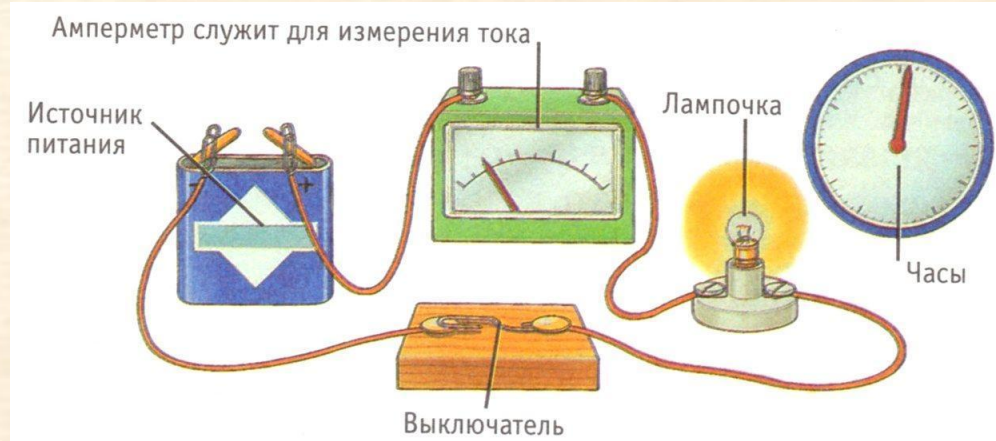


**Математика –
это язык,
на котором говорят все
точные науки.
Н.И. Лобачевский**



Комплексные числа.



Понятие комплексного числа.

$$a \cdot x^2 + b \cdot x + c = 0$$

При $D < 0$ действительных корней нет

Рационал
ные
числа

Иррацион
альные
числа

+

CR

Комплексные числа

Комплексные числа

$$x^2 = -1$$

$x = i$ - корень уравнения

i - комплексное число, такое, что

$$i^2 = -1$$

$$a + b \cdot i$$

ЗАПИСЬ КОМПЛЕКСНОГО ЧИСЛА В
АЛГЕБРАИЧЕСКОЙ ФОРМЕ

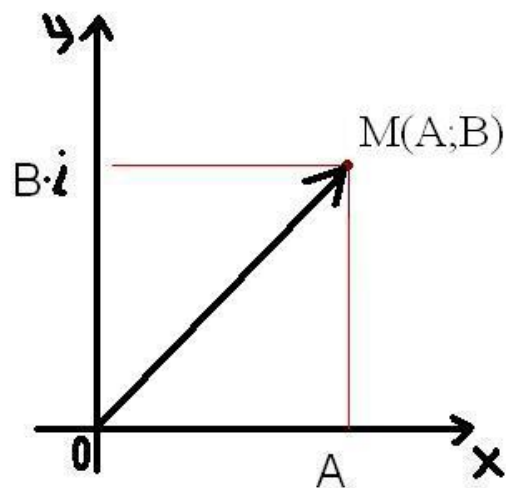


$$a + b \cdot i$$

a и b – действительные числа
 i – некоторый символ, такой, что $i^2 = -1$
 a – действительная часть
 b – мнимая часть
 i – мнимая единица



Геометрическая интерпретация комплексного числа



Комплексно сопряженные числа:

$$z=a+bi \text{ и } z=a-bi$$

Модуль комплексного числа:

$$|z| = |a + b i| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

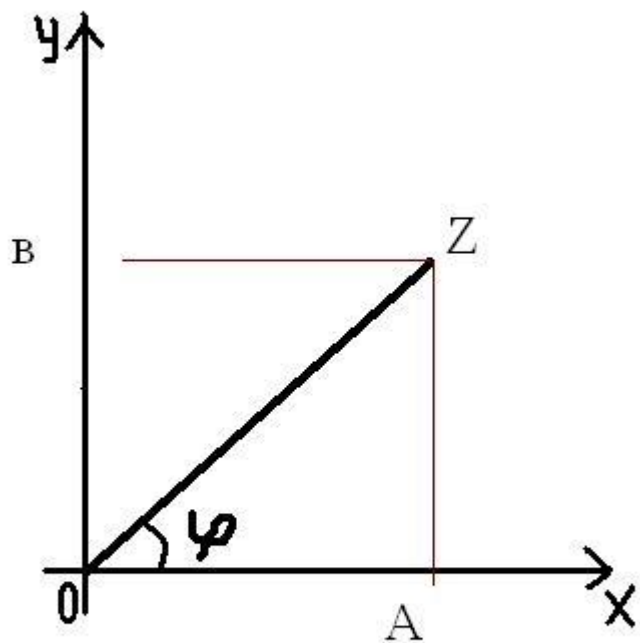


Сложение, вычитание, умножение комплексных чисел в алгебраической форме производят по правилам соответствующих действий над многочленами.

