

Матрицы. Типы матриц.

Презентацию подготовил:

Чавкина Т.В.

преподаватель математики

ГБУ ПО РМ "РЖПТ им. А.П. Байкузова"

o Прямоугольную таблицу A состоящую из m строк и n столбцов, элементами которой являются действительные числа, называют **числовой матрицей порядка $m \times n$** (читается « m на n »).

$$A_{m \times n} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & a_{ij} & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}_{m \times n}$$

- Действительное число a_{ij} , где i – номер строки, j – номер столбца на пересечении которых стоит это число в матрице, называется элементом матрицы A .

$$\begin{array}{c} \begin{matrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{matrix} \\ \begin{matrix} \text{\color{red} } i\text{-ая строка} \\ \text{\color{red} } j\text{-й столбец} \end{matrix} \end{array} \left(\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{matrix} \right)_{m \times n}$$

a_{ij}

Основные типы матриц.

○ Пусть $m = n$, тогда

матрица A – квадратная матрица, которая имеет порядок n .

$$A_{n \times n} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}$$

Пример квадратной матрицы

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}_{2 \times 2}$$

Пример квадратной матрицы

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}_{3 \times 3}$$

Основные типы матриц.

o Пусть $m = 1$, тогда

матрица A – матрица-строка

$$\begin{aligned} A_{1 \times n} &= (a_{11} a_{12} a_{13} \dots a_{1n})_{1 \times n} \\ &= (a_1 \ a_2 \ a_3 \ \dots \ a_n)_{1 \times n} \end{aligned}$$

Пример матрицы-строки

$$(3 \ 2 \ 3 \ 2 \ 1)_{1 \times 5}$$

Основные типы матриц.

o Пусть $n = 1$, тогда
матрица A – матрица-столбец

$$A_{m \times 1} = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \dots \\ \dots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \dots \\ \dots \end{pmatrix}$$

Пример матрицы-столбца

$$\begin{pmatrix} -8 \\ 0 \\ 7 \\ -1 \end{pmatrix}_{4 \times 1}$$

Основные типы матриц.

- В квадратной матрице $A_{n \times n}$ элементы $a_{11}, a_{22}, a_{33} \dots a_{nn}$ образуют главную диагональ матрицы A .

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}_{n \times n}$$

Пример главной диагонали

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 3 & -1 & 4 \\ 8 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

- В квадратной матрице $A_{n \times n}$ элементы $a_{1n}, a_{2n-2}, a_{3n-3} \dots a_{n1}$ образуют побочную диагональ матрицы A .

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n-2} & a_{1n-1} & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & a_{2n-2} & a_{2n-1} & a_{2n} \\ a_{31} & \dots & a_{3n-2} & a_{3n-1} & a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn-2} & a_{nn-1} & a_{nn} \end{pmatrix}_{n \times n}$$

Пример побочной диагонали

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 3 & -1 & 4 \\ 8 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Основные типы матриц.

- Квадратная матрица называется **диагональной**, если все ее элементы, кроме, возможно, элементов главной диагонали, равны нулю.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}_{n \times n}$$

Пример диагональной матрицы

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Основные типы матриц.

- Квадратная матрица называется **верхней треугольной**, если все ее элементы ниже главной диагонали равны нулю.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}_{n \times n}$$

- Квадратная матрица называется **нижней треугольной**, если все ее элементы выше главной диагонали равны нулю.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & \dots & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}_{n \times n}$$

Пример верхней
треугольной матрицы

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Пример нижней
треугольной матрицы

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 5 & 1 & 0 \\ 3 & 6 & 3 \end{pmatrix}$$

Основные типы матриц.

- Диагональная матрица называется **единичной**, если все элементы главной диагонали равны 1.

$$\begin{pmatrix} \mathbf{1} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \mathbf{1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{1} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \mathbf{1} \end{pmatrix}_{n \times n}$$

- Единичная матрица является матричным аналогом единицы во множестве действительных чисел.
- Единичная матрица определяется **только для квадратных матриц**.

Основные типы матриц.

- Нулевой матрицей называется матрица порядка $m \times n$, все элементы которой равны 0.

$$\begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \end{pmatrix}_{m \times n}$$

- Нулевая матрица может быть квадратной, матрицей-строкой или матрицей-столбцом.
- Нулевая матрица есть матричный аналог нуля во множестве действительных чисел.

Основные типы матриц.

- Матрица $A^T_{n \times m}$ называется транспонированной к матрице $A_{m \times n}$, если ее столбцы являются соответствующими по номеру строками матрицы $A_{m \times n}$.
- Если матрица A имеет порядок $m \times n$, то транспонированная матрица имеет порядок $n \times m$.

Пример транспонирования матрицы

$$A_{2 \times 3} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 0 & 4 & 7 \end{pmatrix}, \quad A^T_{3 \times 2} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 4 \\ 5 & 7 \end{pmatrix}$$

Основные типы матриц.

- Матрица A называется симметричной, если $A=A^T$. На главной диагонали симметричной матрицы могут стоять любые элементы, а симметрично относительно главной диагонали должны стоять одинаковые элементы, то есть $a_{ij} = a_{ji}$.
- Матрица A называется кососимметричной, если $A = -A^T$. На главной диагонали кососимметричной матрицы всегда стоят нули, а симметрично относительно главной диагонали $a_{ij} = -a_{ji}$.
- Симметричная и кососимметричная матрицы всегда квадратные.

Пример симметричной матрицы

$$A_{2 \times 2} = \begin{pmatrix} 1 & 8 \\ 8 & 2 \end{pmatrix},$$

$$A^T_{2 \times 2} = \begin{pmatrix} 1 & 8 \\ 8 & 2 \end{pmatrix}$$

Пример кососимметричной матрицы

$$A_{2 \times 2} = \begin{pmatrix} 0 & -8 \\ 8 & 0 \end{pmatrix},$$

$$A^T_{2 \times 2} = \begin{pmatrix} 0 & 8 \\ -8 & 0 \end{pmatrix}$$

Историческая справка.

- 0 Впервые матрицы упоминались ещё в древнем Китае, называясь тогда «волшебным квадратом». Основным применением матриц было решение линейных уравнений. Так же, волшебные квадраты были известны чуть позднее у арабских математиков, примерно тогда появился принцип сложения матриц.
- 0 После развития теории определителей в конце 17-го века, Габриэль Крамер начал разрабатывать свою теорию в 18-ом столетии и опубликовал «правило Крамера» в 1751 году. Примерно в этом же промежутке времени появился «метод Гаусса». Теория матриц начала своё существование в середине XIX века в работах Уильяма Гамильтона и Артура Кэли. Фундаментальные результаты в теории матриц принадлежат Вейерштрассу, Жордану, Фробениусу. Термин «матрица» ввел Джеймс Сильвестр в 1850 г.
- 0 На сегодняшний день матрицы широко применяются в математике для компактной записи систем линейных алгебраических или дифференциальных уравнений. В этом случае, количество строк матрицы соответствует числу уравнений, а количество столбцов — количеству неизвестных. В результате решение систем линейных уравнений сводится к операциям над матрицами.