

***Функции
математической
ЛОГИКИ***

- Функция $F(x_1, x_2, \dots, x_n)$ множества логических переменных x_1, x_2, \dots, x_n , принимающая значения только «истина» или «ложь», называется **логической функцией**.
- Логические переменные и функции называются **вторичными высказываниями**, или **молекулами**.

Логические переменные

- Переменные $X_1 = a > 0$ и $X_2 = a < 2$, где a действительное число.
- При $a = -3$ X_1 - ложь, X_2 - истинно
- При $a = 1$ X_1 - истинно, X_2 - истинно
- При $a = 5$ X_1 - истинно, X_2 - ложь
- $F(X_1, X_2)$ истинна если $0 < a < 2$

Задание функции таблицей

x1	x2	x3	F
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	1	0
1	0	0	1
1	0	1	1
1	1	0	0
1	1	1	0

Для n логических переменных всего 2^n комбинаций, а общее число значений логической функции F равно 2^{2n}

- Наборы, при которых $F = 1$, называются **единичными** наборами функции и наборы при которых $F=0$, называются **нулевыми** наборами.
- Переменная x_i называется **несущественной** или **фиктивной**, если значение функции при любом наборе других переменных не зависит от значения x_i .
- Такую переменную можно **исключить**.

Унарная функция (операция)

x	F ₀	F ₁	F ₂	F ₃
0	0	0	1	1
1	0	1	0	1

F₀ F₃ не зависят от значения x, т. е. x фиктивная переменная для них .

$$F_1(x) = x$$

$$F_2(x) = \overline{x} \quad \text{отрицание } x \quad \text{или функция «НЕ»}$$

Конъюнкция

Функция F_1 называется конъюнкцией (операцией «И») x_1 и x_2 и обозначается $x_1 \& x_2$ или $x_1 \wedge x_2$.

Функция имеет значение «Истина», если x_1 и x_2 истинны, т.е. $x_1=1$ и $x_2=1$.

Дизъюнкция

Функция F_7 называется дизъюнкцией (операцией «ИЛИ») x_1 и x_2 и обозначается $x_1 \vee x_2$

Функция имеет значение «Истина», если хотя бы одна из переменных x_1 , x_2 истинно.

Разделительная дизъюнкция

Функция F_6 называется разделительной дизъюнкцией x_1 и x_2 исключаяющим «ИЛИ» и обозначается \oplus .

Функция имеет значение «Истина», если один операнд x_1 или x_2 истинна, но не оба вместе.

Эквивалентность

Функция F_9 называется эквивалентностью или равнозначностью и обозначается $x_1 \sim x_2$ или $x_1 \Leftrightarrow x_2$

Функция имеет значение «Истина», когда оба ее аргумента истинны либо ложны.

Стрелка Пирса

Функция F_8 называется стрелкой Пирса и обозначается $x_1 \downarrow x_2$

Функция имеет значение «Истина», если ее переменные x_1 , x_2 ложны.

Эта функция инверсна (противоположна) функции F_7

Импликация

Функция F_{13} называется импликацией и обозначается $x_1 \implies x_2$

Функция имеет значение «ложь», если из «истины» следует «ложь».

По отношению к доказательству эта функция соответствует фразе «если А..., то В...»

Штрих Шеффера

Функция F_{14} называется штрих Шеффера и обозначается $x_1 \downarrow x_2$ инверсна функции F_1 .

Ее истинное значение утверждает, что «кто-то лжет».

Функция имеет значение «ложь», если оба операнда истинны.

Остальные функции названий не имеют, и выражаются через рассмотренные выше.

Мажоритарная функция

x1	x2	x3	Fm	\overline{Fm}
0	0	0	0	1
0	0	1	0	1
0	1	0	0	1
0	1	1	1	0
1	0	0	0	1
1	0	1	1	0
1	1	0	1	0
1	1	1	1	0

Функция
принимает
значение
«Истина» если два
или три ее
аргумента
ИСТИННЫ

Преобразование логических формул

На базе элементарных операций можно строить формулы и вычислять их.

Например
 $(x_3 \vee x_1) \oplus (x_1 \wedge (x_1 \oplus x_2)) = 1$ при $x_1 = 1, x_2 = 1, x_3 = 0$
т.к. $x_3 \vee x_1 = 1; x_1 \wedge (x_1 \oplus x_2) = x_1 \wedge 0 = 0; 1 \oplus 0 = 1$

Формулы, представляющие одну и ту же логическую функцию, называются **эквивалентными** или **равносильными**.

Обозначается $F \approx H$

Например $F_{14} \approx x_1 \vee x_2 \approx \overline{x_1 \wedge x_2}$