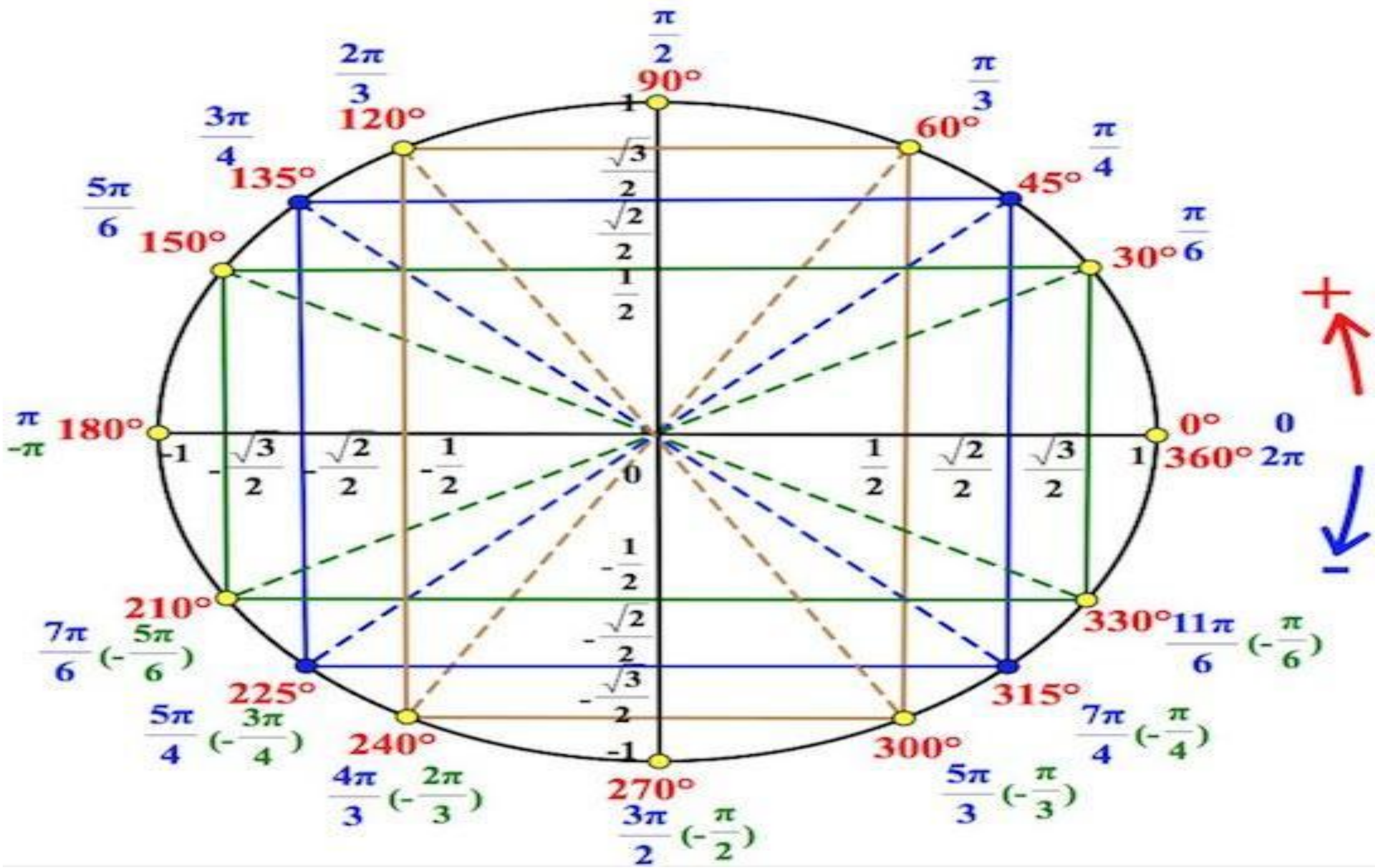
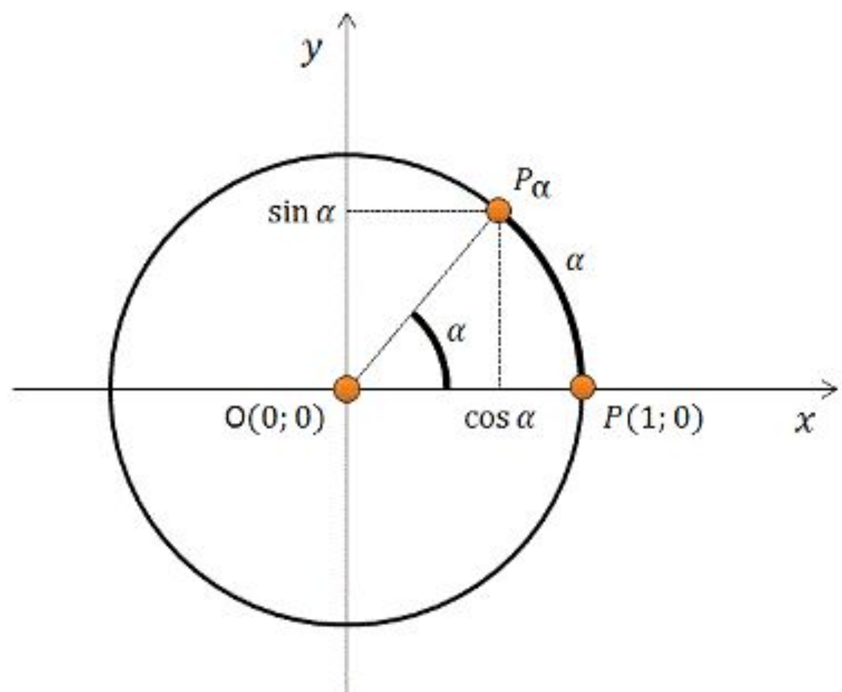
Тригонометрические неравенства