При делении комплексных чисел числитель и знаменатель дроби умножают на число сопряженное знаменателю



Тригонометрическая форма комплексного числа



r - модуль
комплексного
числа.

φ - аргумент
комплексного числа

$$Z = r \cos \varphi + i r \sin \varphi$$

$$Z = r (\cos \varphi + i \sin \varphi)$$



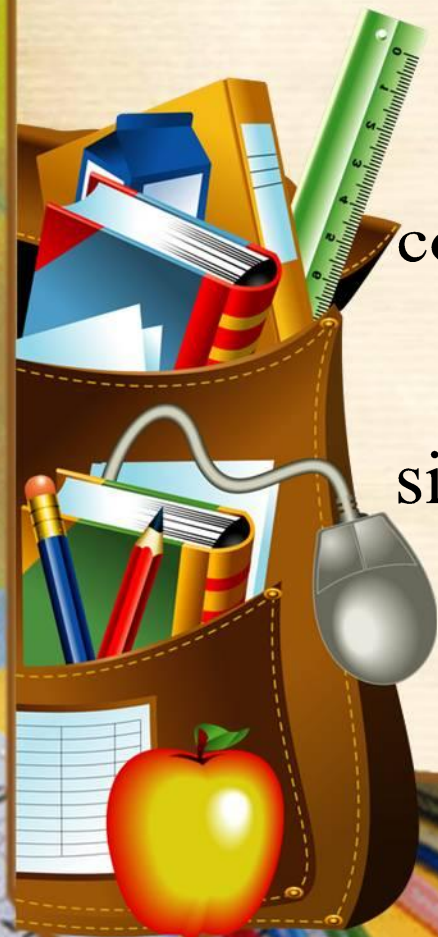
Модулем комплексного числа называется расстояние от начала координат до соответствующей точки комплексной плоскости. Попросту говоря, модуль – это длина радиус-вектора.

Аргументом комплексного числа называется угол между положительной полуосью действительной оси и радиус-вектором, проведенным из начала координат к соответствующей точке .

$$\cos \varphi = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{a}{r}$$

$$\sin \varphi = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{b}{r}$$

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{b}{a}$$



Свойство умножения:

Произведение двух комплексных чисел

$$z_1 = r_1 (\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1)$$

и

$$z_2 = r_2 (\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2)$$

в тригонометрической форме
будет комплексное число вида

$$z_1 \cdot z_2 = r_1 \cdot r_2 (\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 + \varphi_2))$$



Свойство деления:

Частное двух комплексных чисел

$$z_1 = r_1 (\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1)$$

и

$$z_2 = r_2 (\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2)$$

в тригонометрической форме
будет комплексное число вида

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} (\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 - \varphi_2))$$



Свойство возведения в степень:

Степень $z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$ числа

в тригонометрической форме
будет комплексное число вида

$$z^n = (r(\cos \varphi + i \sin \varphi))^n \\ = r^n(\cos n\varphi + i \sin n\varphi)$$



Свойство извлечения корня:

Корень из комплексного числа

$$z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$$

в тригонометрической форме
будет комплексное число вида

$$\begin{aligned} \sqrt[n]{z} &= \sqrt[n]{r(\cos \varphi + i \sin \varphi)} \\ &= \sqrt[n]{r} \left(\cos \frac{\varphi + 2\pi k}{n} + i \sin \frac{\varphi + 2\pi k}{n} \right) \end{aligned}$$

где $k = 0, 1, 2, \dots, n - 1$



Показательная форма комплексного числа

$$z = r \cdot e^{i\varphi}$$

r - модуль комплексного
числа.

