

---

# Решение треугольников

---

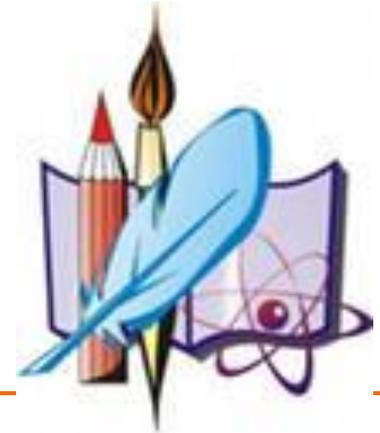


Урок по геометрии в 9 классе

учитель математики Бурмистрова Елена Сергеевна

# Цели и задачи урока:

- Обобщить и закрепить знания теорем синусов и косинусов при решении задач
- Отработать нахождение неизвестных элементов в треугольнике
- Развивать навыки самостоятельной работы и самооценки
- Воспитывать интерес к математике



# Ход урока

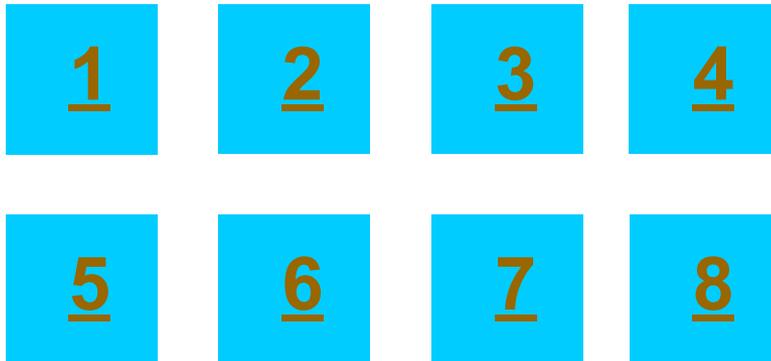
- Оргмомент
- Устная разминка
- Закрепление изученного материала
- Промежуточный контроль (тест)
- Домашнее задание



# Устная разминка

(теорема СИНУСОВ и КОСИНУСОВ)

*Проверь себя !*

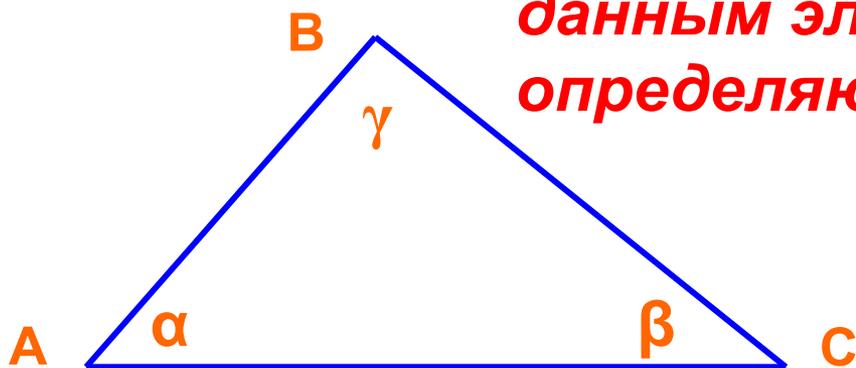


Продолжи предложение:

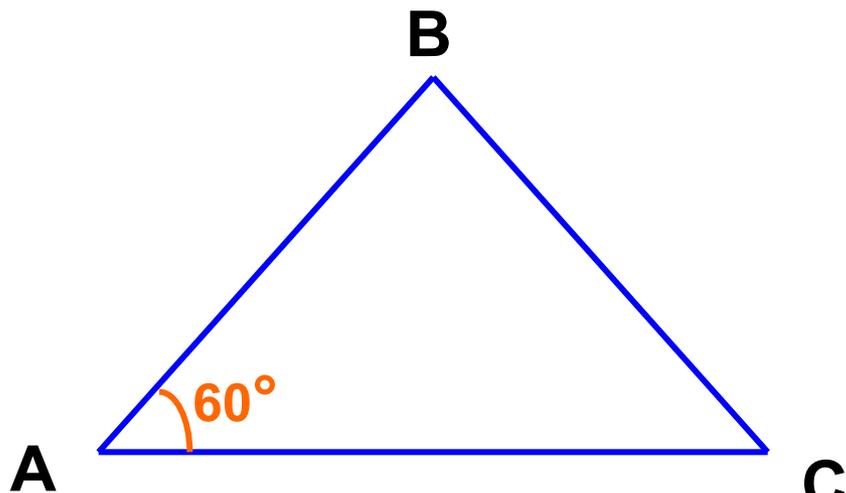
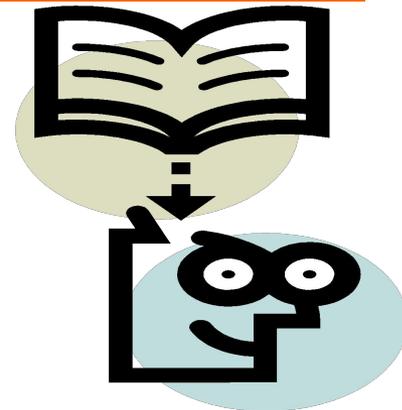
Решение треугольников - ...



