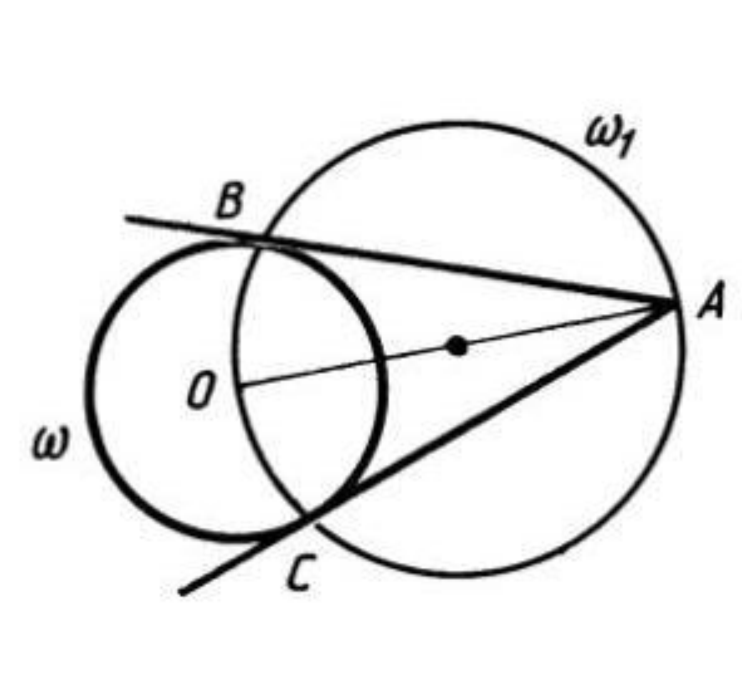
О ПОСТРОЕНИИ КАСАТЕЛЬНОЙ К ОКРУЖНОСТИ

Учитель математики
ФКОУ ВСОШ-2 УФСИН России по Белгородской области,
г. Новый Оскол
Двойнина Наталья Владимировна

Цель работы: рассмотрение способов построения к окружности касательной, проходящей через точку *А*, не принадлежащую данной окружности.

1 способ

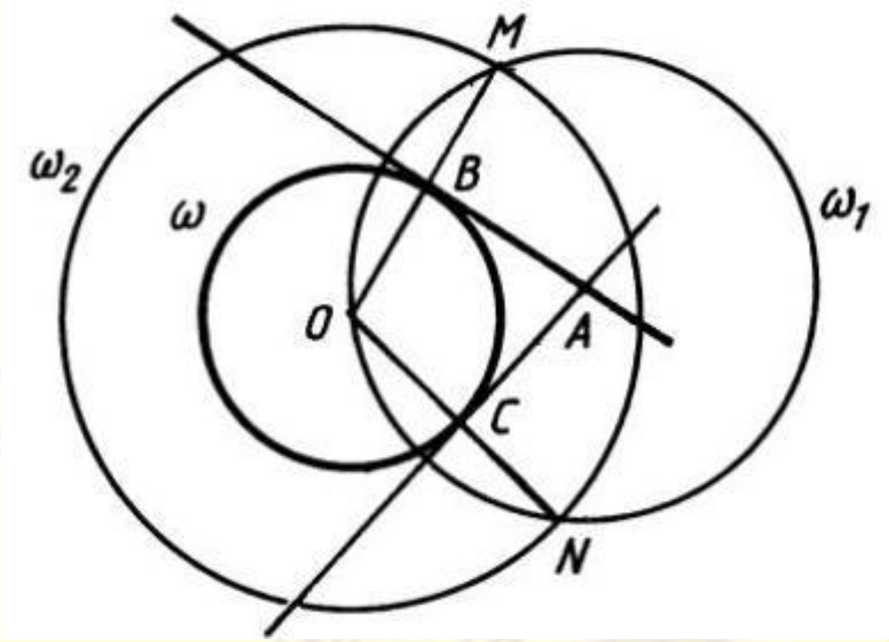
Традиционное построение касательной циркулем и линейкой сводится к следующему: на отрезке *OA* как на диаметре строят окружность ω_1, пересекающую данную окружность ω в точках *B* и *C* (см. рис.). Прямые *AB* и *AC*— искомые касательные.



Указанное построение основано на том, что $\angle OBA$, вписанный в окружность ω_1 и опирающийся на диаметр, равен 90°.

2 способ

Построим окружность ω_1 *(A, |AO|)* и пересечем ее окружностью ω_2(*O, 2R).* Обозначим полученные точки пересечения через *M* и *N* (см. рис.). Отрезки *OM* и *ON* пересекают данную окружность ω в точках *B* и *C*. Прямые *AB* и *AC* — искомые касательные.



