Матрицы. Типы матриц.

Презентацию подготовил:
Чавкина Т.В.
преподаватель математики
ГБУ ПО РМ "РЖПТ им. А.П. Байкузова"

- Прямоугольную таблицу $\boldsymbol{A}$ состоящую из $\boldsymbol{m}$ строк и $\boldsymbol{n}$ столбцов, элементами которой являются действительные числа, называют **числовой матрицей порядка** $\boldsymbol{m \times n}$ (читается «m **на** n»).

$$\boldsymbol{A_{m\times n}} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & a_{ij} & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}_{\boldsymbol{m\times n}}$$

- Действительное число $\boldsymbol{a_{ij}}$, где $\boldsymbol{i}$ – номер строки, $\boldsymbol{j}$ - номер столбца на пересечении которых стоит это число в матрице, называется **элементом матрицы *A***.

$$\begin{array}{rc}
i\text{-ая строка} & \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \boldsymbol{a_{ij}} & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}_{m\times n} \\
 & j\text{-й столбец}
\end{array}$$

Основные типы матриц.

- Пусть $\boldsymbol{m = n}$, тогда

матрица A – **квадратная матрица**, которая имеет порядок n.

$$\boldsymbol{A_{n\times n}} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \cdots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \cdots a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \cdots a_{3n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \ \ldots \ \ldots \end{pmatrix}$$

Пример квадратной матрицы

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}_{2\times 2}$$

Пример квадратной матрицы

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}_{3\times 3}$$

Основные типы матриц.

- Пусть $\boldsymbol{m} = 1$, тогда

матрица A – **матрица-строка**

$$A_{\mathbf{1}\times\boldsymbol{n}} = (a_{11}a_{12}a_{13}\dots a_{1n})_{\mathbf{1}\times\boldsymbol{n}}$$
$$= (a_1\ \ a_2\ \ a_3\dots a_n)_{\mathbf{1}\times\boldsymbol{n}}$$

Пример матрицы-строки

$$(3\quad 2\quad 3\quad 2\quad 1)_{1\times5}$$

Основные типы матриц.

- Пусть $\boldsymbol{n} = 1$, тогда

матрица A – **матрица-столбец**

$$A_{m \times 1} = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \dots \end{pmatrix} \qquad = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \dots \end{pmatrix}$$

Пример матрицы-столбца

$$\begin{pmatrix} -8 \\ 0 \\ 7 \\ -1 \end{pmatrix}_{4 \times 1}$$

Основные типы матриц.

- В квадратной матрице $A_{n\times n}$ элементы $\boldsymbol{a_{11}}, \boldsymbol{a_{22}}, \boldsymbol{a_{33}} \dots \boldsymbol{a_{nn}}$ образуют **главную диагональ матрицы А**.

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{a_{11}} & a_{12} & a_{13} \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \boldsymbol{a_{22}} & a_{23} \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & \boldsymbol{a_{33}} \cdots & a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots \quad \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} \cdots & \boldsymbol{a_{nn}} \end{pmatrix}_{n\times n}$$

Пример главной диагонали

$$\begin{pmatrix} \mathbf{-1} & 2 & 0 \\ 3 & \mathbf{-1} & 4 \\ 8 & 0 & \mathbf{3} \end{pmatrix}$$

- В квадратной матрице $A_{n\times n}$ элементы $\boldsymbol{a_{1n}}, \boldsymbol{a_{2n-2}}, \boldsymbol{a_{3n-3}} \dots \boldsymbol{a_{n1}}$ образуют **побочную диагональ матрицы А**.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots a_{1n-2} & a_{1n-1} & \boldsymbol{a_{1n}} \\ a_{21} & \cdots a_{2n-2} & \boldsymbol{a_{2n-1}} & a_{2n} \\ a_{31} & \cdots \boldsymbol{a_{3n-2}} & a_{3n-1} & a_{3n} \\ \dots \quad \dots & \dots & \dots & \dots \\ \boldsymbol{a_{n1}} & \cdots a_{nn-2} & a_{nn-1} & a_{nn} \end{pmatrix}_{n\times n}$$

Пример побочной диагонали

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 & \mathbf{0} \\ 3 & \mathbf{-1} & 4 \\ \mathbf{8} & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Основные типы матриц.

- Квадратная матрица называется **диагональной**, если все ее элементы, кроме, возможно, элементов главной диагонали, равны нулю.