**нахождение всех его шести элементов (трех сторон и трех углов) по каким – нибудь трем данным элементам, определяющим треугольник**



# Вычисли устно



*Дано:*  $D = 8$   
 $\angle BAC = 60^\circ$

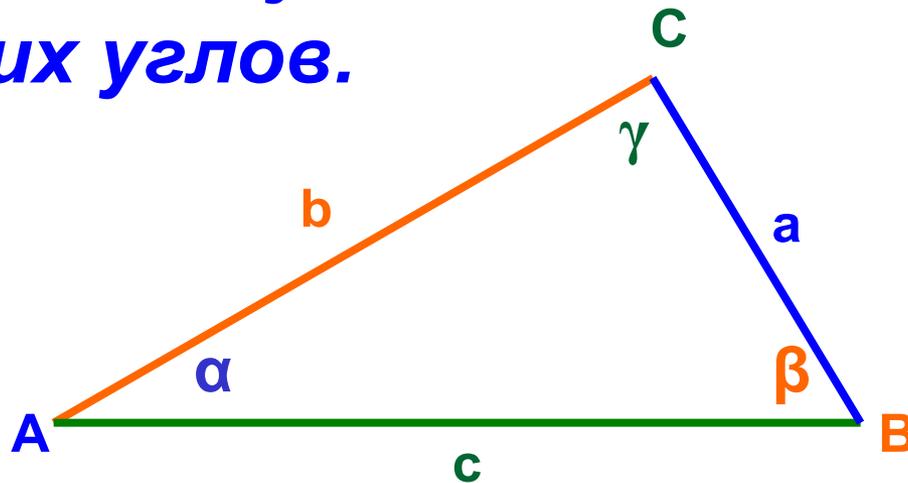
*Найти:* BC

*Ответ:*  $4\sqrt{3}$



# Теорема синусов

*Стороны треугольника пропорциональны синусам противолежащих углов.*

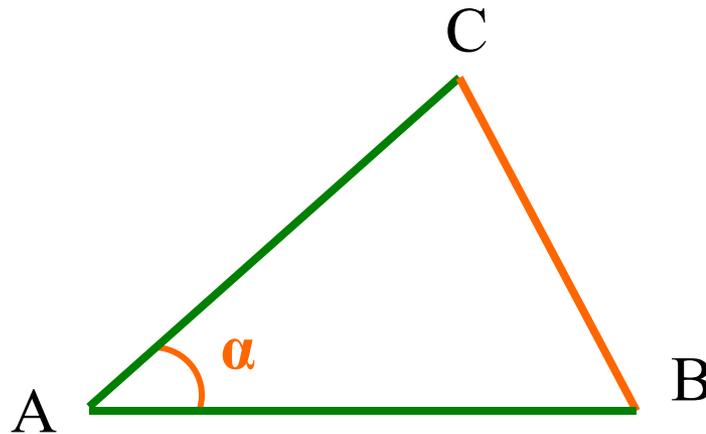


$$a/\sin\alpha = b/\sin\beta = c/\sin\gamma$$



# Теорема косинусов

*Квадрат любой стороны треугольника равен сумме квадратов двух других сторон без удвоенного произведения этих сторон на косинус угла между ними.*



$$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB \cdot AC \cdot \cos \alpha$$

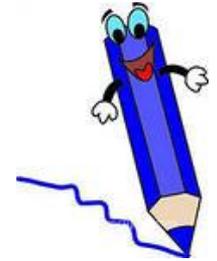


Соединить линиями части фраз, соответствующие друг другу ( в треугольнике DEF угол E – наибольший ).