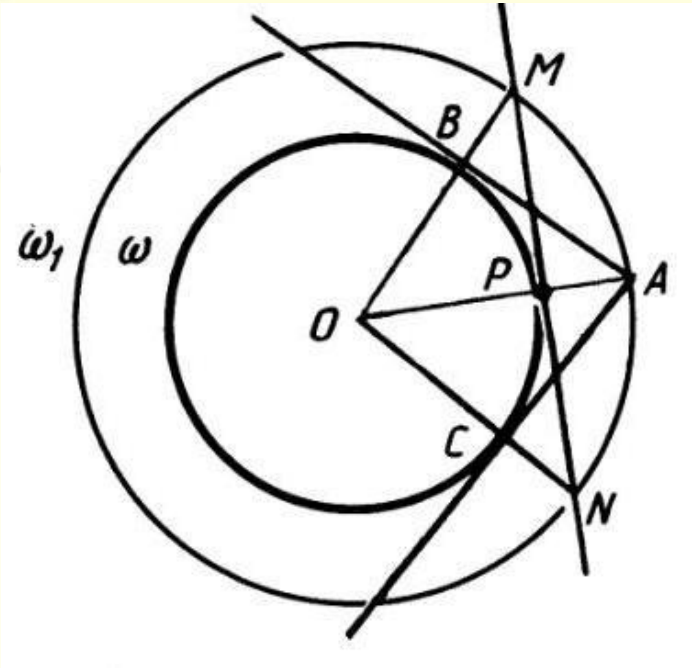
Действительно, точка *B* является серединой основании *OM* равнобедренного треугольника *OAM,* поэтому *AB* — его высота, а значит, ∠*OBA* прямой. Отсюда следует, что *AB* — касательная к окружности ω.

Характерно, что в первых двух способах для построения касательных были предварительно найдены точки касания.

3 способ

Построение касательной к окружности, содержащееся в третьей книге «Начал» Евклида (предложение 17).

Проводим окружность ω_1 *(A, |AO|)* (см. рис.). Строим в точке *P*= ω[*AO*] касательную *t* к окружности ω, пересекающую ω_1 в точках *M* и *N*. Отрезки *OM* и *ON* пересекают ω в точках *B* и *C*; прямые *AB* и *AC* — искомые касательные.



Действительно, треугольники *POM* и *BOA* конгруэнтны, так как у них общий угол при вершине *O*, заключенный между соответственно [конгруэнтными] сторонами (|*OP*| = |*OB*|, |*OM*| = |*OA*|). Но треугольник *OPM* прямоугольный, (∠P = 90°). поэтому ∠B = 90°, и, следовательно, прямая *AB* — касательная к окружности ω.

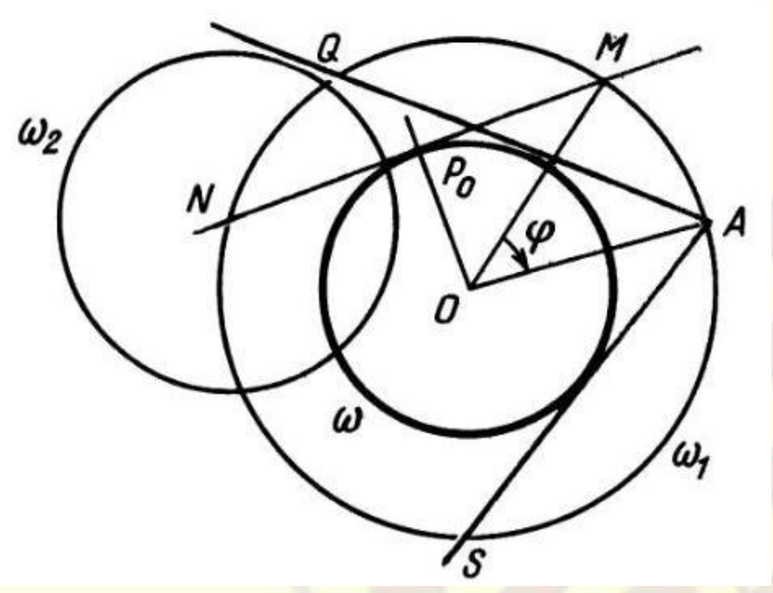
4 способ

Построение касательной к окружности без предварительного построения точек касания.

