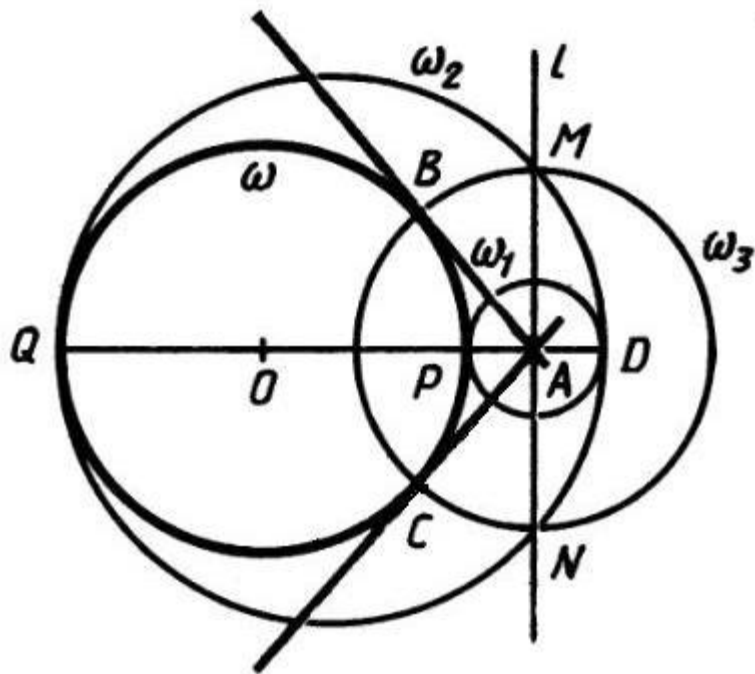
Если на отрезке AQ как на диаметре построить окружность ω_1 и пересечь ее касательной l , проведенной в точке P к ω , то получим точки M и N .

Очевидно, $|AM|^2 = |AP| \cdot |AQ|$. Поэтому окружность ω_2 (A , $|AM|$) пересечет ω в точках B и C касания искомым касательных AB и AC .



8 способ (продолжение)

Другой вариант построения касательной в данном случае основан на ином способе построения отрезка AB по отрезкам AP и AQ (см. рис.).



Так, строим окружность ω (A , $|AP|$), пересекающую (AP) в точке D , затем строим окружность ω_2 на диаметре QD и пересекаем ее перпендикуляром к прямой AP в точке A . Для полученных точек M и N имеем:

$$|AM|^2 = |AN|^2 = |AD| \cdot |AQ| = |AP| \cdot |AQ|,$$

поэтому окружность ω_3 (A , $|AM|$) пересекает ω в искомым точках касания B и C .

$$S = ab/2$$

9 способ

Построение касательной можно выполнить просто, если не связывать его непосредственно с данной окружностью $\omega(O, R)$ и данной точкой A .

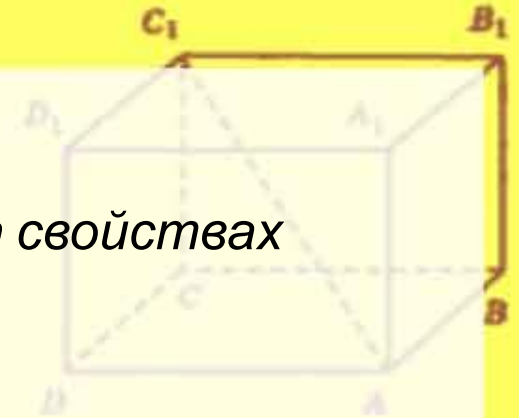
Если

B есть точка касания, то треугольник OAB прямоугольный, причем известно, что $|OB|=R$, $|OA|=d$, $\angle B=90^\circ$. Следовательно, задача сводится к построению прямоугольного треугольника по катету и гипотенузе. Катет AB построенного треугольника позволяет строить окружность $\omega_1(A, |AB|)$, пересекающую ω в искомых точках B и C .