Если  $\cos E > 0$ , то *треугольник DEF – прямоугольный.*  
Если  $\cos E = 0$ , то *треугольник DEF – тупоугольный.*  
Если  $\cos E < 0$ , то *треугольник DEF – остроугольный.*



# Заполнить пропуски в равенствах.

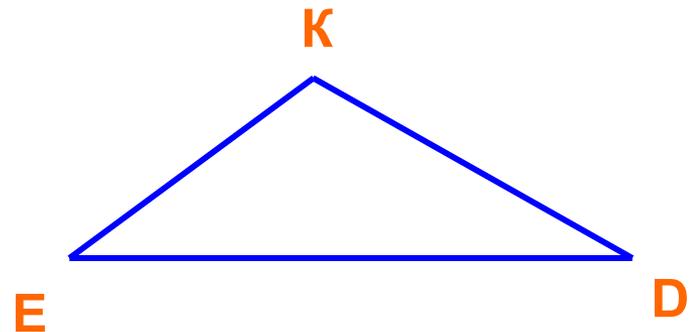


Дан треугольник DEK.

а)  $\frac{DE}{\sin K} = \frac{EK}{\sin D}$

б)  $\frac{K \cdot D}{\sin E} = \frac{KE}{\sin D}$

в)  $DK \cdot \sin K = ED \cdot \sin E.$



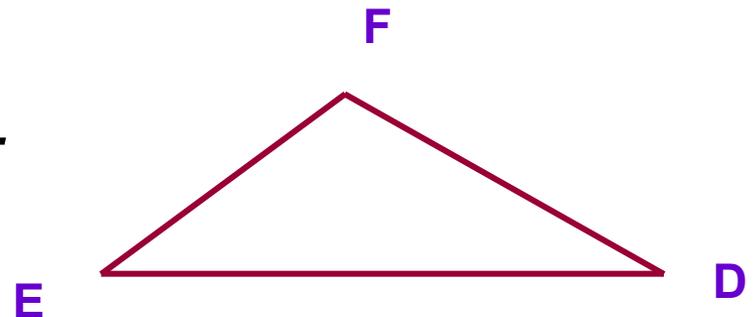
**Дан треугольник DEF.  
Выбрать верное равенство.**

a)  $DE^2 = EF^2 + DF^2 - EF \cdot DF \cdot \cos E$  ;

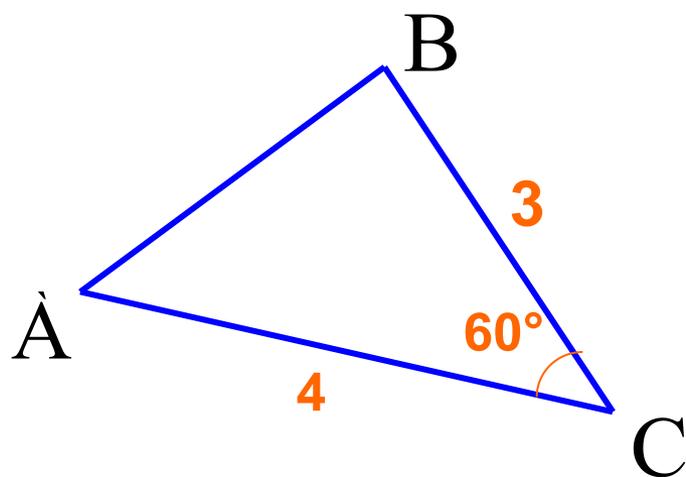
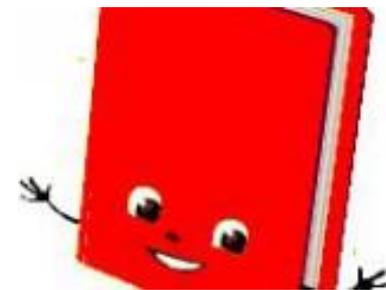
→ б)  $EF^2 = DE^2 + DF^2 - 2 \cdot DE \cdot DF \cdot \cos D$  ;

в)  $DF^2 = DE^2 + EF^2$  ;

г)  $DE^2 = EF^2 + DF^2 - 2 \cdot EF \cdot DF \cdot \cos D$ .



