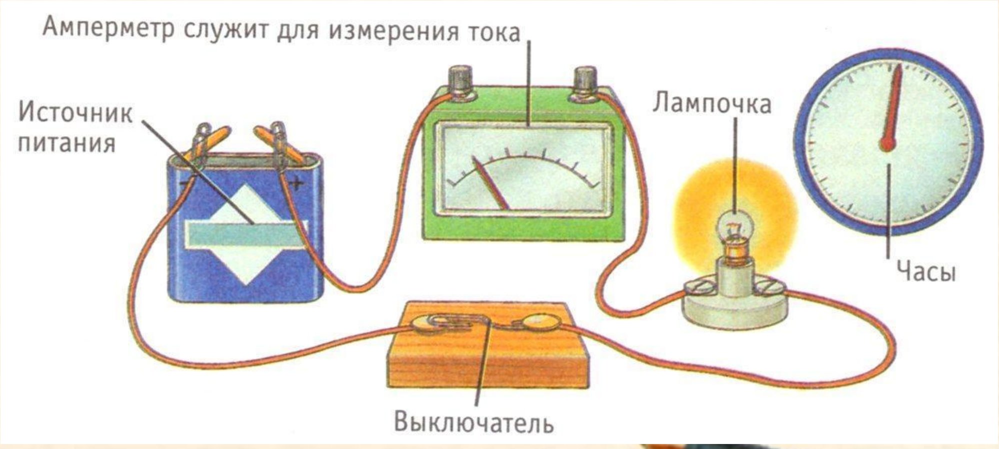
Математика –
это язык,
на котором говорят все
точные науки.
Н.И. Лобачевский

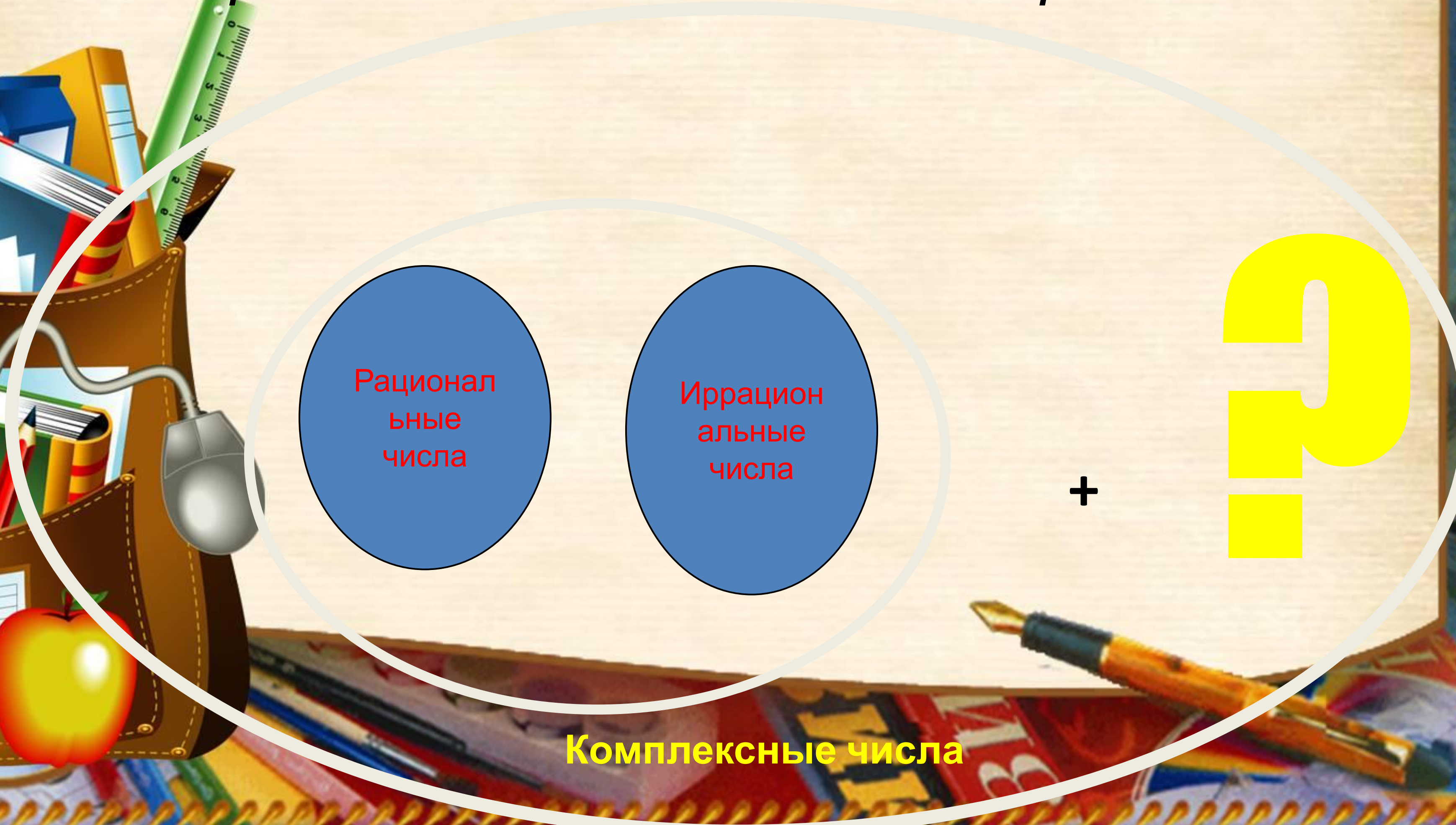
Комплексные числа.



