13 СПОСОБОВ РЕШЕНИЯ КВАДРАТНЫХ УРАВНЕНИЙ

Введение

Практически все, что окружает современного человека - это все так или иначе связано с математикой. А последние достижения в физике, технике и информационных технологиях не оставляют никакого сомнения, что и в будущем положение вещей останется прежним. Решение многих практических задач сводится к решению различных видов уравнений, которые достаточно часто сводятся к уравнениям второй степени (квадратным).

Актуальность работы:

И сейчас квадратные уравнения очень актуальны. Одна из основных тем ОГЭ – это квадратные уравнения.

На уроках алгебры, геометрии, физики мы очень часто встречаемся с решением квадратных уравнений, они используются для решения задач в 10 и 11 класса, знание данной темы поможет при сдаче ЕГЭ по этим предметам.

Поэтому каждый ученик должен уметь верно и рационально решать квадратные уравнения, это также может пригодится при решении более сложных задач.

Гипотеза: любое квадратное уравнение можно решить всеми существующими способами.
Объект исследования: квадратные уравнения.
Предмет исследования: способы решения уравнений второй степени.

Цель работы: выявитьспособы решения уравнения второй степени и рассмотреть применение данных способов решения квадратных уравнений на конкретных примерах.

Задачи:

1)Проследить историю развития теории и практики решения квадратных уравнений.

2)Описать технологии различных существующих способов решения квадратных уравнений.

3)Показать применение данных способов при решении уравнений

4)Подобрать тренировочные задания для отработки изученных приемов.

Квадратные уравнения.

- Квадратным уравнением называют уравнение вида $ax^2+bx+c=0$, где коэффициенты a, b, c - любые действительные числа, причём, $a \neq 0$. Коэффициенты a, b, c, различают по названиям: a - первый или старший коэффициент; b - второй или коэффициент при x; c - свободный член, свободен от переменной x.

История развития теории и практики решения квадратных уравнений

- Квадратные уравнения - это фундамент, на котором покоится величественное здание алгебры. Умение решать уравнения не только имеет теоретическое значение для познания естественных законов, но и служит практическим целям.
- Уравнения второй степени умели решать еще в древнем Вавилоне. Математики Древней Греции решали квадратные уравнения геометрически; например, Евклид - при помощи деления отрезка в среднем и крайнем отношениях. Задачи, приводящие к квадратным уравнениям, рассматриваются во многих древних математических рукописях и трактах.

Различные способы решения квадратных уравнений.

- ***Способ 1: Решение квадратных уравнений по формуле:***

Корни уравнения $ax^2 + bx + c = 0$, $a \neq 0$ можно найти по формуле

$$x_{1,2} = \frac{-в \pm \sqrt{в^2 - 4ac}}{2a}$$

, где выражение

$b^2 - 4ac = D$- это дискриминант.

Способ 2: Решение квадратных уравнений по формуле с четным коэффициентом.

- Если второй коэффициент уравнения $b = 2k$ – четное число, то формулу корней $x_{1,2} = \frac{-в \pm \sqrt{в^2 - 4ac}}{2a}$ можно записать в виде $x_{1,2} = \frac{-к \pm \sqrt{к^2 - ac}}{a}$

  Приведенное уравнение $x^2 + px + q = 0$ совпадает с уравнением общего вида, в котором $a = 1$, $b = p$ и $c = q$. Поэтому для приведенного квадратного уравнения формула корней принимает вид $x_{1,2} = -к \pm \sqrt{к^2 - ac}$

- Формулу удобно использовать, когда p— четное число.

- **Способ 3: Метод выделения полного квадрата.**

- $x^2 + 2px + q = 0,$
- $x^2 + 2px + p^2 - p^2 + q = 0,$
- $(x + p)^2 - p^2 + q = 0,$
- $(x + p)^2 = p^2 - q,$
- $x + p = \pm\sqrt{p^2 - q}$, если $p^2 - q \geq 0,$
- $x = -p \pm \sqrt{p^2 - q}$,

Способ 4:Решение уравнений с использованием теоремы Виета.

- Приведенным квадратным уравнением называется уравнение вида $x^2 + px + q = 0$,
- где старший коэффициент равен единице.
- $\begin{cases} x_1 + x_2 = -p, \\ x_1 \cdot x_2 = q. \end{cases}$

Таким образом: сумма корней приведенного квадратного уравнения равна второму коэффициенту, взятому с противоположным знаком, а произведение корней равно свободному члену.