# Вычисли устно



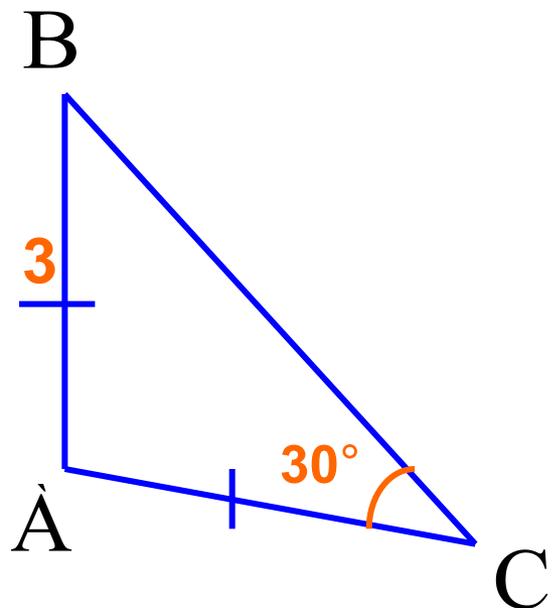
**Дано :**  $AC=4$ ,  $BC=3$   
 $\angle ACB=60^\circ$

**Найти :**  $AB$

**Ответ :**  $AB = \sqrt{13}$



# Вычисли устно



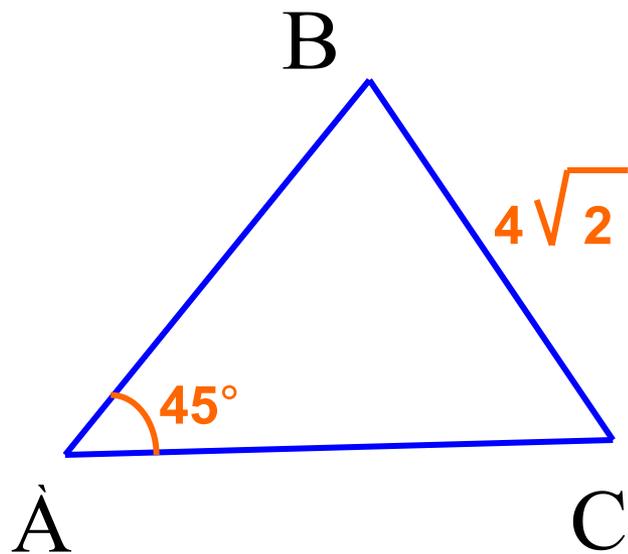
**Дано:**  $AB=3$ ,  $AB=AC$   
 $\angle ACB=30^\circ$

**Найти:** BC

**Ответ:**  $BC = 3\sqrt{2}$



# Вычисли устно



**Дано:**  $BC = 4\sqrt{2}$   
 $\angle BAC = 45^\circ$

**Найти:** R

**Ответ :** 4

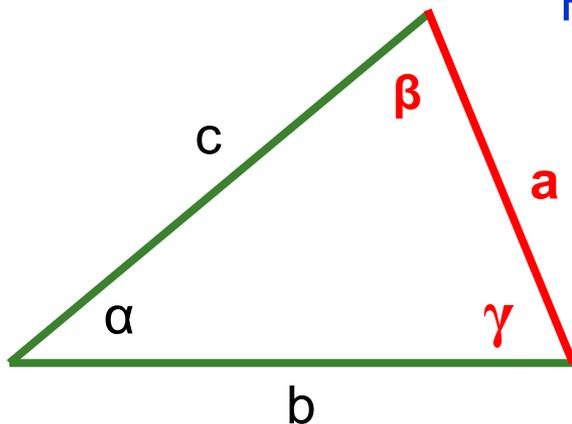


# Решение треугольников

Задача № 1.

Дано:  $a = 20$  см,  $\gamma = 50^\circ$ ,  $\beta = 60^\circ$

Найти:  $\alpha$ ,  $b$ ,  $c$ .



