

РУЗ "Крымская гимназия-интернат

для одарённых детей

МОН АР Крым"

Чарухова Зоре Ходжаевна,

учитель математики,

специалист высшей категории,

старший учитель.

ОБОБЩАЮЩИЕ УРОКИ

АЛГЕБРА 7 класс

Цель: Повторение, обобщение
И подведение итога.

ГЛАВА 1

Линейные уравнения с одной
переменной.

Основное в главе

Уравнение – это равенство, которое содержит неизвестные числа, обозначенные буквами.

Числа, удовлетворяющие уравнению, - его корни. Решить уравнение – это значит найти все его корни или показать, что их не существует.

Два уравнения называют равносильным, если каждое из них имеет те же корни, что и другое. Уравнения, которые не имеют корней, также считают равносильными друг другу.

Основные свойства уравнений:

1. В любой части уравнения можно привести подобные слагаемые или раскрыть скобки, если они есть.
2. Любой член уравнения можно перенести из одной части уравнения в другую, изменив его знак на противоположный.
3. Обе части уравнения можно умножить или разделить на одно и то же число, отличное от нуля.

= b

Уравнения вида $ax = b$, где a и b – произвольные числа, называют линейными уравнениями с переменной x . Если $a \neq 0$, то уравнение $ax = b$ называют уравнением первой степени с одной переменной.

Каждое уравнение первой степени $ax = b$ имеет один корень $x = \frac{b}{a}$.
Линейное уравнение может иметь один корень, бесконечно много корней или не иметь ни одного корня.

Решение прикладных задач методом математического моделирования состоит из трёх этапов:

- 1) Создание математической модели данной задачи;
- 2) Решение соответствующей математической задачи;
- 3) Анализ ответа.

Вопросы для самопроверки

1. Что такое уравнение?
2. Что такое корень уравнения?
3. Что означает «решить уравнение»?
4. Из каких двух частей состоит уравнение?
5. Какими буквами чаще всего обозначают переменные?
6. Какие уравнения называют равносильными?
7. Сформулируйте основные свойства уравнений?
8. Какое свойство уравнений раньше называли «аль-джебр»?
9. Какое свойство уравнений раньше называли «аль-мукабала»?
10. Откуда происходит название науки «алгебра»?
11. Какие ещё кроме алгебры есть части математики?
12. Сформулируйте определение линейного уравнения.
13. Сколько корней может иметь линейное уравнение?
14. Всегда ли линейное уравнение имеет корни?
15. Какие уравнения называют уравнениями первой степени с одной переменной?
16. Всегда ли уравнение первой степени с одной переменной имеет корни?
17. Сколько корней может иметь уравнение первой степени?

18. Приведите пример линейного уравнения, которое не является уравнением первой степени?

19. При каком условии уравнение $ax = b$ имеет единственный корень?

20. При каком условии уравнение $ax = b$ не имеет корней?

21. При каком условии уравнение $ax = b$ имеет бесконечное множество корней?

22. Зачем надо уметь решать уравнения?

23. Приведите пример задачи и её математической модели.

24. Какими бывают математические модели?

25. Из каких этапов состоит решение задачи методом математического моделирования?

Тестовые задания № 1

1. Какое из уравнений является уравнением первой степени с одной переменной:

а) $0x=13$;

б) $x+y=0$;

в) $-2x=0$;

г) $x=y$?

2. Какое из уравнений не удовлетворяет число 5:

а) $2x=10$;

б) $x-5=0$;

в) $100 : x = 5$;

г) $0x=0$?

3. Какое уравнение не имеет корней?

а) $2x+x=10$;

б) $x : 5=0$;

в) $5=x$;

г) $0:x=10$?

4. Какое из чисел является корнем уравнения $3x+5=1$:

а) $\frac{3}{5}$;

б) $-\frac{4}{3}$;

в) $-\frac{5}{3}$;

г) $-1\frac{1}{5}$?

5. Какое уравнение имеет только один корень?

а) $x = x + 5$;

б) $|x| = 4$;

в) $x^2 = 0$;

г) $x(x-1) = 0$?

6. Решите уравнение $5x+13=3x+2$ и укажите его корень:

а) $-5,5$;

б) $5,5$;

в) $4,5$;

г) $-4,5$?

7. Уравнение $2(2-x)=x-2$ имеет корней:

а) множество;

б) ни одного;

в) один;

г) два.

8. Какое из уравнений равносильно уравнению $5x = -10$:

а) $5x - 10 = 0$;

б) $10x = -5$;

в) $-10 : 5 = x$;

г) $5(x + 10) = 0$?