$$S = ab/2$$

10 способ



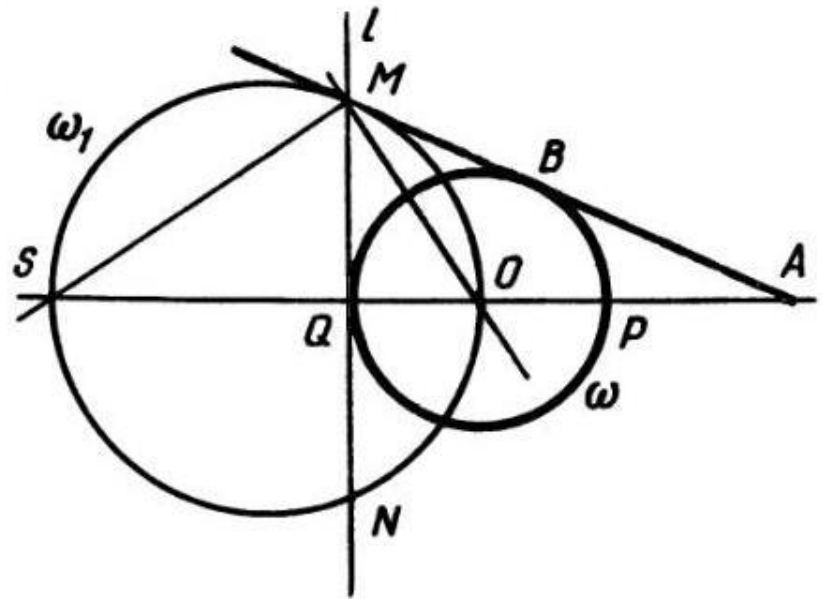
Приведем еще одно построение, основанное на свойствах биссектрис

треугольника.

Пусть искомая касательная AB пересекает касательную l к $\omega(O, R)$ в ее точке Q в некоторой точке M (см.рис.). Очевидно, $[MO)$ — биссектриса угла $\angle QMA$. Биссектриса угла, смежного с $\angle QMA$, пересекает прямую AP в точке S , для которой

$$|QS| : |SA| = |QO| : |OA|.$$

Построив точку S , можно построить окружность ω_1 на диаметре OS . Поскольку $\angle SMO$ прямой, то ω_1 пересечет l в точках M и N , таких, что (AM) и (AN) — искомые касательные.