φ - аргумент комплексного
числа



Свойство умножения:

Произведение двух комплексных чисел

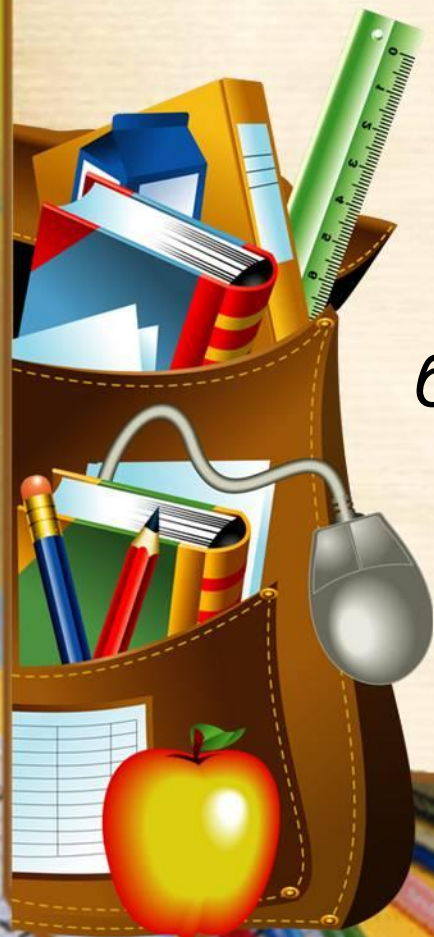
$$z_1 = r_1 \cdot e^{i\varphi_1}$$

и

$$z_2 = r_2 \cdot e^{i\varphi_2}$$

в показательной форме
будет комплексное число вида

$$z_1 \cdot z_2 = r_1 \cdot r_2 e^{i(\varphi_1 + \varphi_2)}$$



Свойство деления:

Частное двух комплексных чисел

$$z_1 = r_1 \cdot e^{i\varphi_1}$$

и

$$z_2 = r_2 \cdot e^{i\varphi_2}$$

в показательной форме
будет комплексное число вида

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} \cdot e^{i(\varphi_1 - \varphi_2)}$$



Свойство возведения в степень:

Степень $z = r \cdot e^{i\varphi}$ -го числа

в показательной форме
будет комплексное число вида

$$z^n = (r e^{i\varphi})^n = r^n e^{i\varphi n}$$



Свойство извлечения корня:

Корень из комплексного числа

$$z = r \cdot e^{i\varphi}$$

в тригонометрической форме
будет комплексное число вида

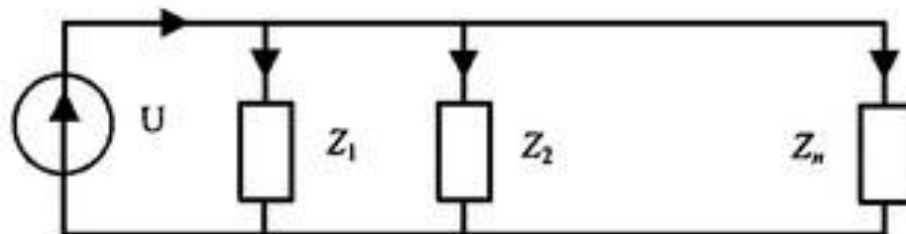
$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{(r e^{i\varphi})} = \sqrt[n]{r} \cdot e^{\frac{\varphi + 2\pi k \cdot i}{n}}$$

где $k = 0, 1, 2, \dots, n - 1$



Применение комплексных чисел.

Сегодня сложно представить себе ряд наук без применения комплексных чисел. Теория электротехники, электромеханики, радиотехники, самолетостроения и других наук невозможна без применения моделей в виде комплексных чисел.



Пример 1. Определить сумму C чисел $A=2+3j$ и $B=5+j6$.

Пример 2. Определить сумму C чисел $A=2+j3$ и $B=7+j9$.

Пример 3. Определить разность C чисел $A=80+j90$ и $B=50-j30$.

Пример 4. Определить сумму C чисел

$$A = 10 \cdot e^{j45^\circ}$$

$$A = 15 \cdot e^{j40^\circ}$$

Пример 5. Определить произведение комплексов A и $B=5$.

$$A = 30 \cdot e^{j20^\circ}$$

Пример 6. Определить произведение комплексов A и $B = e^{-j15^\circ}$.

$$A = 40 \cdot e^{j10^\circ}$$

Пример 7. Определить произведение комплексов A и $B = 5 \cdot e^{j25^\circ}$.

$$A = 70 \cdot e^{j30^\circ}$$

Пример 8. Определить произведение комплексов A и $B = 0,5 \cdot e^{-j10^\circ}$.