Способ 5: Свойства коэффициентов квадратного уравнения.

- Пусть дано квадратное уравнение $ax^2 + bx + c = 0$, где $a \neq 0$.
- 1)Если, $a + b + c = 0$ (т.е. сумма коэффициентов равна нулю),
- то $x_1 = 1$, $x_2 = c/a$.
- 2)Если $a - b + c = 0$, то $x_2 = -1$, $x_2 = -c/a$
- Данный метод удобно применять к квадратным уравнениям с большими коэффициентами.
- Пример: $3x^2 + 4x - 7 = 0$,
- $a + b + c = 0$,
- $3 + 4 - 7 = 0$,
- $x_1 = 1$,
- $x_2 = \frac{c}{a} = \frac{-7}{3}$.

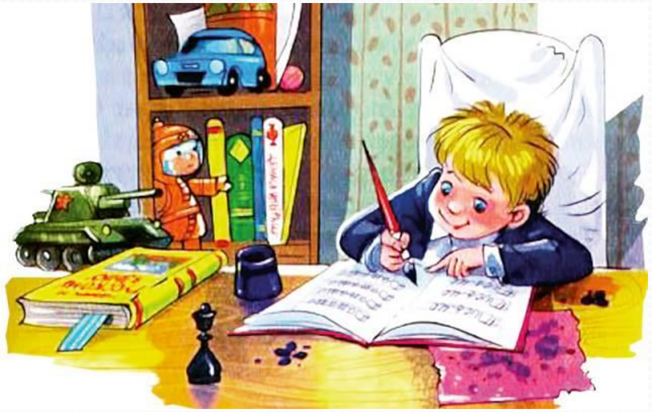
Способ 6:Способ переброски старшего коэффициента.
Рассмотрим квадратное уравнение
$ax^2 + bx + c = 0$, где $a \neq 0$.
Умножая обе его части на a, получаем уравнение $a^2x^2 + abx + ac = 0$.
Пусть $ax = y$, откуда $x = y/a$; тогда приходим к уравнению $y^2 + by + ac = 0$, равносильно данному.
Его корни y_1 и y_2 найдем с помощью теоремы Виета и окончательно:
$x_1 = y_1/a$ и $x_1 = y_2/a$.
При этом способе коэффициент a умножается на свободный член, как бы «перебрасывается» к нему, поэтому его называют ***способом «переброски»***. Этот способ применяют, когда можно легко найти корни уравнения, используя теорему Виета и, что самое важное, когда дискриминант есть точный квадрат.
Пример: $3x^2 + 4x - 7 = 0.$
«Перебросим» коэффициент 3 к свободному члену, в результате получим уравнение
$y^2+4y -21 = 0$.
Согласно теореме Виета:

$$\begin{cases} y_1=-7, \\ y_2 = 3; \end{cases} \qquad \begin{cases} x_1 = -7/3, \\ x_2 = 3/3; \end{cases} \qquad \begin{cases} x_1 = -7/3 \\ x_2 = 1. \end{cases}$$

Способ 7: Разложение на множители способом группировки.

При решении квадратных уравнений часто применяется метод разложения на множители (с помощью вынесения за скобки общего множителя, формул сокращенного умножения или способа группировки).

Пример:



- $3x^2 + 4x - 7 = 0$,
- $3x^2 + 7x - 3x - 7 = 0$,
- $x(3x + 7) - (3x + 7) = 0$,
- $(3x + 7)(x - 1) = 0$,
- $x_1 = -\frac{7}{3}, x_2 = 1$.

Способ 8: Приведение к виду $(f(x))^2=(g(x))^2$.

Путем преобразований уравнение приводится к виду $(kx)^2=(mx\pm n)^2$.

Пример: $3x^2+4x-7=0, \mid :7$

$$\frac{3}{7}x^2+\frac{4}{7}x-1=0,$$

$$\frac{21}{49}x^2+\frac{4}{7}x-1=0,$$

$$\left(\frac{25}{49}-\frac{4}{49}\right)x^2+\frac{4}{7}x-1=0,$$

$$\frac{25}{49}x^2=\frac{4}{49}x^2-\frac{4}{7}x+1,$$

$$\left(\frac{5}{7}\right)^2=\left(\frac{2}{7}x-1\right)^2,$$

$$\left(\frac{5}{7}x\right)^2=\left(\frac{2x-7}{7}\right)^2,$$

$|5x|=|2x-7|$,

1) $5x=2x-7$,	2) $5x=7-2x$,
$5x-2x=-7$,	$5x+2x=7$,
$3x=-7$,	$7x=7$,
$x=-\frac{7}{3}$,	$x=1$.