Понятие комплексного числа.

$$a \cdot x^2 + b \cdot x + c = 0$$

При D<0 действительных корней нет



Комплексные числа

$X^2=-1$

$x=i$ *-корень уравнения*

i- комплексное число, такое , что

$i^2=-1$

a + b· ***i***

ЗАПИСЬ КОМПЛЕКСНОГО ЧИСЛА В АЛГЕБРАИЧЕСКОЙ ФОРМЕ

$$a + b \cdot i$$

a и b – действительные числа

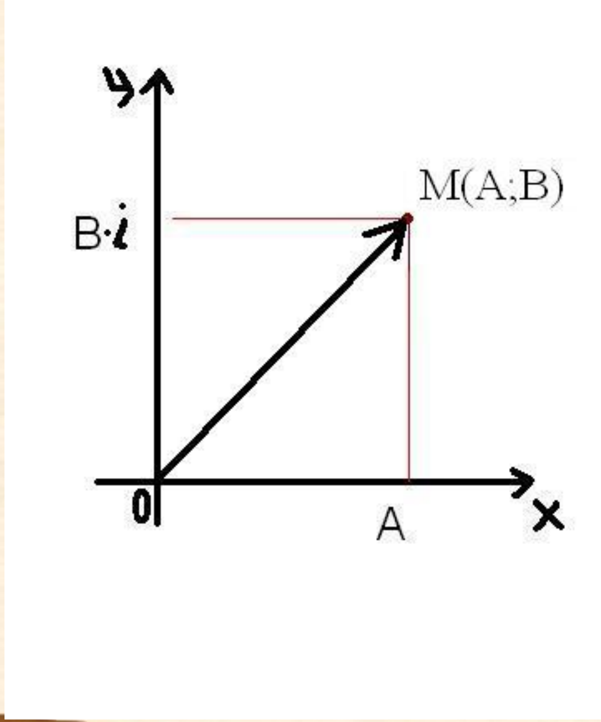
i- некоторый символ , *такой, что* $i^2 = -1$

a – действительная часть

b – мнимая часть

i – мнимая единица

Геометрическая интерпритация комплексного числа



Комплексно сопряженные числа:

$z=a+bi$ и $z=a-bi$

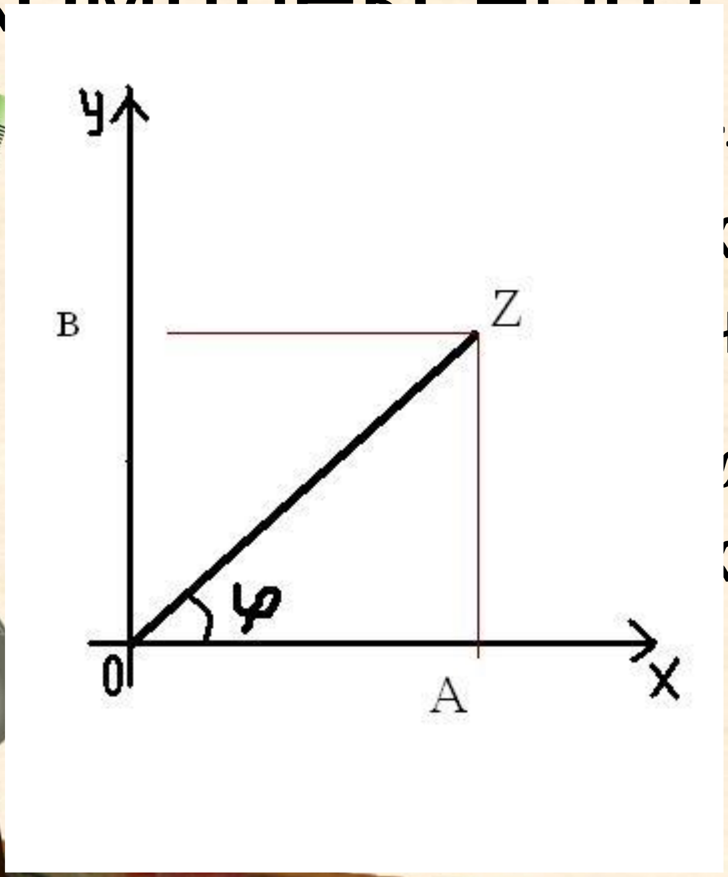
Модуль комплексного числа:

$$|z| = |a + bi| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

Сложение, вычитание, умножение комплексных чисел в алгебраической форме производят по правилам соответствующих действий над многочленами.

При делении комплексных чисел числитель и знаменатель дроби умножают на число сопряженное знаменателю

Тригонометрическая форма комплексного числа



- модуль комплексного числа.

φ - аргумент комплексного числа

$Z = r \cos \varphi + i\, r \sin \varphi$

$Z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$

Модулем комплексного числа называется расстояние от начала координат до соответствующей точки комплексной плоскости. Попросту говоря, модуль – это длина радиус-вектора.

Аргументом комплексного числа называется угол между положительной полуосью действительной оси и радиус-вектором, проведенным из начала координат к соответствующей точке .

$$\cos\varphi = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} = \frac{a}{r}$$

$$\sin\varphi = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} = \frac{b}{r}$$

$$tg\varphi = \frac{b}{a}$$

Свойство умножения:

Произведение двух комплексных чисел

$$z_1 = r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)$$

и

$$z_2 = r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)$$

в тригонометрической форме будет комплексное число вида

$$z_1.z_2 = r_1 \cdot r_2(\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2))$$

Свойство деления:

Частное двух комплексных чисел

$$z_1 = r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)$$

и

$$z_2 = r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)$$

в тригонометрической форме будет комплексное число вида

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}(\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 - \varphi_2))$$

Свойство возведения в степень:

Степен $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ числа

в тригонометрической форме будет комплексное число вида

$$z^n = \left(r(\cos\varphi + i\sin\varphi)\right)^n$$
$$= r^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi)$$

Свойство извлечения корня:

Корень из комплексного числа

$$z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$$

в тригонометрической форме будет комплексное число вида

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{\left(r(\cos\varphi + i\sin\varphi)\right)} = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi + 2\pi k}{n} + i\sin\frac{\varphi + 2\pi k}{n}\right)$$

где $k = 0,1,2, \dots, n-1$

Показательная форма комплексного числа

$$z = r \cdot e^{i\varphi}$$

r- модуль комплексного числа.