Решение:

$$\alpha = 180^\circ - (\beta + \gamma)$$

$$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta}$$

$$b = \frac{a \cdot \sin \beta}{\sin \alpha}$$

$$\alpha = 180^\circ - (50^\circ + 60^\circ) = 70^\circ$$

$$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{c}{\sin \gamma}$$

$$c = \frac{a \cdot \sin \gamma}{\sin \alpha}$$

$$b = (20 \cdot \sin 60^\circ) / \sin 70^\circ \approx (20 \cdot 0,866) / 0,9397 \approx 18,4(\text{см})$$

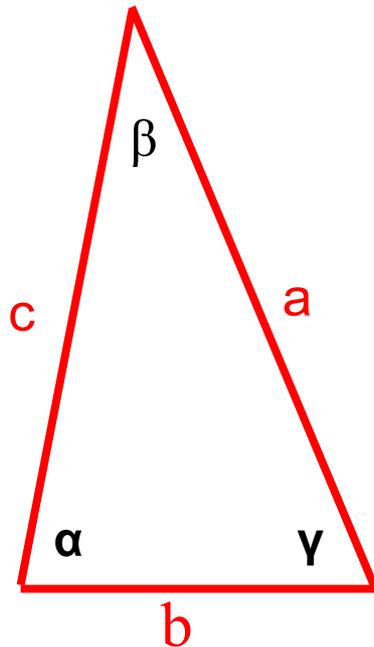
$$c = (20 \cdot \sin 50^\circ) / \sin 70^\circ \approx (20 \cdot 0,766) / 0,9397 \approx 16,3(\text{см})$$

**Ответ:**  $70^\circ$ ; 18,4 см; 16,3 см.



# Решение треугольников

Задача №2.



Дано:  $a = 7$  см,  $b = 2$  см,  $c = 8$  см

Найти:  $\alpha, \beta, \gamma$

Решение:

$$\cos \alpha = (b^2 + c^2 - a^2) / (2 \cdot b \cdot c)$$

$$\cos \alpha = (4 + 64 - 49) / (2 \cdot 2 \cdot 8) \approx 0,5938$$

$$\alpha \approx 53^\circ 34'$$

$$\cos \beta = (a^2 + c^2 - b^2) / (2 \cdot a \cdot c)$$

$$\cos \beta = (49 + 64 - 4) / (2 \cdot 7 \cdot 8) \approx 0,9732$$

$$\beta \approx 13^\circ 18'$$

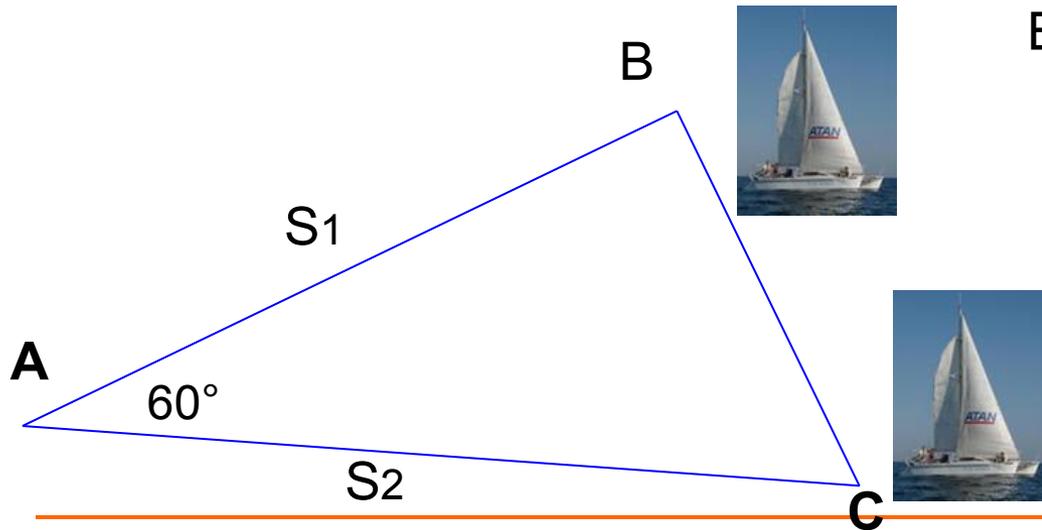
$$\gamma = 180^\circ - (\alpha + \beta); \quad \gamma = 180^\circ - (53^\circ 34' + 13^\circ 18') = 113^\circ 08'$$

Ответ:  $53^\circ 34'$ ;  $13^\circ 18'$ ;  $113^\circ 08'$ .