Способ 9: Уменьшение степени уравнения (использование теоремы Безу).

- Данный способ широко применяется при решении алгебраических уравнений высших степеней.
- Теорема Безу. При делении многочлена n-й степени относительно x на двучлен x-a остаток равен значению делимого при x=a.
- Следствие из теоремы Безу. Если уравнение $a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n = 0$,
- где все коэффициенты целые, имеет целые корни, то это делители свободного члена.
- Пример: $3x^2 + 4x - 7 = 0$,
- $-7 \div \pm1; \pm7$,
- $P(1) = 3 \times 1^2 + 4 \times 1 - 7 = 0$,
- $x = 1$,
- $\left(3x^2 + 4x - 7\right) \div (x - 1) = 3x + 7$,
- $3x + 7 = 0$,
- $x = -\frac{7}{3}$.

- ***Способ 10:Графический способ.***

Используя знания о квадратичной и линейной функциях и их графиках, можно решить квадратное уравнение так называемым ***функционально-графическим методом***. Причем некоторые квадратные уравнения можно решить различными способами, рассмотрим эти способы на примере одного квадратного уравнения.

$$3x^2 + 4x - 7 = 0,$$

$$x^2 + \frac{4}{3}x - \frac{7}{3} = 0.$$

Построим графики функции $y=x^2$ и $y = \frac{7}{3} - \frac{4}{3}x$ в одной системе координат.

Абсциссы точек пересечения этих двух графиков являются корнями данного уравнения.

$$\mathrm{x}_1 = -, \mathrm{x}_2 = 1.$$

Способ 11:Решение при помощи циркуля и линейки.

Предлагаю следующий способ нахождения корней квадратного уравнения $ax^2 + bx + c = 0$ с помощью циркуля и линейки.

- **Итак:**

1) Строим точки $S\left(-\frac{b}{2a};\frac{a+c}{2a}\right)$ (центр окружности) и $A(0;1)$;

2) проведем окружность с радиусом SA;

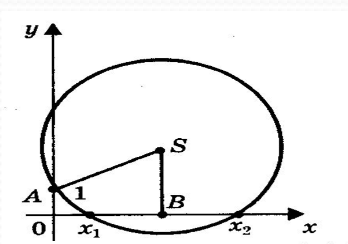
3) абсциссы точек пересечения этой окружности с осью Ox являются корнями исходного квадратного уравнения.

- **При этом возможны три случая.**

1) Радиус окружности больше ординаты центра окружность пересекает ось Ох в двух точках (рис. а) $B(x_1; 0)$ и $D(x_2; 0)$, где x_1 и x_2 - корни квадратного уравнения

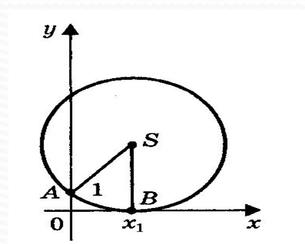
2) Радиус окружности равен ординате , тогда окружность касается оси Ох (рис.б) в точке $B(x_1; 0)$, где x_1 - корень квадратного уравнения.

3) Радиус окружности меньше ординаты центра окружность не имеет общих точек с осью абсцисс (рис. в), в этом случае уравнение не имеет решения.



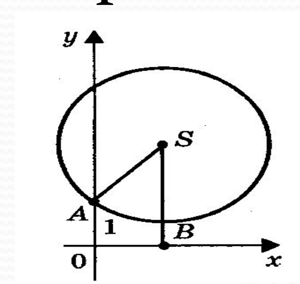
а) $AS > SB$, $R > \frac{a+c}{2a}$.

Два решения x_1 и x_2.



б) $AS = SB$, $R = \frac{a+c}{2a}$.

Одно решение x_1.



в) $AS < SB$, $R < \frac{a+c}{2a}$.

Нет решения.

Способ 12: Решение с помощью номограммы.

Это старый и в настоящее время забытый способ решения квадратных уравнений, помещенный на с.83 сборника: Брадис В.М. Четырехзначные математические таблицы. - М., Просвещение, 1990.