Цель:

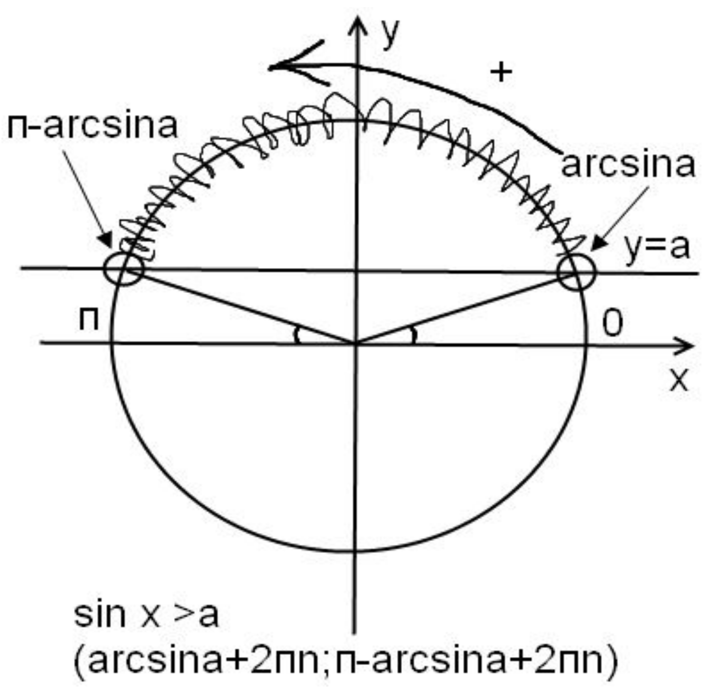
Рассмотреть способы решения простейших тригонометрических неравенств.



Тригонометрические неравенства

Тригонометрическими неравенствами называются неравенства вида:

1. sinx <(>)*a*
2. cos x >(<) a
3. tq x >(<) a
4. ctq x >(<) a



РЕШЕНИЕ НЕРАВЕНСТВ sinx <(>)*a*

1. Построить графики функций y= sinx и y = a, считая, что |a|<1

2. Решить уравнение sinx = a,

$x = (-1)^n \arcsin a + \pi n$, где $n \in Z$.