## Задача №3

Две яхты начинают движение одновременно из одного и того же пункта и двигаются равномерно по прямым, пересекающимися под углом  $60^\circ$ . Скорость первой  $70$  км/ч, второй  $60$  км/ч. Вычислить на каком расстоянии друг от друга будут находиться яхты через  $3$  часа.



## Решение:

$$S_1 = 70 \cdot 3 = 210 \text{ (км/ч)}$$

$$S_2 = 60 \cdot 3 = 180 \text{ (км/ч)}$$

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2 \cdot AB \cdot AC \cdot \cos A$$

$$BC^2 = 210^2 + 180^2 - 2 \cdot 210 \cdot 180 \cdot 0,5$$

$$BC^2 = 38700$$

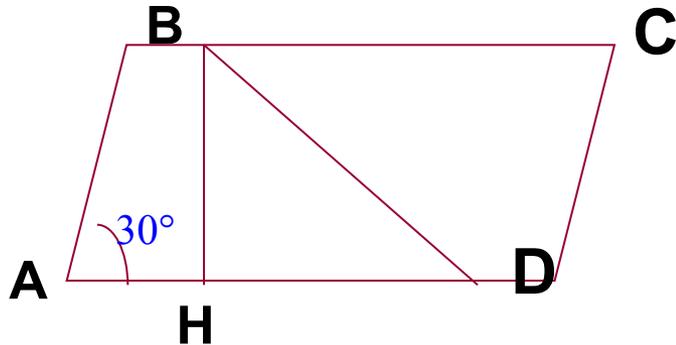
$$BC \approx 197 \text{ км (т.к. } BC > 0)$$

Ответ: 197 км.

# Подготовка к экзаменам



Площадь параллелограмма равна  $16\sqrt{3}$ ,  $\angle A=30^\circ$ , а сторона  $BC=4\sqrt{3}$ . Найдите диагональ  $BD$ .



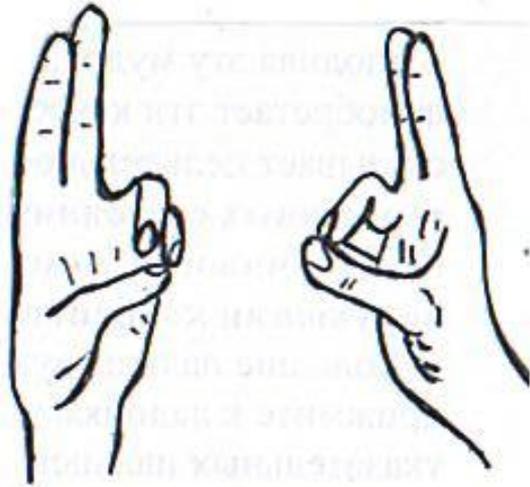
Решение:

1.  $BH \perp AD$
2.  $S = AD \cdot BH$   
 $16\sqrt{3} = 4\sqrt{3} \cdot BH$   
 $BH = 4$
3.  $\triangle ABH$ -прямоугольный  
 $AB = 4 \cdot 2 = 8$  (катет против угла  $30^\circ$ )
4.  $\triangle ABD$ , по т. косинусов:  
 $BD^2 = AB^2 + AD^2 - 2AB \cdot AD \cdot \cos 30^\circ$   
 $BD^2 = 64 + 48 - 2 \cdot 8 \cdot 4\sqrt{3} \cdot \sqrt{3}/2$   
 $BD^2 = 16$   
т.к  $BD > 0$ , то  $BD = 4$



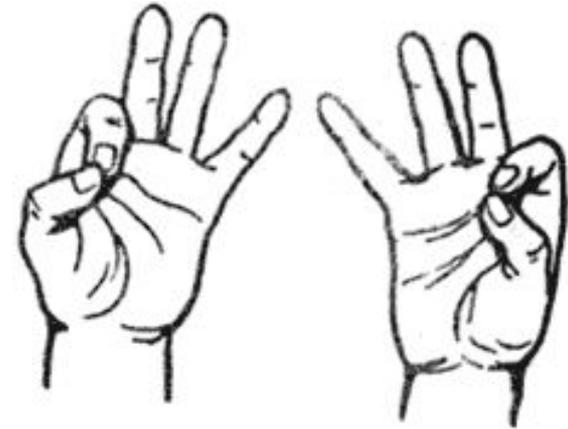
# Физкультминутка

**Мудра Жизни.**



**Подушечки мизинца, безымянного и большого пальцев каждой руки соедините вместе, средние и указательные пальцы держите выпрямленными.**