φ - аргумент комплексного числа

Свойство умножения:

Произведение двух комплексных чисел

$$z_1 = r_1 \cdot e^{i\varphi_1}$$

и

$$z_2 = r_2 \cdot e^{i\varphi_2}$$

в показательной форме

будет комплексное число вида

$$z_1 \cdot z_2 = r_1 \cdot r_2 e^{i(\varphi_1 + \varphi_2)}$$

Свойство деления:

Частное двух комплексных чисел

$$z_1 = r_1 \cdot e^{i\varphi_1}$$

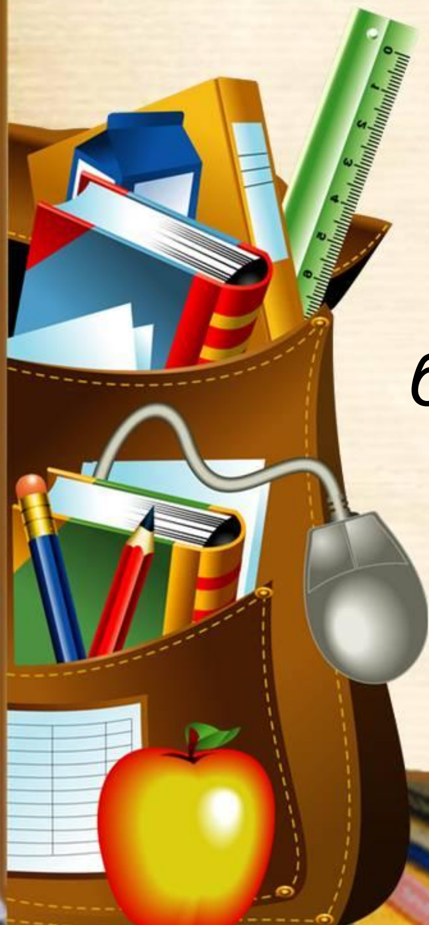
и

$$z_2 = r_2 \cdot e^{i\varphi_2}$$

в показательной форме

будет комплексное число вида

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} \cdot e^{i(\varphi_1 - \varphi_2)}$$



Свойство возведения в степень:

Степень к$z = r \cdot e^{i\varphi}$ного числа

в показательной форме
будет комплексное число вида

$$z^n = \left(re^{i\varphi}\right)^n = r^n e^{i\varphi n}$$

Свойство извлечения корня:

Корень из комплексного числа

$$z = r \cdot e^{i\varphi}$$

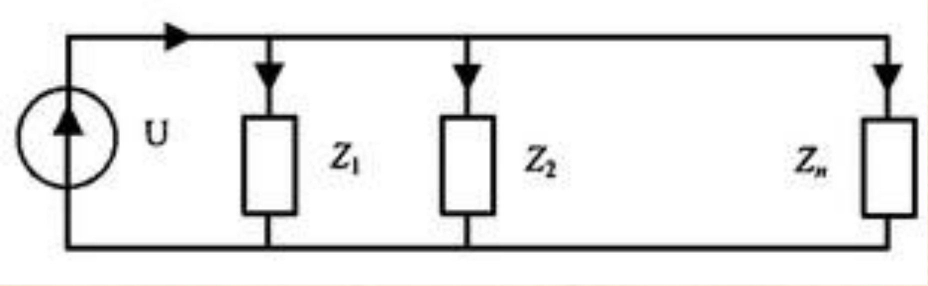
в тригонометрической форме будет комплексное число вида

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{(re^{i\varphi})} = \sqrt[n]{r} \cdot e^{\frac{\varphi + 2\pi k}{n} \cdot i}$$

где $k = 0,1,2,\dots,n-1$

Применение комплексных чисел.

Сегодня сложно представить себе ряд наук без применения комплексных чисел. Теория электротехники, электромеханики, радиотехники, самолетостроения и других наук невозможна без применения моделей в виде комплексных чисел.



