Задача 1. В кошику знаходяться 4 білі і 7 чорних кульок. Яка ймовірність того, що навмання вийнята кулька виявиться білого кольору?

Розв'язання.

Використовуємо формулу $P(A) = \frac{N(A)}{N}$.

Нехай A — подія, яка означає, що навмання взята кулька білого кольору; таких кульок 4, тому $N(A) = 4$ — число всіх рівноможливих подій, які сприяють події A; число всіх рівноможливих елементарних подій $N = 11$.

Тому $P(A) = \frac{4}{11}$.

Задача 2. Із повного набору пластинок доміно навмання вибирається одна пластинка. Яка ймовірність появи пластинки, сума очок на якій дорівнює шести?

Розв'язання.

Випробування полягає в тому, що виймається одна пластинка з повного набору доміно. Оскільки вона вибрана навмання, то всі результати випробування рівноможливі, причому вони несумісні. В повному наборі доміно 28 пластинок, отже, *N* - 28. Нехай *A* — подія, яка означає, що сума очок на вибраній пластинці дорівнює шести. Події *A* сприяють 4 результати випробування, а саме — поява пластинок, на яких нанесені очки 0-6, 1-5, 2-4, 3 - 3. Отже, $P(A) = \frac{4}{28} = 0,143$.

Задача 3. Яка ймовірність того, що при киданні грального кубика випаде парне число очок?

Розв'язання.

Нехай *A* — подія, яка означає, що при киданні кубика випаде парне число очок. В цьому експерименті ми маємо 6 рівноімовірних результатів: події A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6

Нас цікавить ймовірність події *A*. Цій події сприяють три результати експерименту: A_2, A_4 і A_6

Отже, $N = 6$. $N(A) = 3$, тому шукана ймовірність

$$P(A) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}.$$

Задача 4. Підкинули дві монети. Яка ймовірність того, що на кожній монеті випаде герб?

Розв'язання.

Візьмемо одну монету мідну, одну срібну і позначимо: Г — подія, яка означає, що на обох монетах випав герб; Ц — на обох монетах випала цифра; A_1 — подія, яка означає, що на срібній монеті випав герб, на мідній монеті випала цифра; A_2 — на мідній монеті випав герб, на срібній монеті - цифра. Ці чотири події рівноімовірні. Отже, рівноімовірність результатів експерименту 4, тобто N =4. Нас цікавить ймовірність події Г. Їй сприяє тільки один результат, тобто $N(A)$ =1. Отже, шукана ймовірність $P(Г) = \frac{1}{4}$.

Задача 5. Підкинули два гральних кубики і підрахували суму очок, що випали. Що ймовірніше одержати в сумі: 7 чи 8 ?

Розв'язання.

Нехай *A* - подія, яка означає, що сума очок, які випали, дорівнює семи. Цій події сприяють наступні 6 результатів: 1-6, 2-5, 3-4. 4-3, 5-2 і 6-1, отже, N (А)=6. Число всіх рівноможливих подій $N = 36$, оскільки кожне з 6 очок, які можуть випасти на першому кубику, може бути в парі з будь-яким з 6 очок, які можуть випасти на другому кубику. Тому $P(A) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$. Нехай *B* - подія, яка означає, що сума очок, які випали, дорівнює восьми. Цій події сприяють такі 5 результатів: 2-6, 3-5, 4-4, 5-3, 6 -2. Тобто, $N(B) = 5$. Тому $P(B) = \frac{5}{36}$. Отже, сума очок 7 є більш ймовірною подією, ніж сума очок 8.

Задача 6. В ящику лежать 20 однакових на дотик кульок. З них 12 білих і 8 чорних. Навмання виймають дві кульки. Яка ймовірність того, що обидві кульки білі? Що вони різного кольору?

Розв'язання.

Число всіх рівноможливих подій $N = C_{20}^2$, тобто із 20 кульок вибираємо 2. Нехай *B* - подія, яка означає, що обидві кульки білі. Оскільки білих кульок 12 і серед них нам потрібно вибрати 2 кульки, то $N(B) = C_{12}^2$ - число всіх рівноможливих результатів, які сприяють настанню події *B*. Отже, шукана ймовірність $P(B) = \frac{C_{12}^2}{C_{20}^2} = \frac{12!\,2!\,18!}{2!\,10!\,20!} = \frac{11 \cdot 12}{19 \cdot 20} = \frac{33}{95} \approx 0{,}35.$

