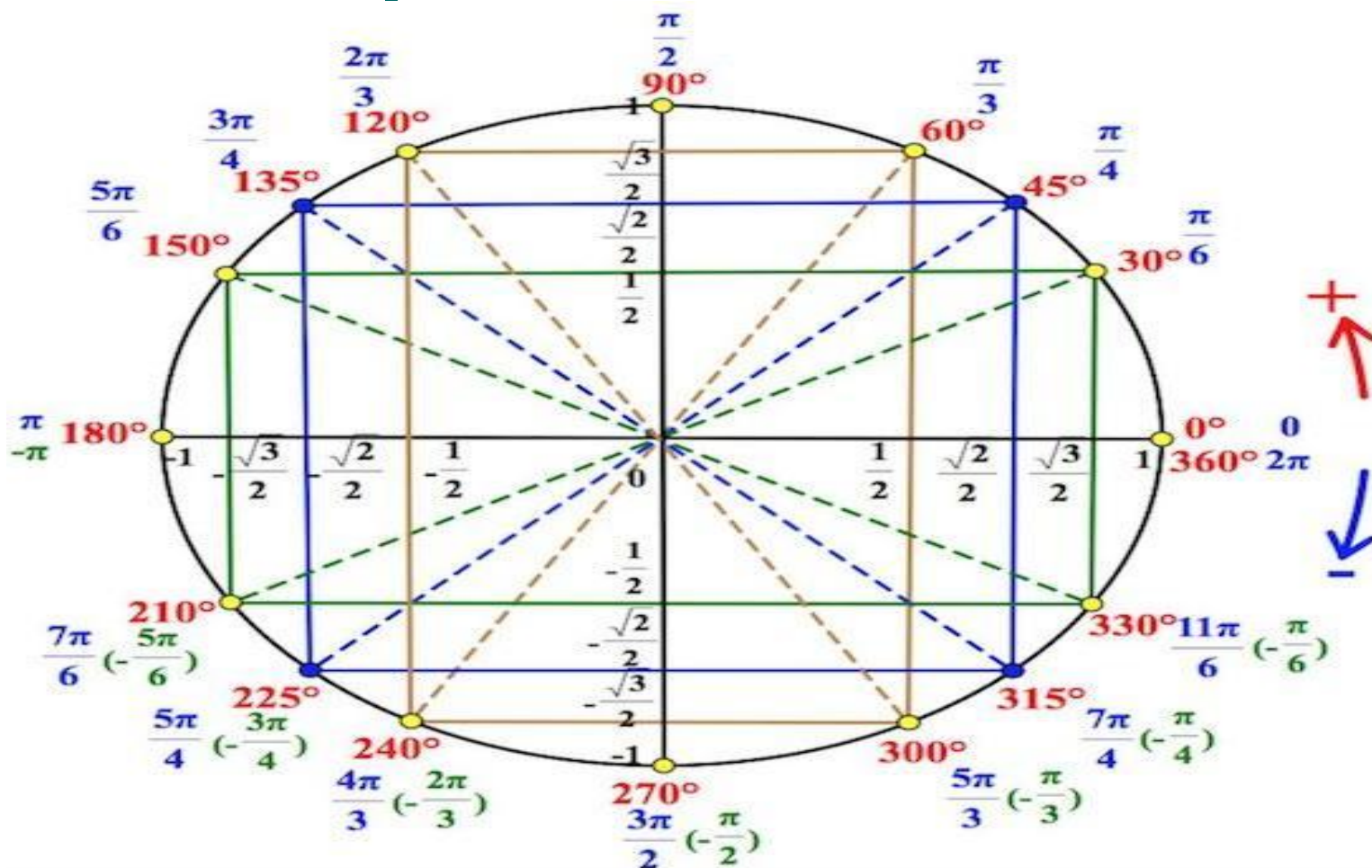
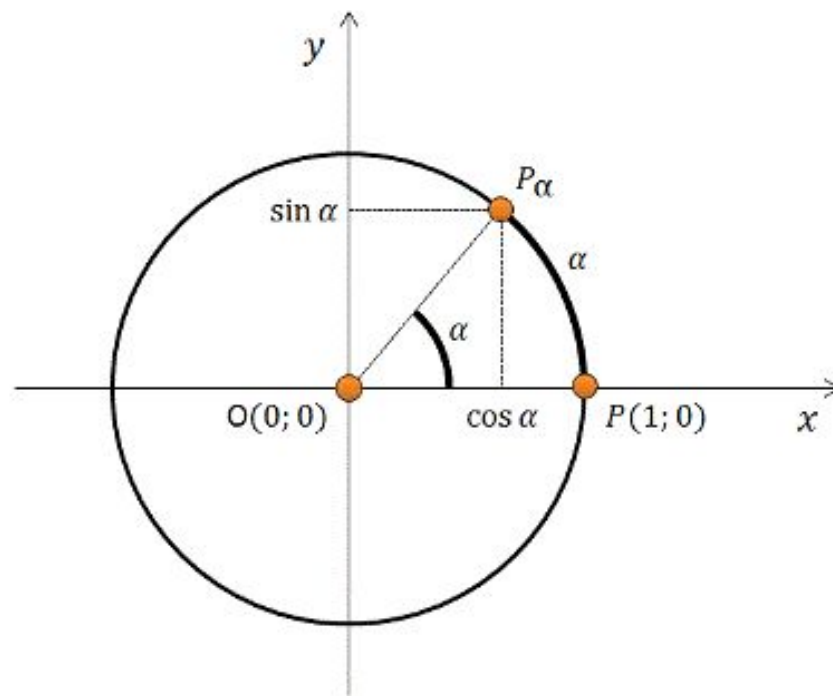