Проведем окружность ω_1 *(A, |AO|)*. Касательная к окружности ω в произвольной точке $P_0 \in \omega$ пересекает окружность ω_1 в точках *M* и *N* (см. рис.). Поворот , при котором *M* → *A,* отображает точку *N* на точку *Q*. Прямая *AQ* — искомая касательная. Действительно, поворот отображает касательную к ω на касательную к ω *((MN) → (AQ)).*

Чтобы сделать построение, проведем окружность ω_2 *(N, |AM|).* Одна из этих двух точек пересечения ω_2 и ω_1 и есть точка *Q*, а именно та, для которой направленный угол *MOA* равен направленному углу *NOQ.*

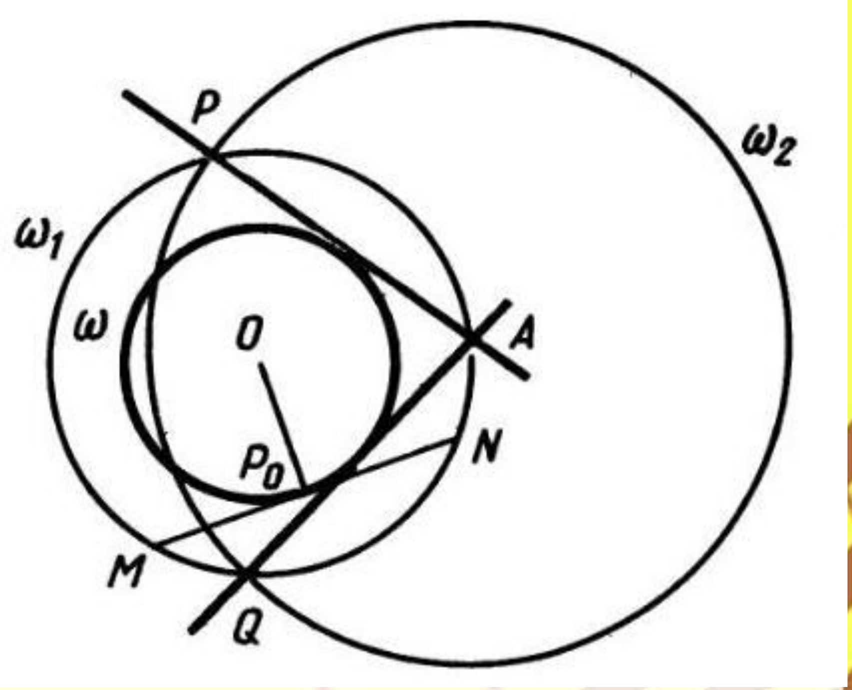
Построение второй касательной к окружности ω сводится к выполнению поворота , при котором точка *N* переходит в точку *A.* В этом случае точка *M* переходит в точку *S* и прямая *AS* — вторая касательная.



5 способ

Следующий способ сводится к использованию свойств хорд окружности, равноудаленных от ее центра,— эти хорды конгруэнтны

Строим последовательно окружность ω_1 (A, $|AO|$), касательную к окружности ω в произвольной точке P_0, пересекающую ω_1 в точках M и N, и окружность ω_2 (A, $|MN|$), пересекающую ω_1 в точках P и Q (см. рис.). Прямые AP и AQ — искомые касательные.



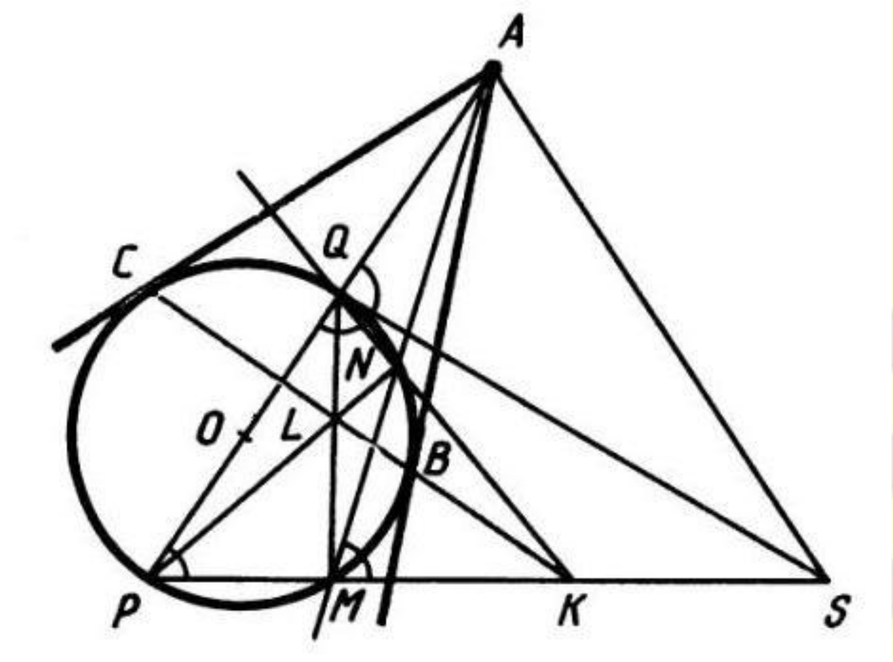
Действительно, хорды AP и AQ конгруэнтны хорде MN, поэтому прямые AP и AQ находятся от центра O на таком же расстоянии R, как и прямая MN. Но в таком случае прямые AP и AQ — касательные к окружности ω.