Нехай *A* - подія, яка означає, що взяті кульки різного кольору. Цій події сприяють результати, при яких першу кульку можна вийняти 12 способами, а другу - 8 способами, при цьому будь-яка кулька з 12 (біла) може комбінуватись з будь-якою чорною, тобто, використавши правило добутку, отримаємо $N(A) = 12 \cdot 8$. Тому шукана ймовірність:

$$P(A) = \frac{12 \cdot 8}{C_{20}^2} = \frac{12 \cdot 8 \cdot 2!\,18!}{20!} = \frac{12 \cdot 8 \cdot 2}{19 \cdot 20} = \frac{48}{95} \approx 0{,}5.$$

Задача 1. В урні 3 білих та 9 чорних куль. Із урни наугад виймають одну кулю. Яка ймовірність того, що куля окажеться чорною (подія А)?

Розв'язання.

Маємо $m = 9$, $n = 12$,

і тому $P(A) = \frac{9}{12} = \frac{3}{4}$.

Задача 2. В урні 4 білих та 7 чорних куль. Із урни наугад виймають дві кулі. Яка ймовірність того, що обидві кулі окажуться білими (подія А)?

Розв'язання.

Загальна кількість подій:

$$n = C_{11}^{2} = \frac{11 \cdot 10}{1 \cdot 2} = 55$$

Число подій, які сприяють події А:

$$m = C_{4}^{2} = \frac{4 \cdot 3}{1 \cdot 2} = 6$$

Отже, $$P(A) = \frac{6}{55}$$

Задача 3. В урні *a* білих та *b* чорних куль. Із урни наугад виймають *k* куль. Яка ймовірність того, що серед них буде *l* білих, а значить, $k - l$ чорних куль ($l \le a, k - l \le b$) (подія А)?

Розв'язання.

Загальна кількість подій: $n = C_{a+b}^{k}$ Число способів, якими можна вибрати *l* білих куль із а, дорівнює C_a^l.

Число способів, якими можна вибрати *k-l* чорних куль із *b*, дорівнює C_b^{k-l}. Кожна комбінація білих куль може об'єднуватися з кожною комбінацією чорних,

тому $m = C_a^l \cdot C_b^{k-l}$.

Отже, $P(A) = \dfrac{C_a^l C_b^{k-l}}{C_{a+b}^k}$

Задача 4. В урні *30* білих та *40* чорних куль. Із урни наугад виймають *7* куль. Яка ймовірність того, що серед них буде *3* білих, а значить, *7 – 3=4* чорних куль (подія А)?

Розв'язання.

Загальна кількість подій: $n = C_{70}^{7}$. Число способів, якими можна вибрати *3* білих кулі із 30, дорівнює C_{30}^{3}.
Число способів, якими можна вибрати *7-3=4* чорних куль із *40*, дорівнює C_{40}^{4}. Кожна комбінація білих куль може об’єднуватися з кожною комбінацією чорних,
тому $m = C_{30}^{3} \cdot C_{40}^{4}$.

Отже, $P(A) = \dfrac{C_{30}^{3} C_{40}^{4}}{C_{70}^{7}}$

Задача 5. В партії із N деталей знаходиться M бракованих. Наугад виймають n деталей. Знайти ймовірність того, що із n деталей окажеться m бракованих.

Розв'язання.

Загальна кількість подій: $n = C_N^n$. Число способів, якими можна вибрати *m* бракованих із M, дорівнює C_M^m.

Число способів, якими можна вибрати *n-m* стандартних із *N-M*, дорівнює C_{N-M}^{n-m}.

Кожна комбінація стандартних може об’єднуватися з кожною комбінацією бракованих, тому $m = C_M^m \cdot C_{N-M}^{n-m}$.

Отже, $$P(A) = \frac{C_M^m \cdot C_{N-M}^{n-m}}{C_N^n}$$

Задача 6. В партії із 50 деталей знаходиться 7 бракованих. Наугад виймають 5 деталей. Знайти ймовірність того, що із 5 деталей окажеться 2 бракованих.

Розв'язання.

Загальна кількість подій: $n = C_{50}^{5}$. Число способів, якими можна вибрати *2* бракованих із 7, дорівнює C_7^2.

Число способів, якими можна вибрати *5-2=3* стандартних із *50 -7=43*, дорівнює C_{43}^{3}.

Кожна комбінація стандартних може об’єднуватися з кожною комбінацією бракованих, тому $m = C_7^2 \cdot C_{43}^{3}$.

Отже, $$P(A) = \frac{C_7^2 \cdot C_{43}^{3}}{C_{50}^{5}}$$

Задача 7. В партії із 70 деталей знаходиться 8 бракованих. Наугад виймають 6 деталей. Знайти ймовірність того, що із 6 деталей окажеться 2 бракованих.