9. При каком значении a уравнение $|x| = a$ имеет единственный корень:

а) 1;

б) -1;

в) 0;

г) 2?

10. При каком значении a уравнение $(a-1)x = 1-a$ имеет бесконечное множество корней:

а) 1;

б) -1;

в) 0;

г) 2?

Контрольная работа № 1

1. Решите уравнение и определите, есть ли среди них равносильные:

а) $15-x=10$;

б) $-0,4x=2$;

в) $2(x+3)-5=11$;

2. Какие из чисел $-1, 0, 1$ удовлетворяют уравнение:

а) $5x=0$;

б) $x(x+1)(2x-1)=0$

в) $x^2 + 1 = 2x$?

3. Составьте уравнение, которое имеет:

а) один корень;

б) два корня;

в) множество

корней.

4. Два ученика собрали вместе 29 кг ягод. Сколько ягод собрал каждый ученик, если у первого ученика на 5 кг больше, чем у второго?

5. Решите уравнение:

$$10y + 42 = 7y - 3(y-2).$$

6. Найдите корни уравнения:

$$\frac{2x}{7} - \frac{x}{14} = 3.$$

7. Упростите уравнение и найдите его корни:

$$\frac{x+3}{2} - \frac{5+x}{5} = x+4.$$

8. Лодка шла по течению реки 2,4 ч, а против течения – 3,2 ч. Путь, который лодка прошла по течению, оказался на 13,2 км длиннее пути против течения. Найдите скорость лодки в стоячей воде, если скорость течения реки 3,5 км/ч.

9. Найдите корни уравнения $|1 - 3x| + 2 = 5$.

10. Найдите все значения a , при которых корень уравнения $ax = 5 + 2x$ является целым числом.

ГЛАВА 2

Целые выражения

Выражения в математике играют приблизительно такую же роль, как слова в языке или как отдельные кирпичи в сооружении. Математический язык – это язык выражений. Чтобы овладеть им, надо научиться оперировать математическими выражениями, понимать их содержание, уметь записывать в удобном виде. Существуют разные виды математических выражений.

В этой главе вы узнаете о:

Выражениях с переменными;

Выражениях со степенями;

Одночленах;

Многочленах,

Действиях над многочленами.

Выражения с переменными

Рассмотрим, например, уравнение:

$$\frac{2}{3}(x-5) + 3x = 17 - 2x.$$

Левая и правая его части – **выражения**:

$$\frac{2}{3}(x-5) + 3x, 17x - 2x.$$

Каждое из этих выражений содержит одну переменную x . Но бывают выражения с двумя, тремя, и большим количеством переменных. Бывают выражения и без переменных, например:

$$97 \times 17, -\frac{3}{5} \div 45; \frac{0,2 \times 3 - 15 \div 7}{2(3,5 - 1,8)}.$$

Такие выражения называют **числовыми**.

Если выражения не содержат никаких других действий, кроме сложения, вычитания, умножения, возведения в степень и деления, его называют **рациональным**. Примеры рациональных выражений:

$$2x + n, -\frac{2}{3}(x-5), \frac{a-c}{2a-c}, a + \frac{1}{x+c}.$$

Рациональные выражения, не содержащие деления на выражение с переменной, называют **целыми**.

Буквы, вместо которых можно подставлять разные числа, называются **переменными**.

Выражения, содержащие такие переменные, называются **выражения с переменными**.

Тождественные выражения

Два выражения, соответствующие значения которых равны при любых значениях переменных, называют **тождественно равными**, или **тождественными**.

Два тождественно равных выражения, соединённые знаком равенства, образуют *т о ж д е с т в о*.

Примеры.

$$5a+8a=13a, 2(x-3)=2x-6.$$

$$a + b = b + a, a + (b + c) = (a + b) + c,$$

$$ab = ba, a(bc) = (ab)c, a(b + c) = ab + ac.$$

Замена данного выражения другим, тождественным ему, называется **тождественным перобразовани**ем выражения.

Выражения со степенями

Степенью называются произведение нескольких равных множителей.

Например:

3×3 – вторая степень (или квадрат) числа 3;

$x \times x \times x$ – третья степень (или куб) переменной x ;

$s \times s \times s \times s \times s \times s$ – шестая степень переменной s .

Число, возводимое в степень, называют **основанием степени**.

Число, показывающее, в какую степень возводят основание, называют **показателем степени**.

Чтобы возвести в степень отрицательное число, надо возвести в эту степень модуль этого числа и перед результатом поставить знак «плюс», если показатель степени чётный, или «минус» - если показатель степени нечётный.

Если : $a \geq 0$, то : $a^n \geq 0$.