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{a_{11}} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \boldsymbol{a_{22}} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \boldsymbol{a_{33}} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \boldsymbol{a_{nn}} \end{pmatrix}_{\boldsymbol{n\times n}}$$

Пример диагональной матрицы

$$\begin{pmatrix} \mathbf{-1} & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{0} & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{3} \end{pmatrix}$$

Основные типы матриц.

- Квадратная матрица называется **верхней треугольной** , если все ее элементы ниже главной диагонали равны нулю.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}_{n\times n}$$

- Квадратная матрица называется **нижней треугольной** , если все ее элементы выше главной диагонали равны нулю.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}_{n\times n}$$

Пример верхней треугольной матрицы

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Пример нижней треугольной матрицы

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 5 & 1 & 0 \\ 3 & 6 & 3 \end{pmatrix}$$

Основные типы матриц.

- Диагональная матрица называется **единичной**, если все элементы главной диагонали равны 1.

$$\begin{pmatrix} \mathbf{1} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \mathbf{1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{1} & \cdots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \cdots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \mathbf{1} \end{pmatrix}_{\boldsymbol{n \times n}}$$

- Единичная матрица является матричным аналогом единицы во множестве действительных чисел.
- Единичная матрица определяется **только для квадратных матриц**.

Основные типы матриц.

- **Нулевой** матрицей называется матрица порядка $\boldsymbol{m} \times \boldsymbol{n}$, все элементы которой равны 0.

$$\begin{pmatrix} \mathbf{0} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \mathbf{0} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{0} & \cdots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ddots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \mathbf{0} \end{pmatrix}_{\boldsymbol{m} \times \boldsymbol{n}}$$

- Нулевая матрица может быть квадратной, матрицей-строкой или матрицей-столбцом.
- Нулевая матрица есть матричный аналог нуля во множестве действительных чисел.

Основные типы матриц.

- Матрица $\boldsymbol{A^T}_{\boldsymbol{n\times m}}$ называется **транспонированной** к матрице $\boldsymbol{A_{m\times n}}$, если ее столбцы являются соответствующими по номеру строками матрицы $\boldsymbol{A_{m\times n}}$.
- Если матрица А имеет порядок m×n, то транспонированная матрица имеет порядок n×m.

Пример транспонирования матрицы

$$A_{2\times 3} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 0 & 4 & 7 \end{pmatrix}, \quad {A^T}_{3\times 2} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 4 \\ 5 & 7 \end{pmatrix}$$

Основные типы матриц.

- Матрица A называется симметричной, если A=A^T. На главной диагонали симметричной матрицы могут стоять любые элементы, а симметрично относительно главной диагонали должны стоять одинаковые элементы, то есть $a_{ij} = a_{ji}$.
- Матрица A называется кососимметричной, если A= - A^T. На главной диагонали кососимметричной матрицы всегда стоят нули, а симметрично относительно главной диагонали $a_{ij} = -a_{ji}$
- Симметричная и кососимметричная матрицы всегда квадратные.

Пример симметричной матрицы

$$A_{2\times 2} = \begin{pmatrix} 1 & 8 \\ 8 & 2 \end{pmatrix},$$

$$A^T{}_{2\times 2} = \begin{pmatrix} 1 & 8 \\ 8 & 2 \end{pmatrix}$$

Пример кососимметричной матрицы

$$A_{2\times 2} = \begin{pmatrix} 0 & -8 \\ 8 & 0 \end{pmatrix},$$

$$A^T{}_{2\times 2} = \begin{pmatrix} 0 & 8 \\ -8 & 0 \end{pmatrix}$$

Историческая справка.

- Впервые матрицы упоминались ещё в древнем Китае, называясь тогда «волшебным квадратом». Основным применением матриц было решение линейных уравнений. Так же, волшебные квадраты были известны чуть позднее у арабских математиков, примерно тогда появился принцип сложения матриц.
- После развития теории определителей в конце 17-го века, Габриэль Крамер начал разрабатывать свою теорию в 18-ом столетии и опубликовал «правило Крамера» в 1751 году. Примерно в этом же промежутке времени появился «метод Гаусса». Теория матриц начала своё существование в середине XIX века в работах Уильяма Гамильтона и Артура Кэли. Фундаментальные результаты в теории матриц принадлежат Вейерштрассу, Жордану, Фробениусу. Термин «матрица» ввел Джеймс Сильвестр в 1850 г.
- На сегодняшний день матрицы широко применяются в математике для компактной записи систем линейных алгебраических или дифференциальных уравнений. В этом случае, количество строк матрицы соответствует числу уравнений, а количество столбцов — количеству неизвестных. В результате решение систем линейных уравнений сводится к операциям над матрицами.