6 способ

Касательную к окружности в данной на ней точке A можно построить одной линейкой. Также одной линейкой можно построить касательные к окружности, если данная точка A не принадлежит окружности. Эти построения можно выполнить одной линейкой и тогда, когда центр окружности не задан. Рассмотрим случай, когда центр O окружности ω задан, и задана точка A∉ω.

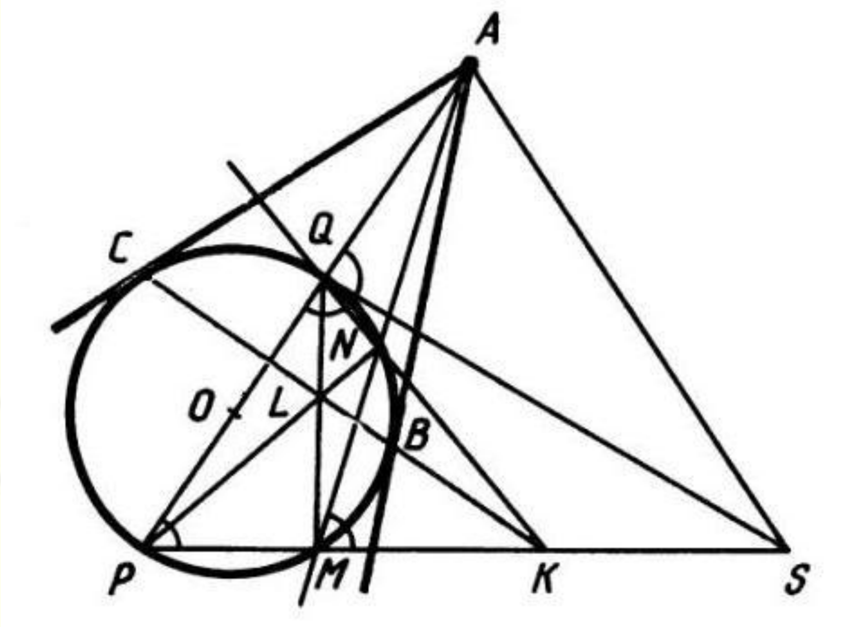
Проведем прямую *OA*, пересекающую окружность ω в точках *P* и *Q* (см. рис.). Далее, через точку *A* проведем произвольную прямую, пересекающую ω в точках *N* и *M*.

Пусть прямые *PM* и *QN* пересекаются в точке *K*, а прямые *PN* и *QM* — в точке *L*. Прямая *KL* пересекает окружность ω в точках *B* и *C*. Прямые *AB и AC* — искомые касательные. Докажем это.



6 способ (продолжение)

Заметим, что прямая *KL* перпендикулярна *PQ*. В самом деле, в треугольнике *PQL* отрезки *PM* и *QN* — высоты, пересекающиеся в точке *К*, поэтому *KL* содержит третью высоту, и, следовательно, *KL* ⊥ *PQ*.



Если $KL \cap PQ = D$, то $|OD|\cdot|OA| = R^2$. Действительно, пусть $\angle DPK = \acute{\alpha}$, $\angle DQK = \beta$. Тогда

$$|PD|:|DQ| = \operatorname{ctg} \acute{\alpha} : \operatorname{ctg} \beta \qquad \textbf{(1)}$$

Построим перпендикуляр к прямой *AP* в точке *A*, пересекающий прямую *PM* в точке *S*. Очевидно, что

$|PA| = |AS|\cdot\operatorname{ctg} \acute{\alpha}$ и $|AQ| = |AS|\cdot\operatorname{ctg}\angle AQS$.

Так как $\angle AQS = \angle AMS = 180° - \angle PMN = \angle PQN = \beta$, то $|AQ| = |AS|\cdot\operatorname{ctg} \beta$. Поэтому

$$|PA|:|AQ| = \operatorname{ctg} \acute{\alpha} : \operatorname{ctg} \beta. \qquad \textbf{(2)}$$

6 способ (продолжение)