Тригонометрические неравенства



Цель:

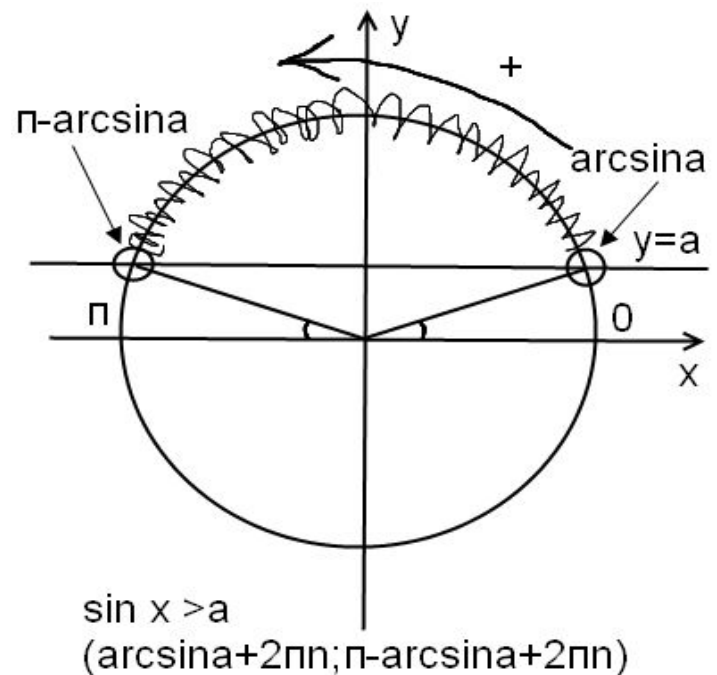
Рассмотреть способы решения простейших тригонометрических неравенств.



Тригонометрические неравенства

Тригонометрическими неравенствами называются неравенства вида:

1. $\sin x < (>) a$
2. $\cos x > (<) a$
3. $\operatorname{tg} x > (<) a$
4. $\operatorname{ctg} x > (<) a$



РЕШЕНИЕ НЕРАВЕНСТВ $\sin x <(>) a$

1. Построить графики функций $y = \sin x$ и $y = a$, считая, что $|a| < 1$

2. Решить уравнение $\sin x = a$,

$\sin x = a$,

$x = (-1)^n \arcsin a + \pi n$,

где $n \in \mathbb{Z}$.