Розв'язання.

Загальна кількість подій: $n = C_{70}^{6}$. Число способів, якими можна вибрати *2* бракованих із 8, дорівнює C_8^2 .

Число способів, якими можна вибрати *6 – 2 = 4* стандартних із *80 – 8=72*, дорівнює C_{72}^{4}.

Кожна комбінація стандартних може об’єднуватися з кожною комбінацією бракованих, тому $m = C_8^2 \cdot C_{72}^4$.

Отже, $$P(A) = \frac{C_8^2 \cdot C_{72}^4}{C_{70}^6}$$

Задача 8. Десять різних книг розставляються наугад на одній полці. Знайти ймовірність того, що три задані книги окажуться поставленими поруч.

Розв'язання.

$$P(A) = \frac{P_8 \cdot P_3}{P_{10}} = \frac{8!3!}{10!} = \frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7\cdot 8\cdot 1\cdot 2\cdot 3}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7\cdot 8\cdot 9\cdot 10} = \frac{1}{15}$$

Задача 9. В середині еліпса $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$ розташовано коло $x^2+y^2=9$. Знайти ймовірність попадання у кільце, обмежене еліпсом та колом.

Розв'язання.

Нехай подія А – попадання точки у кільце.

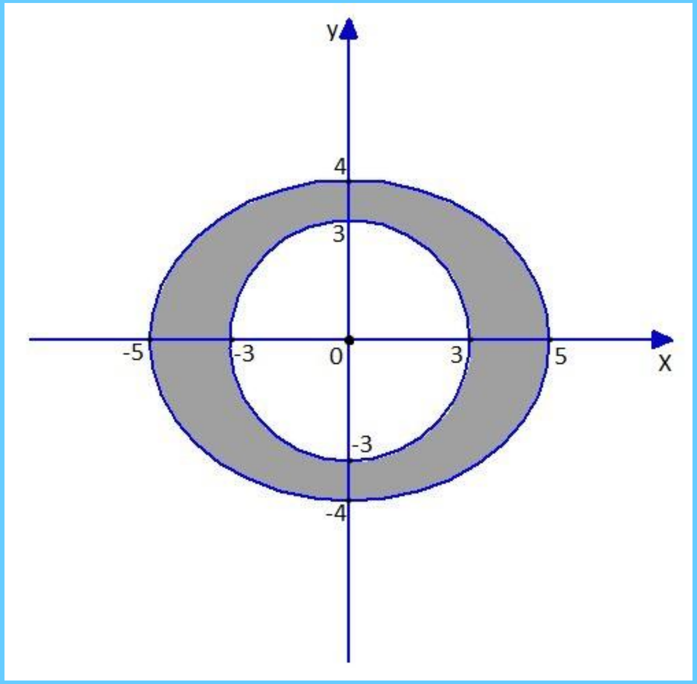
Тоді $P(A)=\frac{S_{кільца}}{S_{еліпса}}$, де $S_{кільца}=S_{еліпса}-S_{кола}=\pi ab-\pi r^2$

$$S_{еліпса}=\pi ab=\pi\cdot 5\cdot 4=20\pi$$

$$S_{кола}=\pi r^2=\pi\cdot 3^2=9\pi$$

$$S_{кільця}=20\pi-9\pi=11\pi$$

$$P(A)=\frac{S_{кільца}}{S_{еліпса}}=\frac{11\pi}{20\pi}=\frac{11}{20}=0,55$$



Задача 10. В урні 20 куль з номерами від 1 до 20. Яка ймовірність винуті шар з номером 37?

Розв'язання.

Маємо $m = 0$, $n = 20$, і тому $$P(A) = \frac{m}{n} = \frac{0}{20} = 0\cdot$$

Задача 11. В лотереї 2000 білетів. На один білет випадає виграш 100 грн., на 4 білети – виграш по 50 грн., на 10 білетів – виграш по 20 грн., на 20 білетів – виграш по 10 грн., на 165 білетів – виграш по 5 грн., на 400 білетів – виграш по 1 грн. Решта білетів без виграшні. Яка ймовірність витратити по білету не менше 10грн.

1 білет – 100 грн.

4 білета – по 50 грн.

10 білетів – по 20 грн.

20 білетів – по 10 грн.

165 білетів – по 5 грн.

400 білетів – по 1 грн.

Розв'язання.

$m = 1 + 5 + 10 + 20 = 35$ (біл.)