Сопоставляя (1) и (2), получаем $|PD|:|PA| = |DQ|:|AQ|$, или

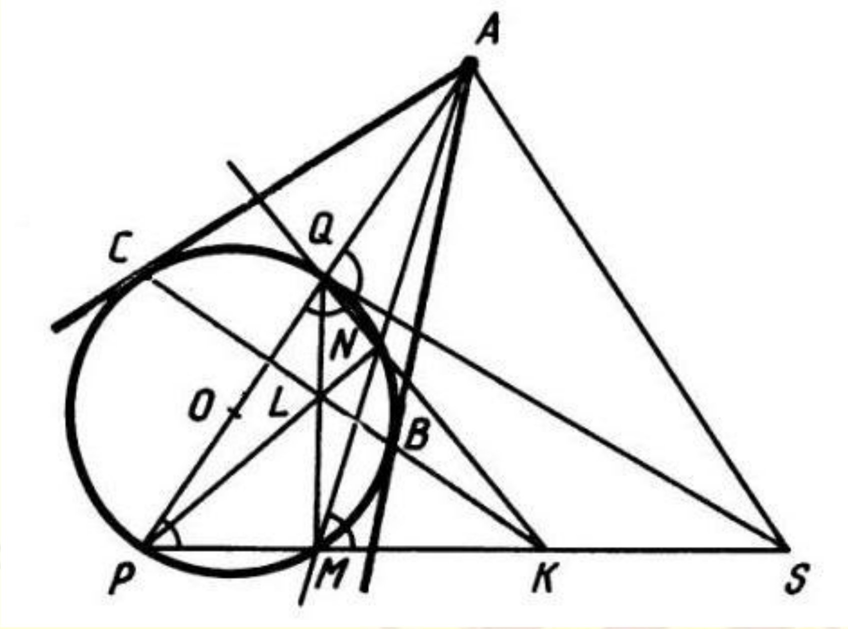
$(|OD| + R)\cdot(|OA| - R) = (R - |OD|)\cdot(|OA| + R)$.

После раскрытия скобок и упрощений находим, что

$$|OD|\cdot|OA| = R^2. \qquad \textbf{(3)}$$

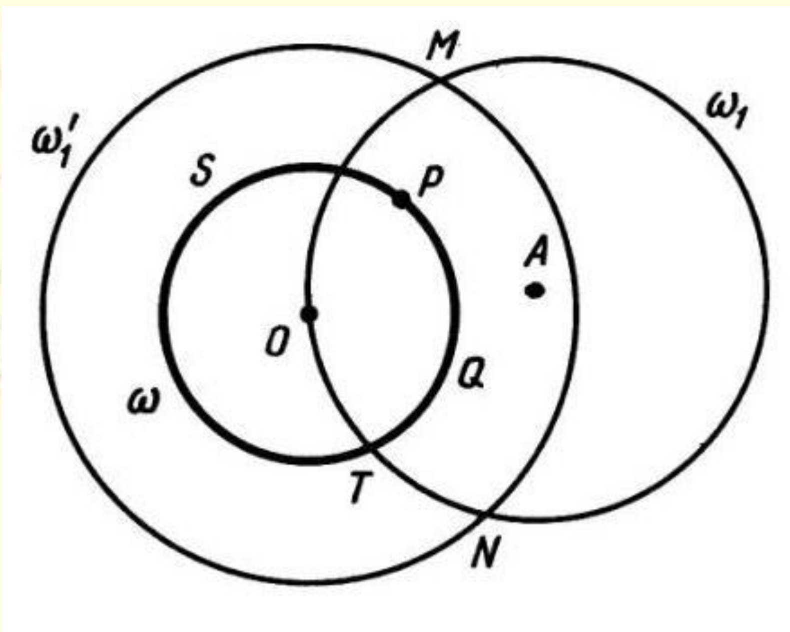
Из соотношения (3) следует, что $|OD|:R = R:|OA|$, т. е. треугольники ODB и OBA подобны. Поскольку $\angle ODB = 90°$, то $\angle OBA = 90°$. Следовательно, прямая AB - искомая касательная.

Предложенное построение выполняется только линейкой. Чтобы построить касательные AB и AC, потребовалось провести 9 прямых: AO, AM, PM, QN, KL, QM, PN, AB, AC.