Пусть $n = 0, 1, 2$,

находим три корня

составленного

уравнения

$x_0 = \arcsin a$,

$x_1 = -\arcsin a + \pi$,

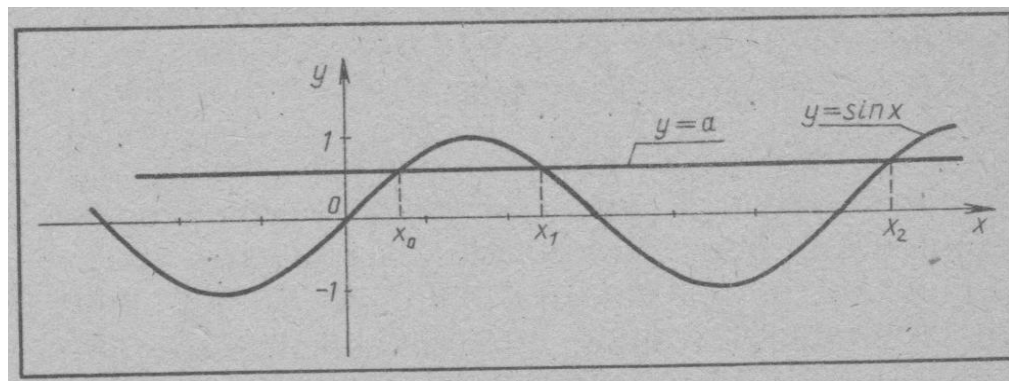
$x_2 = \arcsin a + 2\pi$.

x_0, x_1, x_2 - абсциссы

трех последовательных

точек пересечения

графиков $y = \sin x$ и $y = a$,



РЕШЕНИЕ НЕРАВЕНСТВ $\sin x <(>) a$

Всегда на интервале $(x_0; x_1)$ выполняется неравенство $\sin x > a$, а на интервале $(x_1; x_2)$ выполняется неравенство $\sin x < a$.
К концам этих промежутков надо добавить число кратное периоду синуса

1. $\sin x > a$, где $|a| < 1$
 $x_0 + 2\pi n < x < x_1 + 2\pi n$
где $n \in \mathbb{Z}$.

2. $\sin x < a$, где $|a| < 1$
 $x_1 + 2\pi n < x < x_2 + 2\pi n$
где $n \in \mathbb{Z}$.

Примеры

$$\sin x > \frac{\sqrt{3}}{2}$$
$$x_0 = \arcsin \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\pi}{3}$$

$$x_1 = -\arcsin \frac{\sqrt{3}}{2} + \pi =$$
$$= \frac{\pi}{3} + \pi = \frac{4\pi}{3}$$

$$\underline{\frac{\pi}{3} + 2\pi n < x < \frac{4\pi}{3} + 2\pi n}$$

где $n \in \mathbb{Z}$.

Ответ: $(\frac{\pi}{3} + 2\pi n; \frac{4\pi}{3} + 2\pi n)$

$$2. \sin x < \frac{\sqrt{3}}{2}$$
$$x_1 = -\arcsin \frac{\sqrt{3}}{2} + \pi =$$

$$= \frac{\pi}{3} + \pi = \frac{4\pi}{3}$$

$$x_2 = \arcsin \frac{\sqrt{3}}{2} + 2\pi =$$

$$= \frac{\pi}{3} + 2\pi = \frac{7\pi}{3}$$

$$4\pi/3 + 2\pi n < x < 7\pi/3 + 2\pi n$$

где $n \in \mathbb{Z}$.

Ответ:

$$(\frac{4\pi}{3} + 2\pi n; \frac{7\pi}{3} + 2\pi n)$$

Решение неравенств $\cos x > (<) a$

$$\cos x = a$$

$$x = \pm \arccos a + 2\pi n$$

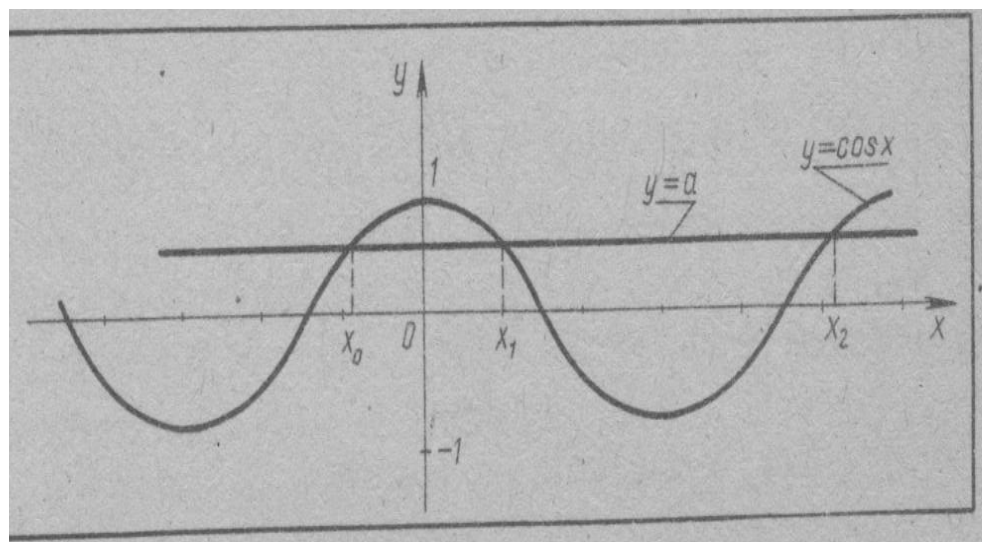
где $n \in \mathbb{Z}$.