Таблица XXII. Номограмма для решения уравнения $z^2 + pz + q = 0$. Эта номограмма позволяет, не решая квадратного уравнения, по его коэффициентам определить корни уравнения.

Криволинейная шкала номограммы построена по формулам : $OB = \frac{a}{1+z}, AB = \frac{-z^2}{1+z}.$

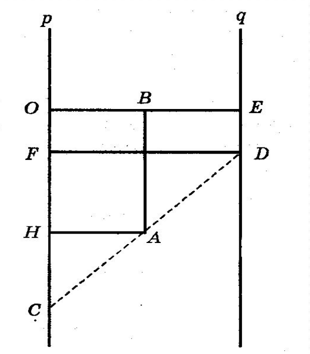


Рис. 11

Полагая $OC = p$, $ED = q$, $OE = a$ (все в см.), из подобия треугольников CAH и CDF получим пропорцию $\frac{p-q}{p-AB} = \frac{a}{OB},$

откуда после подстановок и упрощений вытекает уравнение $z^2 + pz + q = 0$, причем буква z означает метку любой точки криволинейной шкалы.

Пример: $3x^2 + 4x - 7 = 0$.

Разделим коэффициенты этого уравнения на 3.

$x^2 + \frac{4}{3}x - \frac{7}{3} = 0,$

$x_1 = -\frac{7}{3}, x_2 = 1.$

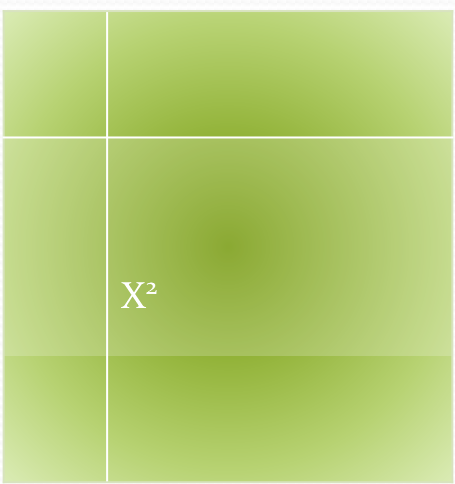
Способ 13: Геометрический способ.

В древности, когда геометрия была более развита, чем алгебра, квадратные уравнения решали не алгебраически, а геометрически.

Пример: $3x^2+4x-7=0$,

$x^2+\frac{4}{3}\text{x}-\frac{7}{3}=0$, $x^2+\frac{4}{3}\text{x}=\frac{7}{3}$.

Рассмотрим квадрат со стороной x, на его сторонах строятся прямоугольники так, что другая сторона каждого из них равна $\frac{1}{3}$, следовательно, площадь каждого равна $\frac{1}{3}$x. Полученная фигура дополняется до нового квадрата ABCD, достраивая в углах четыре равных квадрата, сторона каждого из них $\frac{1}{3}$, а площадь $\frac{1}{9}$.



Площадь S квадрата $ABCD$ можно представить как сумму площадей: первоначального квадрата x^2, четырех прямоугольников ($4 \bullet \frac{1}{3}x = \frac{4}{3}x$) и четырех пристроенных квадратов ($\frac{1}{9} \bullet 4 = \frac{4}{9}$), т.е. $S = x^2 + \frac{4}{3}x + \frac{4}{9}$. Заменяя $x^2 + \frac{4}{3}x$ числом $\frac{7}{3}$, получим, что $S = \frac{7}{3} + \frac{4}{9} = \frac{25}{9}$, откуда следует, что сторона квадрата $ABCD$, т.е. отрезок $AB = \frac{5}{3}$. Для искомой стороны x первоначального квадрата получим

$$x = \frac{5}{3} - \frac{1}{3} - \frac{1}{3} = \frac{3}{3} = 1.$$

Но учитывая, что в древности не знали отрицательных чисел, второй корень уравнения не находится. Я, используя теорему Виета, могу вычислить второй корень