$n = 2000$

$$P(A) = \frac{m}{n} = \frac{35}{2000} = 0,0175$$

Задача 12. В середині кола $x^2 + y^2 = 25$ розташовано еліпс $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$. Знайти ймовірність попадання у кільце, обмежене колом та еліпсом та колом.

Розв'язання.

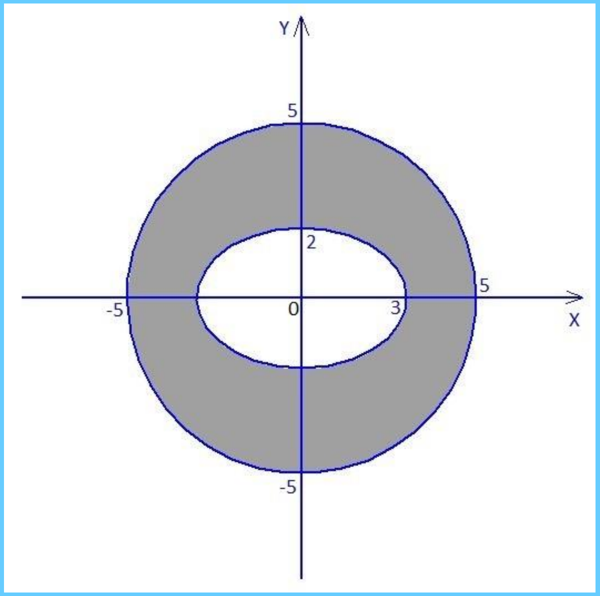
Тоді $P(A) = \frac{S_{кільца}}{S_{коло}}$, де $S_{кільца} = S_{еліпса} - S_{кола} = \pi ab - \pi r^2$

$$S_{еліпса} = \pi ab = \pi \cdot 3 \cdot 4 = 12\pi$$

$$S_{кола} = \pi r^2 = \pi \cdot 5^2 = 25\pi$$

$$S_{кільця} = 25\pi - 12\pi = 13\pi$$

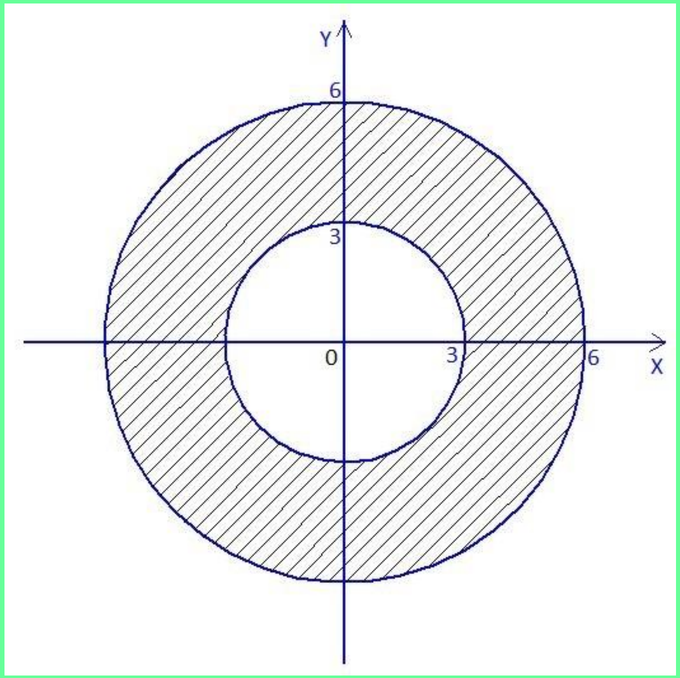
$$P(A) = \frac{S_{кільца}}{S_{коло}} = \frac{13\pi}{25\pi} = \frac{13}{25} = 0,52$$



Задача 13. В середині коло $x^2 + y^2 = 36$ розташовано коло $x^2 + y^2 = 9$. Знайти ймовірність попадання у кільце, обмежене колами.

Розв'язання.

Тоді $P(A) = \dfrac{S_{кільца}}{S_{1коло}}$, де



$$S_{1\,кола} = \pi r^2 = \pi \cdot 6^2 = 36\pi$$

$$S_{2кола} = \pi r^2 = \pi \cdot 3^2 = 9\pi$$

$$S_{кільця} = 36\pi - 9\pi = 27\pi$$

$$P(A) = \frac{S_{кільца}}{S_{1коло}} = \frac{27\pi}{36\pi} = \frac{27}{36} = \frac{3}{4} = 0,75$$