Пример 1. Определить сумму С чисел *A=2+3j* и *B=5+j6.*

Пример 2. Определить сумму С чисел *A=2+j3* и *B=7+j9.*

Пример 3. Определить разность С чисел *A=80+j90* и *B=50-j30.*

$A = 10 \cdot e^{j45^\circ}$

$B = 6 \cdot e^{-j30^\circ}$ пределить сумму С чисел и

$A = 15 \cdot e^{j40^\circ}$

Пример 5.Определить произведение комплексов
и B=5.

$A = 30 \cdot e^{j20^\circ}$

Пр $B = e^{-j15^\circ}$ пределить произведение комплексов
и .

$A = 40 \cdot e^{j10^\circ}$

Пр $B = 5 \cdot e^{j25^\circ}$ ределить произведение комплексов
и .

$A = 70 \cdot e^{j30^\circ}$

Пр $B = 0,5 \cdot e^{-j10^\circ}$ елить произведение комплексов
и .

Пример 1. Определить частное С от деления комплекса

$A = 80 \cdot e^{j40^\circ}$ на $B = 4$.

Пример 2. Определить частное С от деления комплекса

$A = 60 \cdot e^{j70^\circ}$ на e^{j30°.

Пример 3. Определить частное С от деления комплекса

$A = 60 \cdot e^{j30^\circ}$ на $B = 2{,}5e^{j50^\circ}$.

Пример 4. Определить частное С от деления комплекса

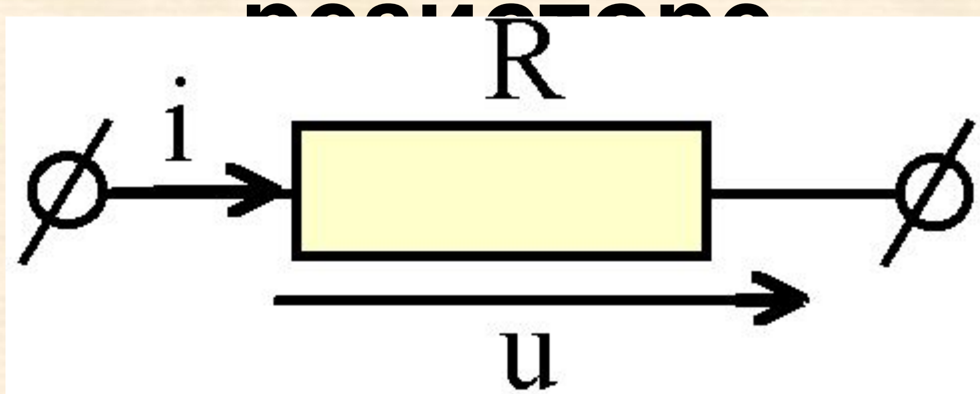
$A = 2 + j4$ и $B = 0{,}8 + 0{,}4j$

ЗАКОН ОМА В КОМПЛЕКСНОЙ ФОРМЕ

Закон Ома в комплексной форме основан на символическом методе и справедлив для линейных цепей с гармоническими напряжениями и токами.

Этот закон следует из физической взаимосвязи между током и напряжением отдельных элементов цепи

Синусоидальный ток в резисторе



$$i = \sqrt{2}\,\mathrm{I}\sin(\omega t + \varphi)$$

$$u = \sqrt{2}U\sin(\omega t + \varphi)$$

$$p = I^2R(1 - cos^2(\omega t + \varphi))$$

$$i = \frac{U}{z}$$

Где i и u – мгновенные значения силы тока и напряжения.

p - мгновенная мощность.