7 способ

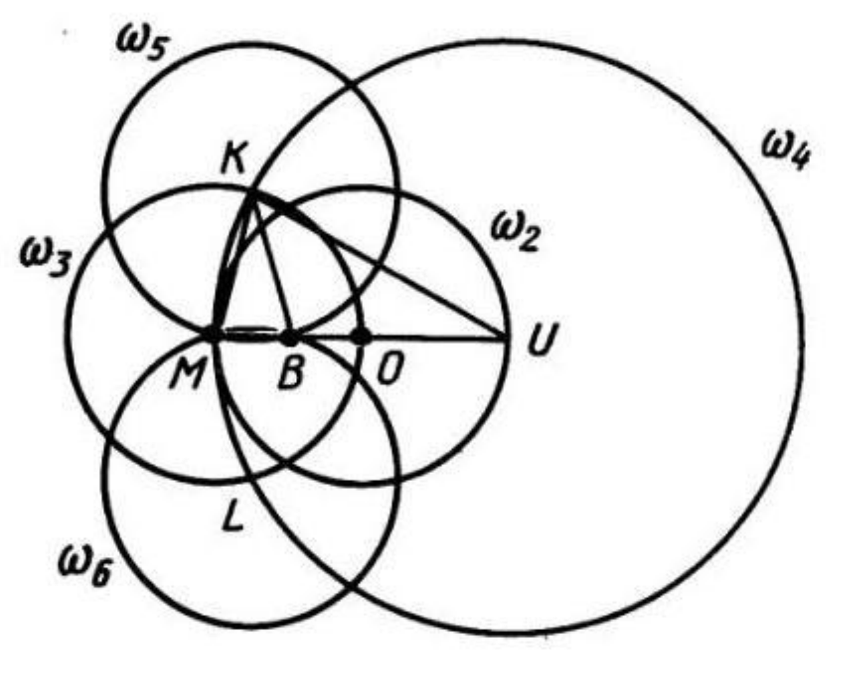
Способ построения касательной только циркулем, т. е. без привлечения линейки построим точки касания B и C по заданным окружности ω (O, R) и точке A∉ω.



Проведем окружность ω_1 (*A*, |*OA*|) см. (рис.). Далее найдем раствор циркуля, равный 2*R*, для чего выберем на окружности ω точку *S* и отложим три дуги, содержащие по 60 дуговых градусов: ∪SP = ∪PQ = ∪QT = 60°. Точки *S* и *T* диаметрально противоположны. Строим окружность (*O*, |*ST*|), пересекающую ω_1 в точках *M* и *N*. Теперь остается одним циркулем построить середину отрезка *MO*.

7 способ (продолжение)

Для этого строим окружности ω_2 (O, $|OM|$) и ω_3 (M, $|MO|$), а затем для точек M и O находим на них диаметрально противоположные точки U и V (см. рис.). Далее строим окружность ω_4 (U, $|UM|$), пересекающую ω_3 в точках K и L. Наконец, строим окружности ω_5 (K, $|KM|$) и ω_6 (L, $|LM|$), пересекающиеся в искомой точке B — середине MOДействительно, треугольники KMB и UMK равнобедренные и подобные. Поэтому из того, что $|KM| = ½\ |MU|$, следует, что $|MB| = ½|MK| = ½\ R$.



Итак, точка B — искомая точка касания. Аналогично находим точку касания C.

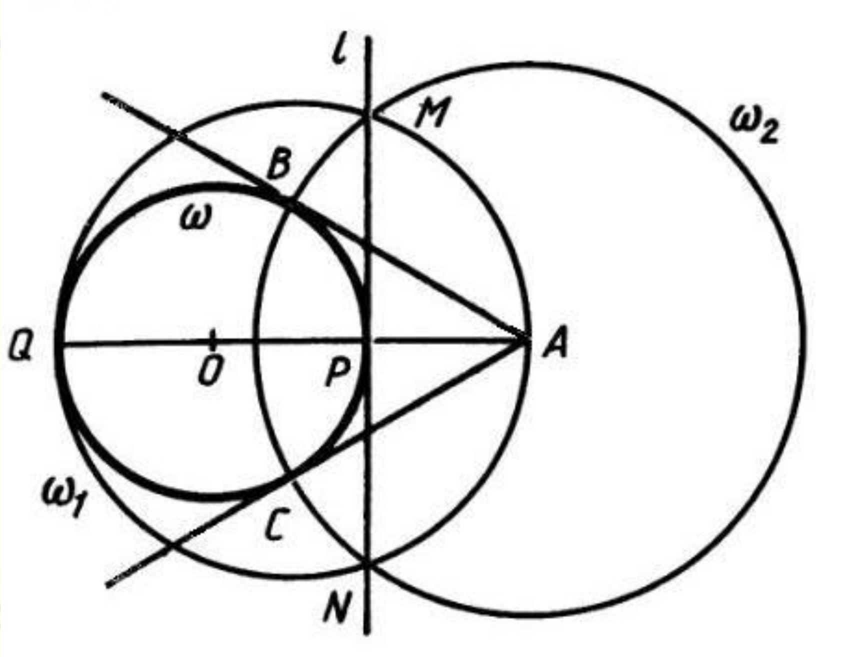
8 способ

Еще одно построение касательной к окружности основано на следующем свойстве отрезков секущей, проведенной к окружности (см. рис.):