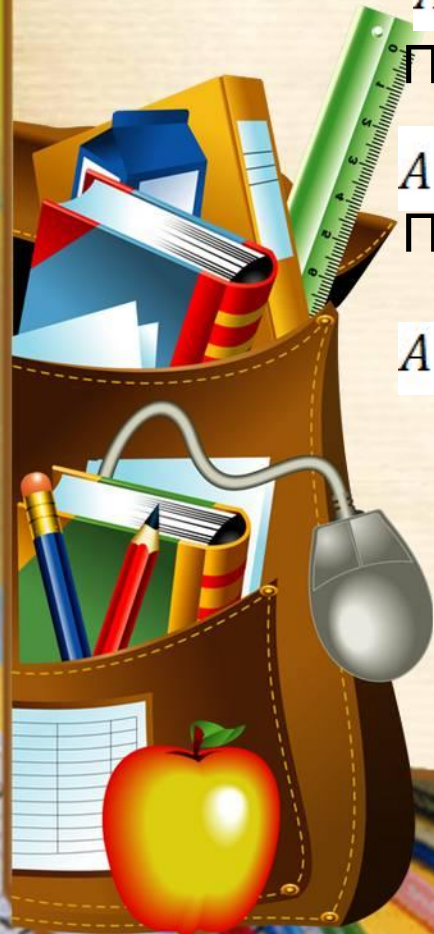


Пример 1. Определить частное C от деления комплекса $A = 80 \cdot e^{j40^\circ}$ на $B = 4$.

Пример 2. Определить частное C от деления комплекса $A = 60 \cdot e^{j70^\circ}$ на e^{j30° .

Пример 3. Определить частное C от деления комплекса $A = 60 \cdot e^{j30^\circ}$ на $B = 2,5e^{j50^\circ}$.

Пример 4. Определить частное C от деления комплекса $A = 2 + j4$ и $B = 0,8 + 0,4j$



ЗАКОН ОМА В КОМПЛЕКСНОЙ ФОРМЕ

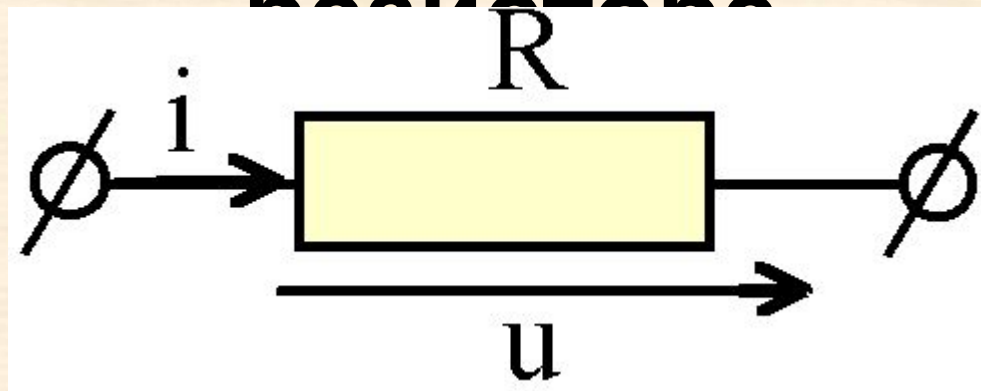
**Закон Ома в комплексной форме
основан на символическом методе и
справедлив для линейных цепей с
гармоническими напряжениями и
токами.**

**Этот закон следует из физической
взаимосвязи между током и
напряжением отдельных элементов
цепи**



Синусоидальный ток в

резисторе



$$i = \sqrt{2} I \sin(\omega t + \varphi)$$

$$u = \sqrt{2} U \sin(\omega t + \varphi)$$

$$p = I^2 R (1 - \cos^2(\omega t + \varphi))$$

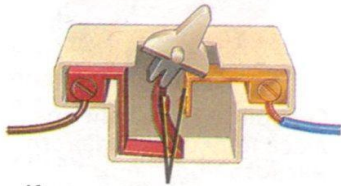
$$i = \frac{U}{Z}$$

Где i и u – мгновенные значения силы тока и напряжения.

p - мгновенная мощность.