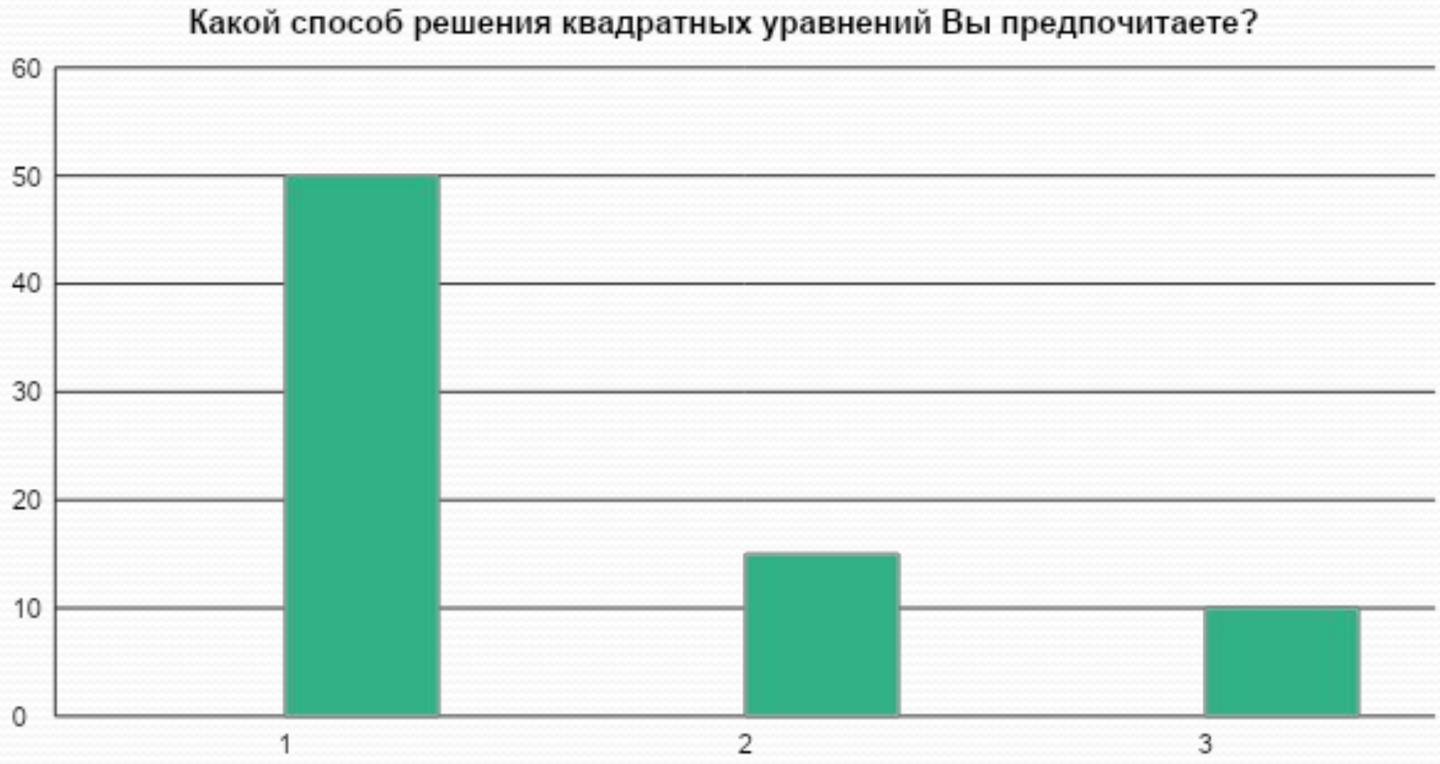
$$x_2 = -p - x_1 = -\frac{4}{3} - 1 = -\frac{7}{3}.$$

Заключение

В ходе выполнения своей исследовательской работы я считаю, что с поставленной целью и задачами я справился, мне удалось обобщить и систематизировать изученный материал по выше указанной теме.

Способов решения квадратных уравнений очень много. Я нашел 13 способов решения квадратных уравнений. Нужно отметить, что не все они удобны для решения, но каждый из них уникален. Для того чтобы усвоить все методы решения уравнений, нужно прорешать несколько уравнений изучаемым способом. А для этого нужны задания, поэтому в данной работе, я составил несколько групп тренировочных заданий для каждого из способов решения квадратных уравнений.

Приложение


Какой способ решения квадратных уравнений Вы предпочитаете?
60
50
40
30
20
10
0
1
2
3

Подводя итоги, можно сделать вывод: квадратные уравнения играют огромную роль в математике. Эти знания могут пригодиться нам на протяжении всей жизни, а так как эти методы решения квадратных уравнений просты в применении, то они, безусловно, должны заинтересовать увлекающихся математикой школьников.

Спасибо за внимание!!!