Если : $a < 0$, то : $a^{2n} > 0$ и $a^{2n-1} < 0$.

Свойства степеней

Для любого числа a произвольных натуральных показателей m и n всегда

$$a^m \times a^n = a^{m+n}.$$

Тождество $a^m \times a^n = a^{m+n}$ называют *основным свойством степени*. Из него следует, что **при умножении степеней с одинаковыми основаниями основание оставляют прежним, а показатели степеней складывают.**

Для любого числа $a (a \neq 0)$ и произвольных натуральных показателей степеней m и n ($m > n$) всегда.

$$a^m \div a^n = a^{m-n}.$$

При делении степеней с одинаковыми основаниями основание оставляют прежним, а из показателя степени делимого вычитают показатель степени делителя.

Для любого числа a и произвольных натуральных степеней m и n всегда

$$(a^n)^m = a^{mn}.$$

При возведении степени в степень нужно показатели степеней перемножить, а основание оставить прежним.

Для любых чисел a и b и произвольного натурального показателя степени n

$$(ab)^n = a^n \times b^n.$$

n -я степень произведения равна произведению n -х степеней множителей.

$$a^m \times a^n = a^{m+n}; a^m \div a^n = a^{m-n}; (a^n)^m = a^{mn};$$

$$(ab)^n = a^n b^n; \left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}.$$

Одночлены

Простейшие числа – числа, переменные, их степени и произведения,

например $6, -\frac{7}{12}, z, x^5, 0, 3a^2x, 3a \times 5c$, называют

одночленами.

Числовой множитель одночлена, записанного в стандартном виде, называют ***коэффициентом*** этого одночлена.

Чтобы перемножить одночлены, числовые множители перемножают, а к буквенным применяют правило умножения степеней с одинаковыми основаниями.

Чтобы возвести в степень одночлен, нужно возвести в эту степень каждый множитель одночлена и найденные степени перемножить.

Тестовые задания № 2

1. Представьте число 0,0009 в виде степени:

а) $0,3^3$; б) $0,3^2$; в) $0,03^2$; г) $0,03^3$.

2. Представьте одночлен в виде степени $625x^8$:

а) $(5x^2)^8$; б) $(5x^2)^4$; в) $(5x)^4$; г) $(5x)^8$.

3. Какое выражение тождественно выражению ax^2 :

а) $a \times x(-x)$; б) $a \times x + x$; в) $a(-x)(-x)$; г) $ax \times ax$.

4. При каком m верно равенство $a^{16}a^m = a^{32}$:

а) 14; б) 2; в) 1; г) 16?

5. При каком p верно равенство $(c^3)^p = c^{12}$:

а) 1; б) 0; в) 2; г) 4?

6. Какое из уравнений не имеет корней:

а) $x^2 = x^6$; б) $x \div x^3 = -1$; в) $0 \times x^3 = 0$; г) $x^5 \times x^3 = 1$?

7. При каком значении d выражения $9(x-3) - 2(3x+5)$ и $dx - 37$

Являются тождественными:

а) -3; б) 3; в) -4; г) 4?

8. Запишите сумму квадратов чисел x и y :

а) $x^2 + y^2$; б) $(x+y)^2$; в) $2x + 2y$; г) $x^2 \times y^2$?

9. Запишите в стандартном виде число 24 000 000 000:

а) 24×10^9 ; б) $2,4 \times 10^9$; в) $2,4 \times 10^{10}$; г) $0,24 \times 10^{10}$.

10. Найдите значение выражения $x^4 - 3x^2 + 4$, если $x=2$:

а) 6;

б) 7;

в) 8;

г) 9.

Контрольная работа № 2

1. Возведите в степень:

$$а) 5^3; б) (0,2)^4; в) (-1)^5.$$

2. Найдите значение выражения:

$$а) 0,5a^3 - 3,9 \text{ если } a=2; \quad б) 3m^2 - 82, \text{ если } m = -5.$$

3. Представьте выражение в виде одночлена стандартного вида:

$$а) 6xy \times 0,5ax; \quad б) a^2 \times 4a^2x.$$

4. Возведите одночлен в квадрат и в куб:

$$а) -a^3b^2c^5; \quad б) 1\frac{2}{3}m^2n.$$

5. Вычислите:

$$а) 18 \times \left(-\frac{2}{3}\right)^3; \quad б) 2,4^2 - 1,6^2; \quad в) \frac{15^4}{3^35^5}.$$

6. Упростите выражение:

$$а) \left(\frac{1}{2}ab^3\right) \times (-6a^2b); \quad б) (-0,2m^2n)^2 \times (-5mn^2).$$

7. Решите уравнение:

$$a) 2x^2 \times x = 2; б) 4x^3 \times x^2 = 0; в) 3x^4 + 6 = 0.$$

8. Найдите сумму, разность, произведение и частное чисел $2,5 \times 10^{10}$ и $1,25 \times 10^8$.