*Пусть $n = 0, 1$,
находим три корня
составленного
уравнения*

$$x_0 = -\arccos a,$$

$$x_1 = \arccos a,$$

$$x_2 = -\arccos a + 2\pi$$



Решение неравенств $\cos x > (<) a$

Всегда на интервале $(x_0; x_1)$ выполняется неравенство $\cos x > a$, а на интервале $(x_1; x_2)$ выполняется неравенство $\cos x < a$.
К концам этих промежутков надо добавить число кратное периоду синуса

1. $\cos x > a$, где $|a| < 1$
 $x_0 + 2\pi n < x < x_1 + 2\pi n$
где $n \in \mathbb{Z}$.

2. $\cos x < a$, где $|a| < 1$
 $x_1 + 2\pi n < x < x_2 + 2\pi n$
где $n \in \mathbb{Z}$.

Решение неравенств $\cos x > (<) a$

3. $\cos x \leq 1/2$

$$x_1 = \arccos 1/2 = \pi/3$$

$$x_2 = -\arccos 1/2 = -\pi/3$$

где $n \in \mathbb{Z}$.

$$\pi/3 + 2\pi n \leq x \leq 5\pi/3 + 2\pi n$$

где $n \in \mathbb{Z}$.

Ответ: $[\pi/3 + 2\pi n, 5\pi/3 + 2\pi n]$

4. $\cos x \geq 1/2$

$$x_0 = -\arccos 1/2 = -\pi/3$$

$$x_1 = \arccos 1/2 = \pi/3$$

где $n \in \mathbb{Z}$.

$$-\pi/3 + 2\pi n \leq x \leq \pi/3 + 2\pi n$$

где $n \in \mathbb{Z}$.

Ответ: $[-\pi/3 + 2\pi n, \pi/3 + 2\pi n]$

Решение неравенств $\operatorname{tg} x > (<) a$

$$\operatorname{tg} x < a$$

$$(-\pi/2, x_0)$$

$$x_0 = \operatorname{arctg} a$$

$$-\pi/2 + \pi n < x < x_0 + \pi n$$

где $n \in \mathbb{Z}$.

$$\operatorname{tg} x > a$$

$$(x_0, \pi/2)$$

$$x_0 = \operatorname{arctg} a$$

$$x_0 + \pi n < x < \pi/2 + \pi n$$

где $n \in \mathbb{Z}$.

Примеры

5. $\operatorname{tg} x < 1$

$x_0 = \operatorname{arctg} 1 = \pi/4$

$-\pi/2 + \pi n < x < \pi/4 + \pi n$
где $n \in \mathbb{Z}$.

Ответ: $(-\pi/2 + \pi n; \pi/4 + \pi n)$

6. $\operatorname{tg} x > 1$

$x_0 = \operatorname{arctg} 1 = \pi/4$

$\pi/4 + \pi n < x < \pi/2 + \pi n$
где $n \in \mathbb{Z}$.

Ответ:

$(\pi/4 + \pi n; \pi/2 + \pi n)$

Решение неравенств $\operatorname{ctg} x > (<) a$

$$\operatorname{ctg} x > a$$

$$(0 ; x_0)$$

$$x_0 = \operatorname{arccctg} a$$

$$0 + \pi n < x < x_0 + \pi n$$

где $n \in \mathbb{Z}$.

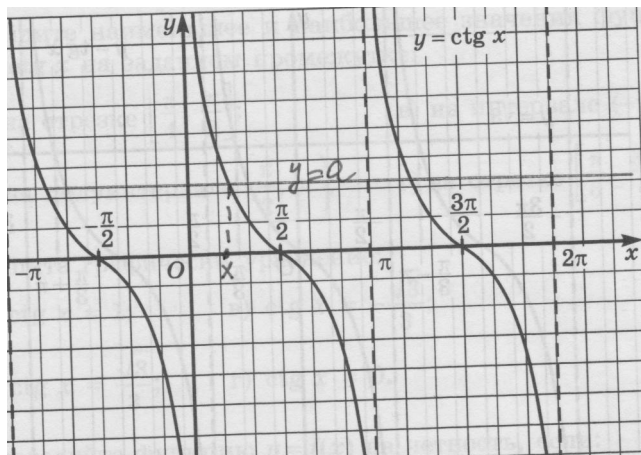
$$\operatorname{ctg} x < a$$

$$(x_0 ; \pi)$$

$$x_0 = \operatorname{arccctg} a$$

$$x_0 + \pi n < x < \pi + \pi n$$

где $n \in \mathbb{Z}$.