$$|AB|^2=|AP|\cdot|AQ|$$

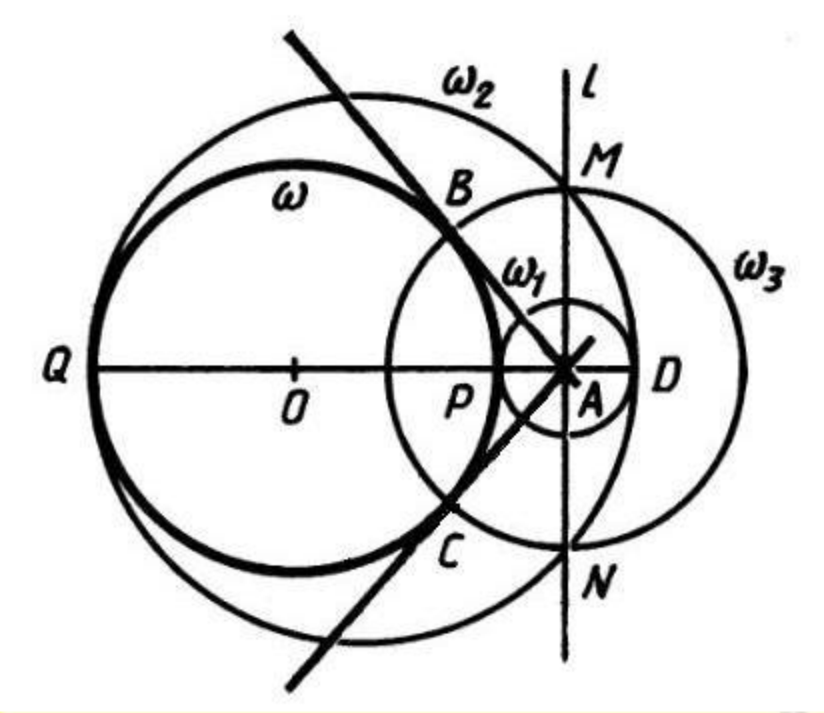
Если на отрезке *AQ* как на диаметре построить окружность ω_1 и пересечь ее касательной *l*, проведенной в точке *P* к ω, то получим точки *M* и *N*.

Очевидно, $|AM|^2=|AP|\cdot|AQ|$. Поэтому окружность ω_2 (*A*, $|AM|$) пересечет ω в точках *B* и *C* касания искомых касательных *AB* и *AC*.



8 способ (продолжение)

Другой вариант построения касательной в данном случае основан на ином способе построения отрезка *AB* по отрезкам *AP* и *AQ* (см. рис.).



Так, строим окружность ω (*A*, |*AP*|), пересекающую (*AP*) в точке *D*, затем строим окружность ω_2 на диаметре *QD* и пересекаем ее перпендикуляром к прямой *AP* в точке *A*. Для полученных точек *M* и *N* имеем:

$|AM|^2=|AN|^2=|AD|\cdot|AQ| = |AP|\cdot|AQ|$,

поэтому окружность ω_3 (*A*, |*AM*|) пересекает ω в искомых точках касания *B* и *C*.

9 способ

Построение касательной можно выполнить просто, если не связывать его непосредственно с данной окружностью $\omega(O, R)$ и данной точкой A. Если

B есть точка касания, то треугольник OAB прямоугольный, причем известно, что $|OB|=R$, $|OA|=d$, $\angle B=90°$. Следовательно, задача сводится к построению прямоугольного треугольника по катету и гипотенузе. Катет AB построенного треугольника позволяет строить окружность ω_1 (A, |AB|), пересекающую ω в искомых точках B и C.

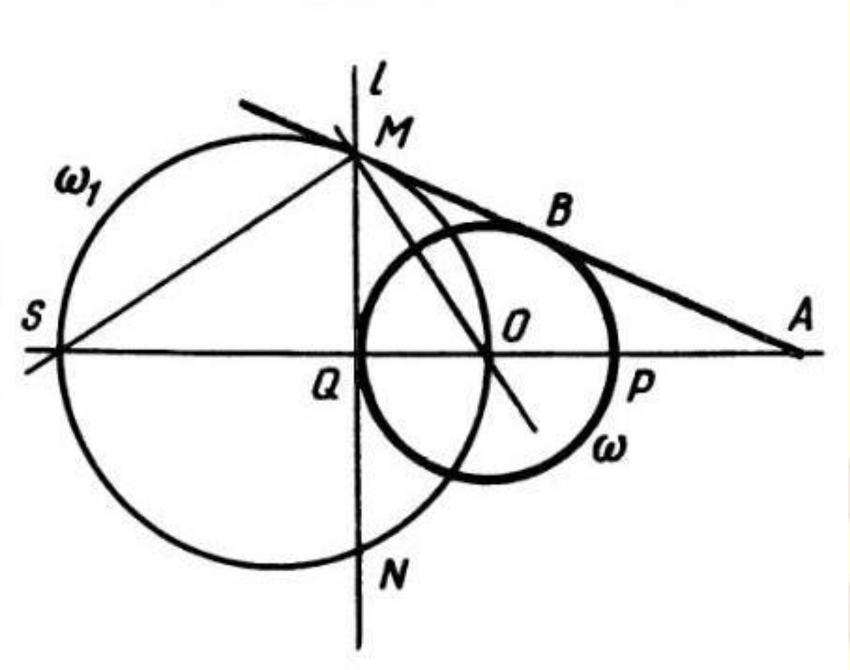
10 способ

Приведем еще одно построение, основанное на свойствах биссектрис треугольника.