**Мудра Знания.**



**Указательный палец легко соединяется с подушечкой большого пальца. Оставшиеся три пальца выпрямлены (не напряжены).**



*Герберт Спенсер, английский философ, говорил: «Дороги не те знания, которые откладываются в мозгу, как жир, дороги те, которые превращаются в умственные мышцы».*



# Тест



### Вариант 1.

1. Выбери верное утверждение:
- а) Квадрат любой стороны треугольника равен сумме квадратов двух других его сторон;
  - б) Квадрат любой стороны треугольника равен сумме квадратов двух других сторон без удвоенного произведения этих сторон на косинус угла между ними;
  - в) Квадрат любой стороны треугольника равен сумме квадратов двух других сторон, минус произведение этих сторон на косинус угла между ними.
2. Для данного треугольника справедливо равенство...
- а)  $\sin \alpha : a = \sin \gamma : b$
  - б)  $\sin \gamma : a = \sin \alpha : b$
  - в)  $a : b = \sin \alpha : \sin \gamma$
  - г) не ответа
3. В треугольнике CDE известны длины сторон CD и CE. Величину какого угла необходимо знать, чтобы найти длину стороны DE?
- а)  $\angle C$ ,
  - б)  $\angle D$ ,
  - в)  $\angle E$ .
4. Стороны треугольника 5 см и 4 см, а угол между ними равен  $30^\circ$ . Найти третью сторону треугольника.
- а)  $\sqrt{7}$  см
  - б)  $\sqrt{3}$  см
  - в) 5 см;
  - г) 3 см.
5. Определить вид треугольника со сторонами 5, 6 и 7 см.
- а) остроугольный;
  - б) равнобедренный;
  - в) тупоугольный;
  - г) прямоугольный.

### Вариант 2.

1. Выбери верное утверждение:
- а) Стороны треугольника пропорциональны синусам противолежащих углов;
  - б) Стороны треугольника обратно пропорциональны синусам противолежащих углов;
  - в) Стороны треугольника пропорциональны синусам прилежащих углов.
2. Для данного треугольника справедливо равенство...
- а)  $a^2 = b^2 + c^2 - b \cdot c \cdot \cos \alpha$
  - б)  $b^2 = a^2 + c^2 - 2 a \cdot c \cdot \cos \beta$
  - в)  $a^2 = b^2 + c^2 - 2 b \cdot c \cdot \cos \beta$
  - г) нет ответа
3. В треугольнике MNK известны длины сторон MN и NK. Величину какого угла необходимо знать, чтобы найти длину стороны MK?
- а)  $\angle M$ ,
  - б)  $\angle N$ ,
  - в)  $\angle K$ .
4. Стороны треугольника 5 см и 3 см, а угол между ними  $60^\circ$ . Найдите третью сторону треугольника.
- а) 2 см
  - б)  $\sqrt{23}$  см
  - в)  $\sqrt{19}$  см
  - г) 4,5 см.
5. Определить вид треугольника со сторонами 4, 6 и 9 см.
- а) остроугольный;
  - б) равнобедренный;
  - в) тупоугольный;
  - г) прямоугольный.



# ОТВЕТЫ К ТЕСТУ

## 1 вариант

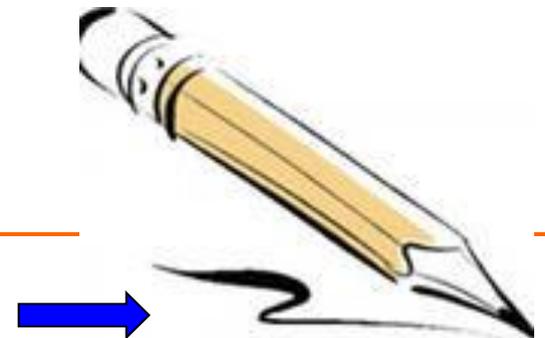
- 1) б
  - 2) г
  - 3) а
  - 4) г
- 

5) а

## 2 вариант

- 1) а
  - 2) б
  - 3) б
  - 4) в
- 

5) в



---

СПАСИБО ЗА ВИНОК