$$z = r + jx_L$$

$$z = r - jx_C$$

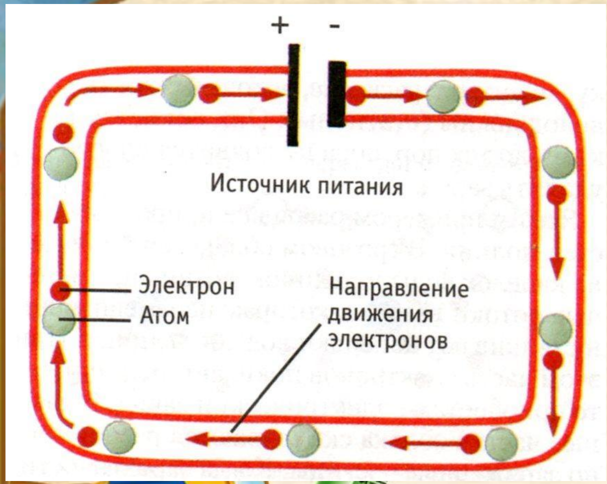
z –комплексное сопротивление,

r - активное сопротивление,

x_L - индуктивное сопротивление

x_C - комплексное сопротивление

j - мнимая единица,



$$\tilde{S} = P + jQ$$

$\tilde{S}$ –мощность в комплексной форме,

P - активная мощность,

Q- реактивная мощность

j - мнимая единица

Пример: Неразветвленная цепь с активным сопротивлением r=3,2 Ом и индуктивным x_L =2,4Ом и находится под напряжением $u = 183\sin(\omega t - 62^\circ)$ Определить ток в цепи.

Комплексное сопротивление

$z = r + jx_L$ = 3,2+ j 2,4

Модуль и аргумент комплексного сопротивления

$$z = \sqrt{r^2 + x_L{}^2} = \sqrt{3.2^2 + 2{,}4^2} = 4\ \text{Ом}$$

$$tg\,\varphi = \frac{x_L}{r} = \frac{2{,}4}{3{,}2} = 0{,}75\ \text{Ом} \qquad \varphi = 37^\circ$$

То же сопротивление в показательной форме

$$Z = ze^{j\varphi} = 4e^{j37^\circ}\ \text{Ом}$$

$$U = \frac{183}{\sqrt{2}}e^{j62^\circ} = 130e^{j62^\circ}\ \text{В}$$

$$I = \frac{U}{Z} = \frac{130e^{j62^\circ}}{4e^{j37^\circ}} = 32{,}5e^{j25^\circ}\ A$$

$$i = 32.5\sqrt{2}\,\mathrm{I}\sin(\omega t + 25^\circ)$$

Пример: Неразветвленная цепь с активным сопротивлением r=80 Ом и емкостны x_C =60 Ом и находится под напряжением $u = 183\sin(\omega t + 25^\circ)$ Определить ток в цепи.

Комплексное сопротивление

$$z = r - jx_C = 80 - j60 \text{ Ом}$$

Модуль и аргумент этого сопротивления

$$z = \sqrt{r^2 + x_C{}^2} = \sqrt{80^2 + 60^2} = 100 \text{ Ом}$$

$$\mathrm{tg}\,\varphi = -\frac{x_C}{r} = -\frac{60}{80} = -0{,}75 \text{ Ом} \qquad \varphi = -37^\circ$$

То же сопротивление в показательной форме

$$Z = ze^{j\varphi} = 100e^{-j37^\circ} \text{ Ом}$$

То

$$I = \frac{U}{z} = \frac{130e^{j25^\circ}}{100e^{-j37^\circ}} = 1{,}3e^{j62^\circ} A$$

$$i = 1{,}3\sqrt{2}\,\mathrm{I}\sin(\omega t + 62^\circ)$$

Пример: Определить активную и реактивную мощности цепи, если напряжение $U = 220e^{j62^\circ}$, т$I = 10e^{j25^\circ}$

$$UI = 220e^{j62^\circ} \cdot 10e^{j25^\circ} = 2200e^{j37^\circ} =$$

$$= 2200\cos 37^\circ + j\,2200\sin 37^\circ =$$

$$= 220 \cdot 0{,}8 + j2200 \cdot 0{,}6 = 1760 + j1320\ BA$$

$$P = 1{,}760\ \text{кВт}$$

$$Q = 1{,}320$$