Пусть искомая касательная AB пересекает касательную *l* к ω(*O*, *R*) в ее точке *Q* в некоторой точке *M* (см.рис.). Очевидно, [*MO*) — биссектриса угла ∠*QMA*. Биссектриса угла, смежного с ∠*QMA*, пересекает прямую *AP* в точке *S*, для которой

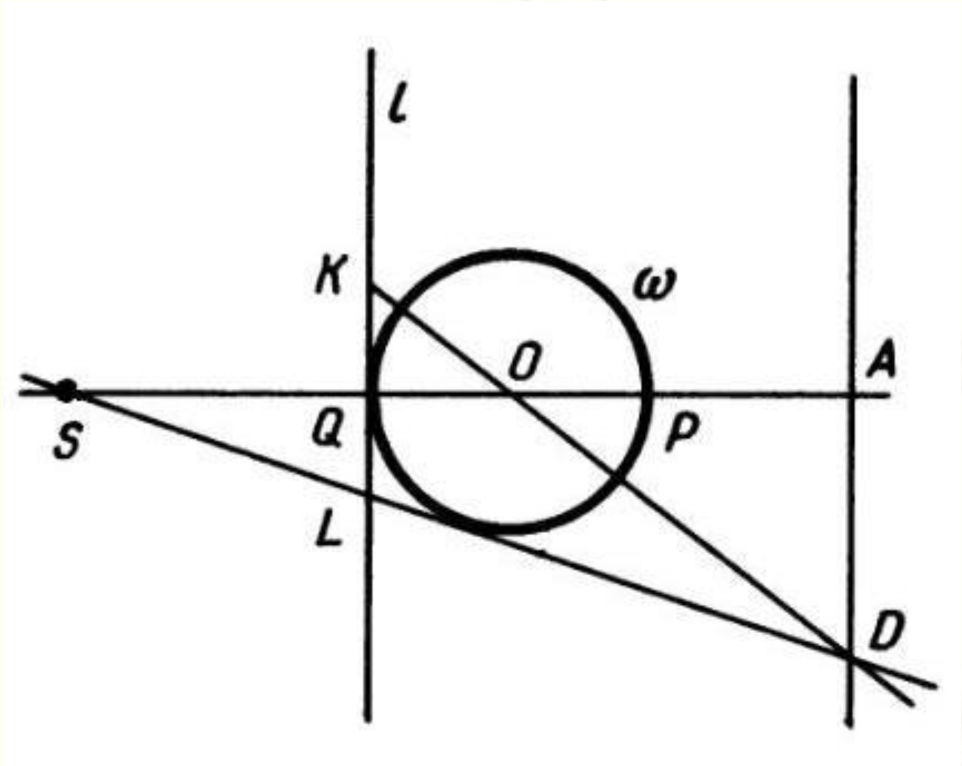
$|QS| : |SA| = |QO| : |OA|.$

Построив точку *S*, можно построить окружность ω_1 на диаметре *OS*. Поскольку ∠*SMO* прямой, то ω_1 пересечет *l* в точках *M* и *N*, таких, что (*AM*) и (*AN*) — искомые касательные.



10 способ (продолжение)

Наиболее простое построение точки *S* такое: откладываем на *l* два конгруэнтных отрезка *QK* и *QL* (рис. 12); находим точку *D* пересечения прямой *KO* с перпендикуляром к прямой *OA* в точке *A*; строим прямую *DL*, пересекающую прямую *OA* в точке *S*.



Спасибо за внимание!

Список использованной литературы

- Скопец З. А. «Геометрические миниатюры» / Сост. Г. Д. Глейзер. – М.: Просвещение, 1990. – 224 с.: ил.

- **Конгруэнтный** — соразмерный, совпадающий, совмещаемый; *матем. о геометрических объектах* — при наложении на другой объект полностью совпадающий с ним соответствующими углами, отрезками и т. п.
- В евклидовой геометрии две фигуры называются **конгруэнтными**, если одна из них может быть переведена в другую сдвигом, вращением и зеркальным отображением.