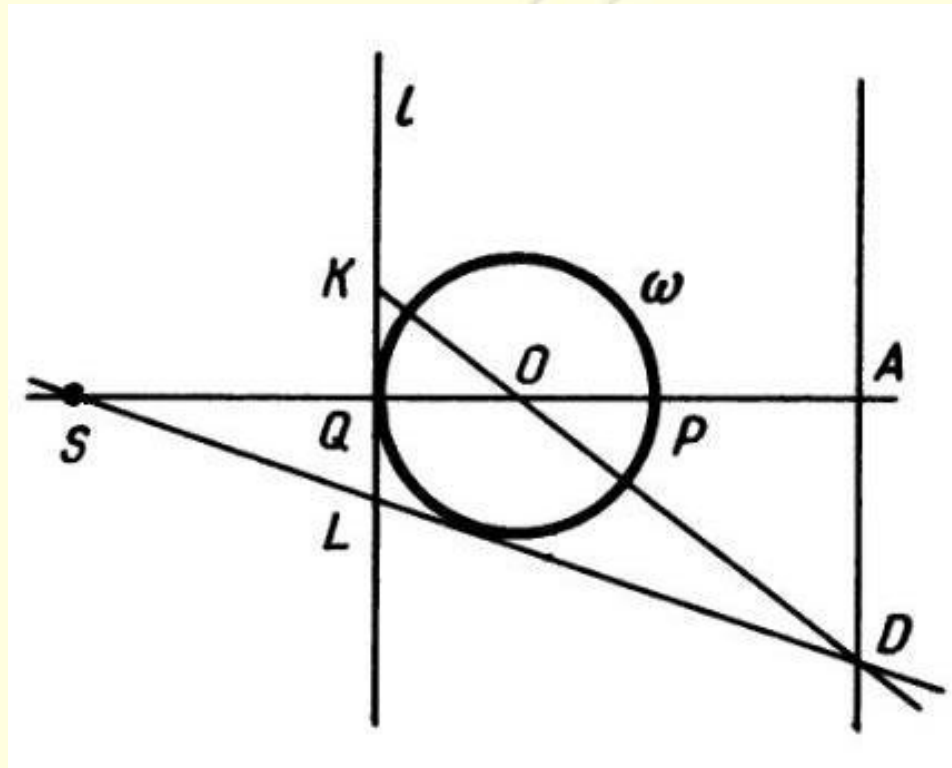


$$P = (a+b) \cdot 2$$

$$S = ab/2$$

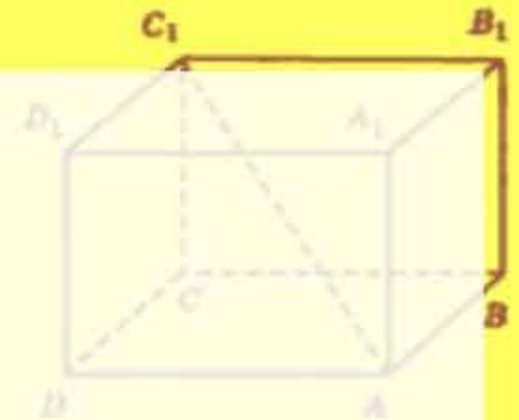
10 способ (продолжение)

Наиболее простое построение точки S такое: откладываем на l два конгруэнтных отрезка QK и QL (рис. 12); находим точку D пересечения прямой KO с перпендикуляром к прямой OA в точке A ; строим прямую DL , пересекающую прямую OA в точке S .

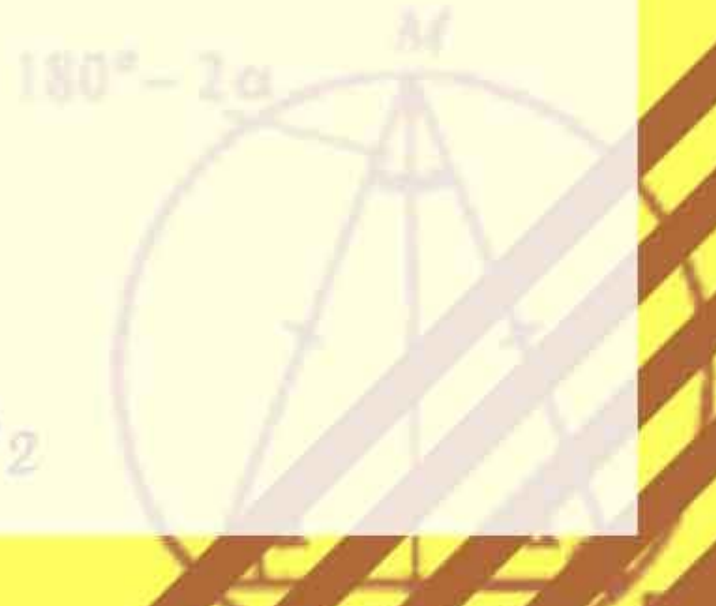


$$C = 2\pi r$$

$$S = ab/2$$



Спасибо за внимание!



$$C = 2\pi r$$

$$P = (a+b) * 2$$

Список использованной литературы

- Скопец З. А. «Геометрические миниатюры» / Сост. Г. Д. Глейзер. – М.: Просвещение, 1990. – 224 с.: ил.

$$S = ab / 2$$



- **Конгруэнтный** — соразмерный, совпадающий, совмещаемый; *матем. о геометрических объектах* — при наложении на другой объект полностью совпадающий с ним соответствующими углами, отрезками и т. п.
- В евклидовой геометрии две фигуры называются **конгруэнтными**, если одна из них может быть переведена в другую сдвигом, вращением и зеркальным отображением.

$$P = (a + b) * 2$$

$$C = 2\pi r$$