9. Является ли тождеством равенство:

$$a) |x - y| = |y - x|; б) |x^2| + 1 = |x^2 + 1|?$$

10. Докажите, что для любого натурального n значение дроби является натуральным числом:

$$\frac{7^{4n} - 1}{10}.$$

Многочлены

Сумму нескольких многочленов называют **многочленом**. Если многочлен содержит **два слагаемых**, он называется **двучленом**, три – **трёхчленом**. Одночлен также считается **отдельным видом многочлена**.

Существуют целые выражения, не являющиеся многочленами.

Например, $(a + b)^2$ и $(a + b)^3$ являются многочленами.

Многочлен может иметь *подобные члены*, т.е. Такие слагаемые, которые отличаются только коэффициентами или совсем не отличаются.

Например, в трёхчлене $4x^2 + 5x + 7$ первые два подобны.

Считают, что многочлен записан в **стандартном виде**, если все его члены – одночлены стандартного вида и среди них нет подобных.

Сложение и вычитание многочленов

Чтобы сложить два многочлена, то есть найти сумму многочленов, достаточно соединить их знаком «плюс».

Например, суммой многочленов $a^2 + ax + x^2$ и $c^2 + cx + x$ является многочлен $a^2 + ax + x^2 + c^2 + cx + x$

Сложение многочленов подчиняется *переместительному* и *сочетательному* законам: какие бы не были многочлены А, В и С, всегда $A+B=B+A$ и $(A+B)+C=A+(B+C)$.

Чтобы найти разность двух многочленов, надо из первого многочлена вычесть второй.

Раскрывая скобки, перед которыми стоит знак «минус», знаки всех членов, заключённых в эти скобки, ихменяют на противоположные.

Пример.

$$ab + c - 4; 2ab + c - 3.$$

Решение:

$$\begin{aligned} ab + c - 4 - (2ab + c - 3) &= \\ &= ab + c - 4 - 2ab - c + 3 = -ab - 1. \end{aligned}$$

Умножение многочлена на одночлен

Чтобы умножить многочлен на одночлен, нужно каждый член многочлена умножить на данный одночлен и результаты сложить.

Пример: $2ax \times (3x^2 - x + 4) = 2ax \times 3x^2 - 2ax \times x + 2ax \times 4 =$
 $= 6ax^3 - 2ax^2 + 8ax.$

Умножение многочленов

Чтобы умножить многочлен на многочлен, надо каждый член первого многочлена умножить на каждый член второго многочлена и полученные произведения сложить.

Пример: $(x^2 - 2x + 3)(a - 5) = x^2a + x^2(-5) - 2xa - 2x(-5) + 3a +$
 $+ 3(-5) = ax^2 - 5x^2 - 2ax + 10x + 3a - 15.$

Основное в главе

Произведение нескольких одинаковых множителей называют *степенью*.

$$a^1 = a;$$

Свойства степеней для натуральных m и n :

$$a^m \times a^n = a^{m+n}; a^m \div a^n = a^{m-n}; (a^n)^m = a^{nm};$$

$$(ab)^n = a^n b^n; \left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}, b \neq 0.$$

Выражения бывают *числовыми* и *с переменными*. Если выражение не содержит никаких других действий, кроме сложения, вычитания, умножения, возведения в степень и деления, его называют *рациональным выражением*. Рациональное выражение, не содержащее действия деления на выражение с переменной, называют *целым выражением*.

Два целых выражения, соответствующие значения которых равны при любых значениях переменных, называют тождественно равными, или тождественными. Два тождественно равных выражения, соединённые знаком равенства, образуют *тождество*.

Простейшие выражения – чила, переменные, их степени или произведения. Их называют *одночленами*.

Чтобы выполнить умножение одночленов, между ними ставят знак умножения и полученное произведение приводят к одночлену стандартного вида. Чтобы возвести одночлен в степень, нужно возвести в эту степень каждый множитель одночлена и найденные степени перемножить.

Сумму нескольких одночленов называют *многочленом*. Для удобства каждый одночлен также считают многочленом.

Складывая многочлены пользуются раскрытием скобок.

Чтобы умножить многочлен на одночлен, нужно каждый член многочлена умножить на данный одночлен и результаты сложить. Чтобы умножить многочлен на многочлен, каждый член первого многочлена умножить на каждый член второго многочлена и полученные произведения сложить.