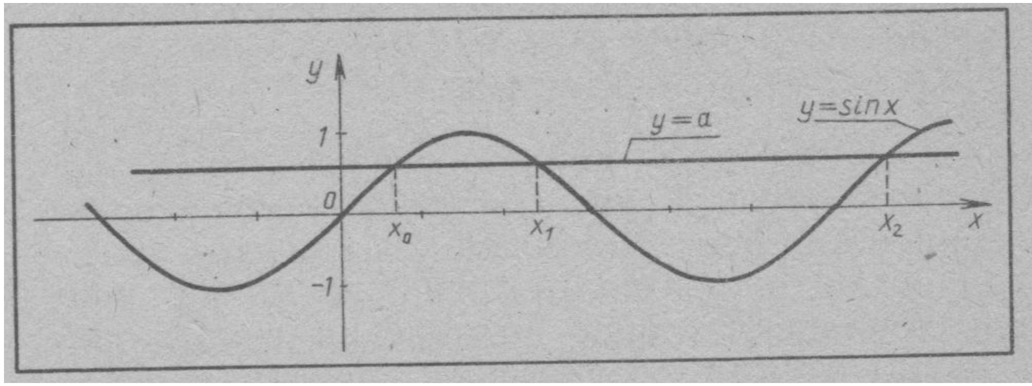
Пусть n= 0,1,2, находим три корня составленного уравнения

$X_0 = \arcsin a$,

$X_1 = -\arcsin a + \pi$,

$X_2 = \arcsin a + 2\pi$.

X_0 , x_1, x_2 –абсциссы трех последовательных точек пересечения графиков y= sinx и y=a,



РЕШЕНИЕ НЕРАВЕНСТВ sinx <(>)*a*

Всегда на интервале $(x_0;x_1)$ выполняется неравенство sinx>a, а на интервале $(x_1;x_2)$ выполняется неравенство sinx<a. К концам этих промежутков надо добавить число кратное периоду синуса

1. Sinx > a, где |a|<1

$x_0 + 2\Pi n < \mathbf{x} < x_1 + 2\Pi n$

где $n \in Z$.

2. sinx<a, где |a|<1

$x_1 + 2\Pi n < \mathbf{x} < x_2 + 2\Pi n$

где $n \in Z$.

Примеры

$\sin x > \frac{\sqrt{3}}{2}$

$x_0 = \arcsin \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\pi}{3}$

$x_1 = -\arcsin \frac{\sqrt{3}}{2} + \pi =$

$= \frac{\pi}{3} + \pi = \frac{4\pi}{3}$

$\underline{\pi/3 + 2\pi n < x < 4\pi/3 + 2\pi n}$

где $n \in Z$.

Ответ: $(\pi/3 + 2\pi n;\ 4\pi/3 + 2\pi n)$

2. $\sin x < \frac{\sqrt{3}}{2}$

$x_1 = -\arcsin \frac{\sqrt{3}}{2} + \pi =$

$= \frac{\pi}{3} + \pi = \frac{4\pi}{3}$

$x_2 = \arcsin \frac{\sqrt{3}}{2} + 2\pi =$

$= \frac{\pi}{3} + 2\pi = \frac{7\pi}{3}$

$4\pi/3 + 2\pi n < x < 7\pi/3 + 2\pi n$

где $n \in Z$.

Ответ:

$(4\pi/3 + 2\pi n; 7\pi/3 + 2\pi n)$

Решение неравенств cos x >(<) a

Cos x = a

x = ± arccos a + 2∏n

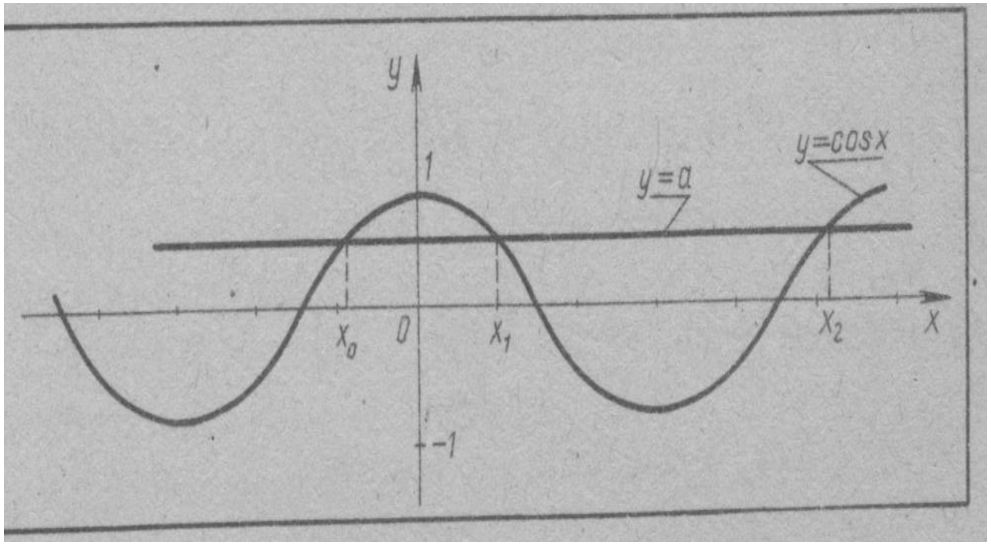
где n Є Z.

Пусть n= 0,1, находим три корня составленного уравнения

x_0 = - arccos a ,

x_1 = arccos a,

x_2 =-arccos a + 2∏



Решение неравенств cos x >(<) a

Всегда на интервале $(x_0;x_1)$ выполняется неравенство cos $x>a$, а на интервале $(x_1;x_2)$ выполняется неравенство $\cos x<a$. К концам этих промежутков надо добавить число кратное периоду синуса

1. Cos $x > a$, где $|a|<1$
$\underline{x_0 +2\prod n<x<x_1 +2\prod n}$
где n Є Z.

2. Cos $x < a$, где $|a|<1$
$\underline{x_1 +2\prod n<x<x_2 +2\prod n}$
где n Є Z.

Решение неравенств cos x >(<) a

3.Cos x ≤ ½

x_1 = arccos½ = Π/3

x_2 =-arccos½=

= - Π/3

где *n* Є Z.

Π/3+2Π*n* ≤ x ≤5Π/3 +2Π*n*

где *n* Є Z.

Ответ: [Π/3+2Π*n*, 5Π/3+2Π*n*]

4.Cos x ≥ ½

x_0 =-arccos½ = - Π/3

x_1 = arccos½ = Π/3

где *n* Є Z.

-Π/3+2Π*n* ≤ x ≤Π/3 +2Π*n*

где *n* Є Z.

Ответ: [-Π/3+2Π*n*,Π/3+2Π*n*]

Решение неравенств tq x >(<) a

tq x < a
(- П/2 , x_0)
x_0=arctq a
-П/2 + Пn < x < x_0 + Пn
где *n* Є Z.

tq x > a

(x_0 , П/2)

x_0=arctq a

x_0 +Пn < x < П/2 + Пn

где *n* Є Z.

Примеры

5.tq x < 1

x_0=arctq 1 = П/4

-П/2 +Пn < x < П/4 + Пn

где *n* Є Z.

Ответ:(-П/2+Пn; П/4+ Пn)

6.tq x >1

x_0=arctq 1 = П/4

П/4 +Пn < x < П/2 + Пn

где *n* Є Z.

Ответ:

(П/4 +Пn; П/2 + Пn)

Решение неравенств ctq x >(<) a

ctq x > a

(0 ; x_0)

x_0 = arcctq a

0 + ∏n < x < x_0 + ∏n

где *n* Є Z.