Примеры:

$$\operatorname{ctg} x > 0$$

$$(0 ; x_0)$$

$$x_0 = \operatorname{arccctg} 0 = \pi/2$$

$$0 + \pi n < x < \pi/2 + \pi n$$

где $n \in \mathbb{Z}$.

Ответ: $(\pi n ; \pi/2 + \pi n)$,
 $n \in \mathbb{Z}$.

$$\operatorname{ctg} x < 0$$

$$(x_0 ; \pi)$$

$$x_0 = \operatorname{arctg} 0 = \pi/2$$

$$\pi/2 + \pi n < x < \pi + \pi n$$

где $n \in \mathbb{Z}$.

Ответ: $(\pi/2 + \pi n ; \pi + \pi n)$
где $n \in \mathbb{Z}$.

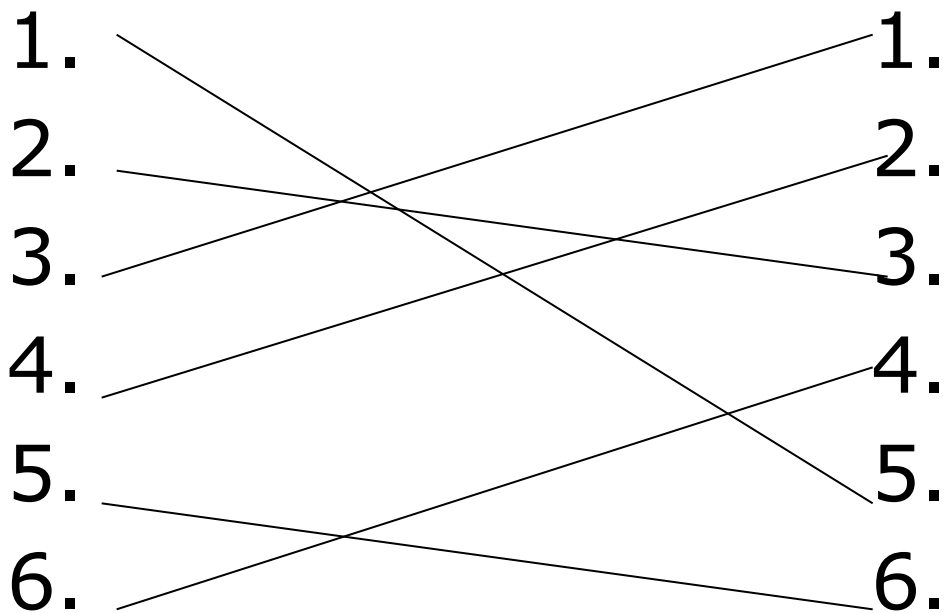
Выполните задание:

Решите неравенства и Ответы:

соотнесите ответы:

- | | | |
|----|--|---|
| 1. | $\sin x < 1$ | 1. $(\pi + 2\pi n ; 3\pi + 2\pi n)$ |
| 2. | $\sin x > 1$ | 2. $(-\pi + 2\pi n ; \pi + 2\pi n)$ |
| 3. | $\cos x < -1$ | 3. $(\pi/2 + 2\pi n ; \pi/2 + 2\pi n)$ |
| 4. | $\cos x > -1$ | 4. $(2\pi/3 + \pi n ; \pi + \pi n)$ |
| 5. | $\operatorname{Tg} x > \sqrt{3}$ | 5. $(\pi/2 + 2\pi n ; 5\pi/2 + 2\pi n)$ |
| 6. | $\operatorname{Ctg} x < -\frac{\sqrt{3}}{3}$ | 6. $(\pi/3 + \pi n ; \pi/2 + \pi n)$ |

Правильные ответы к заданию



Домашнее задание:

1. Выучить алгоритм решения тригонометрических неравенств
2. Выполнить задания №15.17(б,в,г)
№ 16.15(б,в,г)