Функции математической логики

- Функция $F(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ множества логических переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$, принимающая значения только «истина» или «ложь», называется ***логической функцией.***
- Логические переменные и функции называются ***вторичными высказываниями***, или ***молекулами.***

Логические переменные

- Переменные X_1 = a>0 и X_2 = a<2, где a действительное число.
- При a=-3 X_1 - ложь, X_2 – истинно
- При a=1 X_1 - истинно, X_2 – истинно
- При a=5 X_1 -истинно, X_2 –ложь
- $F(X_1,X_2)$ истинна если $0<a<2$

Задание функции таблицей

x1	x2	x3	F
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	1	0
1	0	0	1
1	0	1	1
1	1	0	0
1	1	1	0

Для n логических переменных всего 2^n комбинаций, а общее число значений логической функции F равно 2^{2n}

- Наборы, при которых $F = 1$, называются ***единичными*** наборами функции и наборы при которых $F=0$, называются ***нулевыми*** наборами.
- Переменная x_i называется ***несущественной*** или ***фиктивной***, если значение функции при любом наборе других переменных не зависит от значения x_i
- Такую переменную можно исключить.

Унарная функция (операция)

x	F_0	F_1	F_2	F_3
0	0	0	1	1
1	0	1	0	1

F_0 F_3 не зависят от значения x, т. е. x фиктивная переменная для них .

$F_1(x)=x$

$F_2(x) = \overline{x}$ отрицание x или функция «НЕ»

Бинарная функция (операция)

x_1	x_2	F_0	F_1	F_2	F_3	F_4	F_5	F_6	F_7	F_8	F_9	F_{10}	F_{11}	F_{12}	F_{13}	F_{14}	F_{15}
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1
0	1	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1
1	0	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1
1	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1

Конъюнкция

Функция F_1 называется конъюнкцией (операцией «И») x_1 и x_2 и обозначается $x_1\&x_2$ или $x_1{}_\wedge x_2$.

Функция имеет значение «Истина», если x_1 и x_2 истинны, т.е. $x_1=1$ и $x_2=1$.

Дизъюнкция

Функция F_7 называется дизъюнкцией (операцией «ИЛИ») x_1 и x_2 и обозначается $x_1 \vee x_2$
Функция имеет значение «Истина», если хотя бы одна из переменных x_1, x_2 истинно.

Разделительная дизъюнкция

Функция F_6 называется разделительной дизъюнкцией x_1 и x_2 исключающим «ИЛИ» и обозначается $\oplus$.

Функция имеет значение «Истина», если один операнд x_1 или x_2 истинна, но не оба вместе.

Эквивалентность

Функция F_9 называется эквивалентностью или равнозначностью и обозначается $x_1 \sim x_2$ или $x_1 <==> x_2$

Функция имеет значение «Истина», когда оба ее аргумента истинны либо ложны.

Стрелка Пирса

Функция F_8 называется стрелкой Пирса и обозначается $x_1 \downarrow x_2$

Функция имеет значение «Истина», если ее переменные x_1, x_2 ложны.

Эта функция инверсна (противоположна) функции F_7

Импликация

Функция F_{13} называется импликацией и обозначается $x_1 ==> x_2$

Функция имеет значение «ложь», если из «истины» следует «ложь».

По отношению к доказательству эта функция соответствует фразе «если А…, то В…»

Штрих Шеффера

Функция F_{14} называется штрих Шеффера и обозначается $x_1 \mid x_2$ инверсна функции $F_{1.}$

Ее истинное значение утверждает, что «кто-то лжет».

Функция имеет значение «ложь», если оба операнда истинны.

Остальные функции названий не имеют, и выражаются через рассмотренные выше.

Мажоритарная функция

x1	x2	x3	Fm	$\overline{\text{Fm}}$
0	0	0	0	1
0	0	1	0	1
0	1	0	0	1
0	1	1	1	0
1	0	0	0	1
1	0	1	1	0
1	1	0	1	0
1	1	1	1	0

Функция принимает значение «Истина» если два или три ее аргумента истинны

Преобразование логических формул

На базе элементарных операций можно строить формулы и вычислять их. Например

$$(x_3 \vee x_1) \oplus (x_1 \wedge (x_1 \oplus x_2)) = 1 \quad \text{при} \quad x_1 = 1, \quad x_2 = 1, \quad x_3 = 0$$

$$\text{т.к.} \quad x_3 \vee x_1 = 1; \quad x_1 \wedge (x_1 \oplus x_2) = x_1 \wedge 0 = 0; \quad 1 \oplus 0 = 1$$

Формулы, представляющие одну и ту же логическую функцию, называются *эквивалентными* или *равносильными.* *Обозначается* F≅H

Например $F_{14} \cong x_1 \vee \overline{x_2} \cong \overline{x_1 \wedge x_2}$