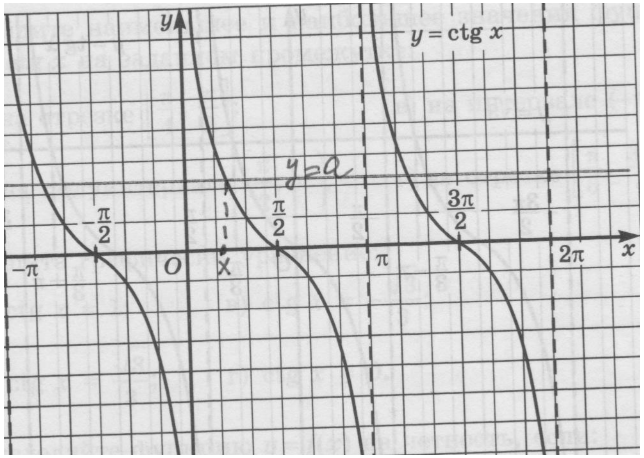
ctq x< a

(x_0; ∏)

x_0=arctq a

x_0 + ∏n < x < ∏ + ∏n

где *n* Є Z.



Примеры:

ctq x > 0

(0 ; x_0)

x_0 = arcctq 0 = П/2

0 + Пn < x < П/2 + Пn

где *n* Є Z.

Ответ: (Пn ; П/2 + Пn),

n Є Z.

ctq x< 0

(x_0; П)

x_0=arctq 0 = П/2

П/2 + Пn < x < П + Пn

где *n* Є Z.

Ответ:(П/2 + Пn; П + Пn)

где *n* Є Z.

Выполните задание:

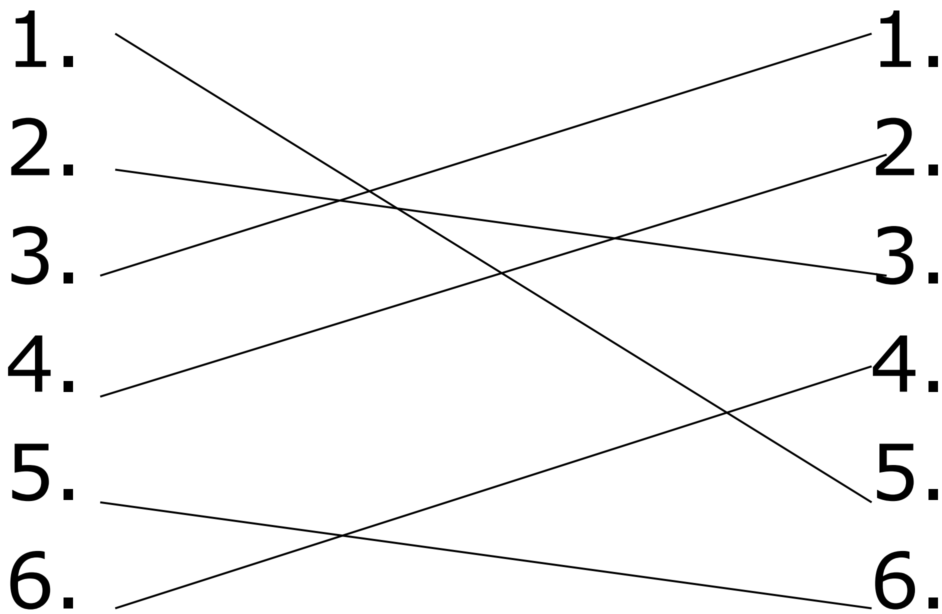
Решите неравенства и соотнесите ответы:

1. $\sin x < 1$
2. $\sin x > 1$
3. $\cos x < -1$
4. $\cos x > -1$
5. $\text{Tq}\ x > \sqrt{3}$
6. $\text{Ctq} < -\frac{\sqrt{3}}{3}$

Ответы:

1. $(\pi + 2\pi n\ ;\ 3\pi + 2\pi n)$
2. $(-\pi + 2\pi n;\ \pi + 2\pi n)$
3. $(\pi/2 + 2\pi n\ ;\ \pi/2 + 2\pi n)$
4. $(2\pi/3 + \pi n\ ;\ \pi + \pi n)$
5. $(\pi/2 + 2\pi n\ ;\ 5\pi/2 + 2\pi n)$
6. $(\pi/3 + \pi n\ ;\ \pi/2 + \pi n)$

Правильные ответы к заданию



Домашнее задание:

1. Выучить алгоритм решения тригонометрических неравенств

2. Выполнить задания №15.17(б,в,г) № 16.15(б,в,г)