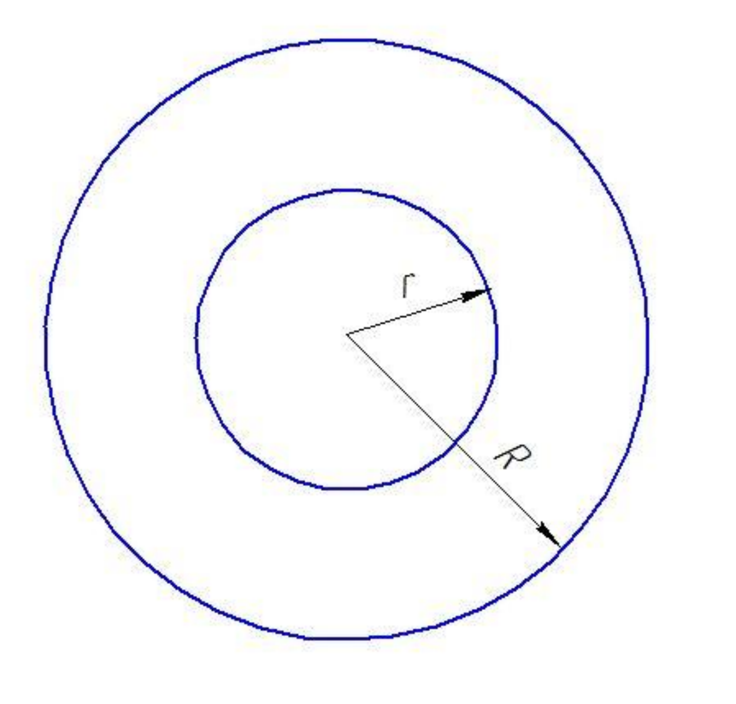
Задача 14. У кола радіуса R кидають точку. Знайти ймовірність того, що відстань від цієї точки до центра кола не перевищує r.

Розв'язання.

$$S_{1кола} = \pi R^2$$

$$S_{2кола} = \pi r^2$$

$$P(A) = \frac{S_{2кола}}{S_{1кола}} = \frac{\pi r^2}{\pi R^2} = \frac{r^2}{R^2}$$



Задача 15. Знайти ймовірність попадання точки у заштриховану область.

Розв'язання.

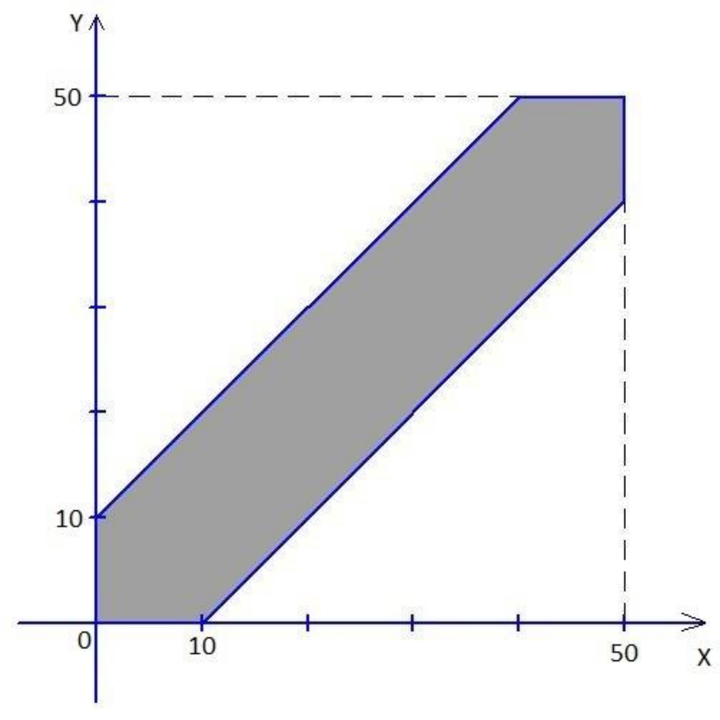
$$S_{квадрата} = 50^2 = 2500$$

$$S_{\Delta} = \frac{1}{2} 40 \cdot 40 = \frac{1}{2} \cdot 1600 = 800$$

$$2S_{\Delta} = 2 \cdot 800 = 1600$$

$$S_{замал.ф.} = S_{\square} - 2S_{\Delta} = 2500 - 1600 = 900$$

$$P(A) = \frac{S_{замал.ф.}}{S_{\square}} = \frac{900}{2500} = \frac{9}{25} \approx 0,36$$



Задача 16. Знайти ймовірність попадання точки у заштриховану область.

Розв'язання.

$$P(A)=\frac{S_{1\triangle}}{S_{4\triangle}}=\frac{1}{4}\approx 0,25$$