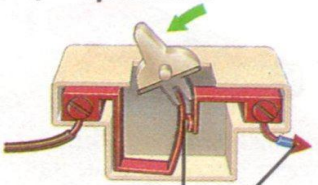


Выключатель выключен –
цепь разорвана



Контакты разомкнуты

Выключатель включен –
цепь работает



Контакты
соединены

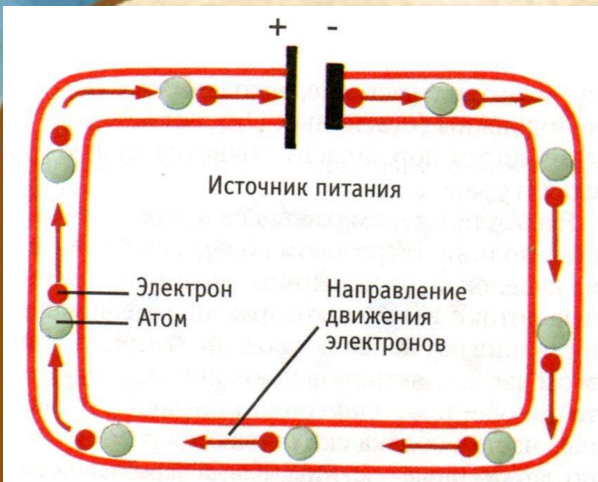
Ток
течет

$$Z = r + jx_L$$

$$Z = r - jx_C$$

Z – комплексное
сопротивление,
 r – активное сопротивление,
 x_L – индуктивное
сопротивление
 x_C – емкостное
сопротивление
 j – мнимая единица,





$$\tilde{S} = P + jQ$$

\tilde{S} – мощность в комплексной форме,
 P – активная мощность,
 Q – реактивная мощность
 j – мнимая единица



Пример: Неразветвленная цепь с активным сопротивлением $r=3,2$ Ом и индуктивны $x_L = 2,4$ Ом и находится под напряжением $u = 183\sin(\omega t - 62^\circ)$ Определить ток в цепи.

Комплексное сопротивление

$$z = r + jx_L = 3,2 + j2,4$$

Модуль и аргумент комплексного сопротивления

$$z = \sqrt{r^2 + x_L^2} = \sqrt{3,2^2 + 2,4^2} = 4 \text{ Ом}$$
$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{x_L}{r} = \frac{2,4}{3,2} = 0,75 \text{ Ом} \quad \varphi = 37^\circ$$

то же сопротивление в показательной форме

$$|Z = ze^{j\varphi} = 4e^{j37^\circ} \text{ Ом} \epsilon$$

$$U = \frac{183}{\sqrt{2}} e^{j62^\circ} = 130 e^{j62^\circ} \text{ В}$$
$$I = \frac{U}{Z} = \frac{130 e^{j62^\circ}}{4 e^{j37^\circ}} = 32,5 e^{j25^\circ} \text{ А}$$

$$i = 32,5\sqrt{2} \text{ I} \sin(\omega t + 25^\circ)$$



Пример: Неразветвленная цепь с активным сопротивлением $r=80$ Ом и емкостным $x_C = 60$ Ом и находится под напряжением $u = 183\sin(\omega t + 25^\circ)$ Определить ток в цепи.

Комплексное сопротивление
 $z = r - jx_C = 80 - j60$ Ом

Модуль и аргумент этого сопротивления

$$z = \sqrt{r^2 + x_C^2} = \sqrt{80^2 + 60^2} = 100 \text{ Ом}$$
$$\operatorname{tg} \varphi = -\frac{x_C}{r} = -\frac{60}{80} = -0,75 \text{ Ом} \quad \varphi = -37^\circ$$

то же сопротивление в показательной форме

$$Z = z e^{j\varphi} = 100 e^{-j37^\circ} \text{ Ом}$$

$$I = \frac{U}{Z} = \frac{130 e^{j25^\circ}}{100 e^{-j37^\circ}} = 1,3 e^{j62^\circ} \text{ А}$$

$$i = 1,3\sqrt{2} \sin(\omega t + 62^\circ)$$



Пример: Определить активную и реактивную мощности цепи, если напряжение $U = 220e^{j62^\circ}$, $I = 10e^{j25^\circ}$

$$\begin{aligned} UI &= 220e^{j62^\circ} \cdot 10e^{j25^\circ} = 2200e^{j37^\circ} = \\ &= 2200 \cos 37^\circ + j 2200 \sin 37^\circ = \\ &= 220 \cdot 0,8 + j 2200 \cdot 0,6 = 1760 + j 1320 \text{ ВА} \end{aligned}$$

$$P = 1,760 \text{ кВт}$$

$$Q = 1,320$$