Вопросы для самопроверки

1. Приведите примеры числовых выражений и выражений с переменными.
2. Какие выражения называют рациональными?
3. Какие выражения называют целыми?
4. Приведите пример выражения с моделями.
5. Что такое степень; основание степени; показатель степени?
6. Что такое тождество? Приведите примеры.
7. Что такое тождественное преобразование выражений?
8. Каждое ли тождество является равенством?
9. Каждое ли равенство является тождеством?
10. Какие выражения называют тождественно равными, или тождественными?
11. Сформулируйте основное свойство степени.
12. Сформулируйте правило умножения степеней.
13. По какому правилу возводят степень в степень?
14. По какому правилу возводят в степень произведение?
15. Как возводить в степень дробь?
16. Что такое одночлен?
17. Что такое одночлен стандартного вида?
18. Что такое коэффициент одночлена?

19. Что называют степенью одночлена?

20. Сформулируйте правило возведения в степень одночлена.

Тестовые задания № 3

1. Какое из выражений является многочленом?

$$a) (x + y)^2; б) x^2 + y^2; в) \frac{x^2}{y^2}; г) x^2 \div y^2.$$

2. Запишите в стандартном виде многочлен

$$3x^2 - 1 - 5x - 4x^2 - 7 + 5x - x^2 + 8:$$

$$a) x^3 + x^2; б) -x^3 + x^2; в) -x^3 - x^2; г) -x^3.$$

3. Найдите степень многочлена

$$4,5x^2 + 3x - 2,5x^2 - 6x^2:$$

а) 8;

б) 1;

в) 2;

г) 6.

4. Упростите выражение $(2a + 3b) + (7b - 3a) - (8a - 6b)$:

а) $13a - 4b$;

б) $-9a + 16b$;

в) $7a - 16b$;

г) $-32a + 4b$.

5. Выполните умножение $(x - 1)(x + 1)$:

$$a) x^2 - 2x + 1; б) $x^2 + 1$; в) x^2 ; г) $x^2 - 1$.$$

6. Вычислите значение многочлена $0,6x^3 + 0,4x^3$, если $x = 0,2$:
а) 0,8; б) 0,08; в) 0,008; г) 0,0008.

7. При каком значении x разность многочленов $5x^2 - 9x + 17$ и $5x^2 + 4x + 17$ равна 13:
а) 1; б) -1; в) 2; г) -2.

8. Запишите в виде двучлена число, которое при делении на число m даёт частное 8 и остаток r :

а) $8m + r$; б) $8m - r$; в) $8r - m$; г) $8r + m$.

9. Решите уравнение $x(x + 1) - x(x - 2) = 3$:

а) -1; б) 0; в) 1; г) 2.

10. Какой многочлен надо сложить с многочленом $a^3 - a^2 + 3$, чтобы получить $a^2 + 3$:

а) $a^3 - a^2$; б) $a^2 - a^3$; в) $2a^2 - a^3$; г) $2a^2 - a^2$.

Контрольная работа № 3

1. Вычислите значение выражения $3x^2 - 2x - 6,42$, если:

а) $x=3$;

б) $x=-1,2$.

2. Запишите в стандартном виде многочлен:

$$a^2 + 2a + 2 - a + 5 + 3a^2.$$

3. Найдите сумму и разность многочленов:

а) $n^2 - 2n - 1$ и $n^2 + 3$; б) $3x^2 - 2xy + y^2$ и $5x^2 + 2xy + 2y$.

4. Найдите корни уравнения:

$$y^2 + 3 = y(y + 1).$$

5. Выполните умножение выражений:

а) $2x^2$ и $x + y$;

б) $a - 2b^2$ и $a^2 + 2ab + 4b^2$.

6. Упростите выражение:

а) $5x^2(x - 3) + 15x^2$;

б) $3a(a^2 - a + 2) + 3a^3 - 6a^2$;

в) $(2x - 1)(1 + 2x) - 4x^2$.

7. Решите уравнение:

а) $(x - 2)(x + 3) = x^2 - x$;

б) $(3y - 4)(y + 1) = y(3y + 1)$.

8. Расстояние между пристанями А и В лодка проходит по течению за 3 ч, а против течения – за 4 ч. Найдите расстояние от А до В, если скорость течения – 3 км/ч.

9. Докажите, что значение выражения

$$3ab + 6((2a + b)a + 5) - 3a(3b + 4a)$$

не зависит от значения переменных.

10. Докажите, что если a, b, c – цифры, то разность

$$(\underline{ab} + \underline{ac} + \underline{bc}) - (\underline{ca} + \underline{cb} + \underline{ba})$$

кратна 18.