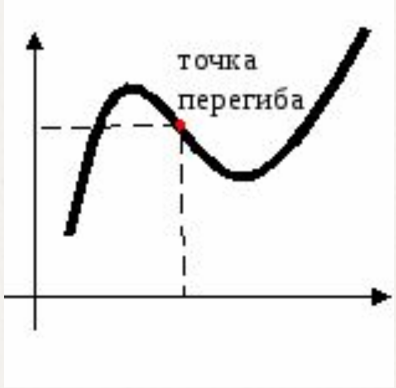
ТОЧКИ ПЕРЕГИБА. НАПРАВЛЕНИЕ ВЫПУКЛОСТИ ГРАФИКА ФУНКЦИИ.

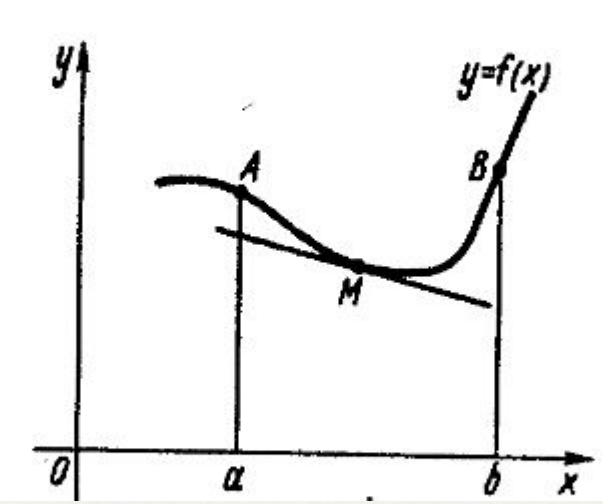
Автор: преподаватель ГАПОУ «ЛНТ» Шаммасова А.А.

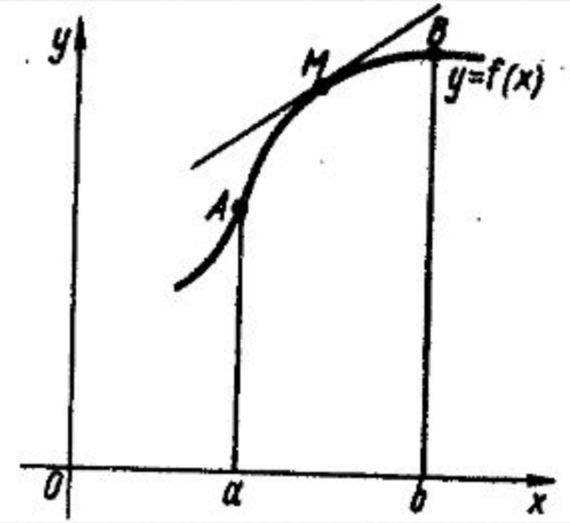


Цель урока:

- Формирование представлений о направлении выпуклости графика функции в зависимости от знака её второй производной.
- Обеспечение усвоения понятия точки перегиба.
- Формирование представлений о правиле нахождения точек перегиба графика функции.
- Формирование умений исследовать функцию на направление выпуклости и определять точки перегиба.

Кривая $y=f(x)$ называется **выпуклой вниз** (**выпуклой вверх**) в промежутке $a<x<b$, если она лежит <u>выше</u> (<u>ниже</u>) касательной в любой точке этого промежутка.





Промежутки, в которых график функции обращен выпуклостью вверх или вниз, называются ***промежутками выпуклости графика функции****.*

Выпуклость вниз или вверх кривой, являющейся графиком функции y=f(x), характеризуется знаком ее второй производной:

Если в некотором промежутке ***f''(x)>0****, то кривая* ***выпукла вниз*** *в этом промежутке. Если же* ***f''(x)<0****, то кривая* ***выпукла вверх*** *в этом промежутке.*

Пример 1. Исследовать на направление выпуклости кривую $f(x)=1/x$ в точках $x_1=-2$ и $x_2=1$.

Находим:

$f'(x)= - 1/x^2$

$f''(x)= 2/x^3$

$f''(-2)= 2/(-2)^3<0$

$f''(1)= 2/1^3>0$

Таким образом, в точке $x=-2$ кривая выпукла вверх, а в точке $x=1$ – выпукла вниз.

Пример 2. Найти промежутки выпуклости кривых:

а) $f(x)=x^3$

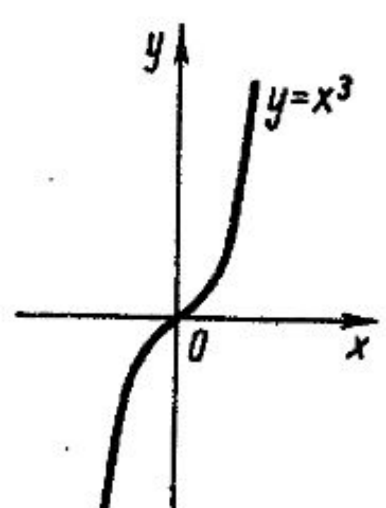
Находим:

$f'(x)= 3x^2$

$f''(x)= 6x$

В промежутке $-\infty<x<0$ имеем $\mathbf{f''(x)<0}$, т.е. в этом промежутке кривая **выпукла вверх**.

В промежутке $0<x<+\infty$ имеем $\mathbf{f''(x)>0}$, т.е. в этом промежутке кривая **выпукла вниз**.



<u>Пример 2</u>. Найти промежутки выпуклости кривых:

б) $f(x)=x^4 - 2x^3 + 6x - 4$

Находим:

$f'(x)= 4x^3 - 6x^2 + 6$

$f''(x)= 12x^2 - 12x = 12x (x - 1)$

В промежутках $-\infty<x<0$ и $1<x<+\infty$ имеем $\boldsymbol{f''(x)>0}$, *т.е. в этом промежутке кривая* ***выпукла вниз****.*

В промежутке $0<x<1$ имеем $\boldsymbol{f''(x)<0}$, *т.е. в этом промежутке кривая* ***выпукла вверх****.*

Точка графика функции $y=f(x)$, разделяющая промежутки выпуклости противоположных направлений этого графика, называется ***точкой перегиба***.

Точками перегиба могут служить только критические точки, принадлежащие области определения функции $y=f(x)$, в которых вторая производная $f''(x)=0$ или терпит разрыв.
Если при переходе через критическую точку x_0 $f''(x)$ меняет знак, то график функции имеет точку перегиба $(x_0;f(x_0))$.

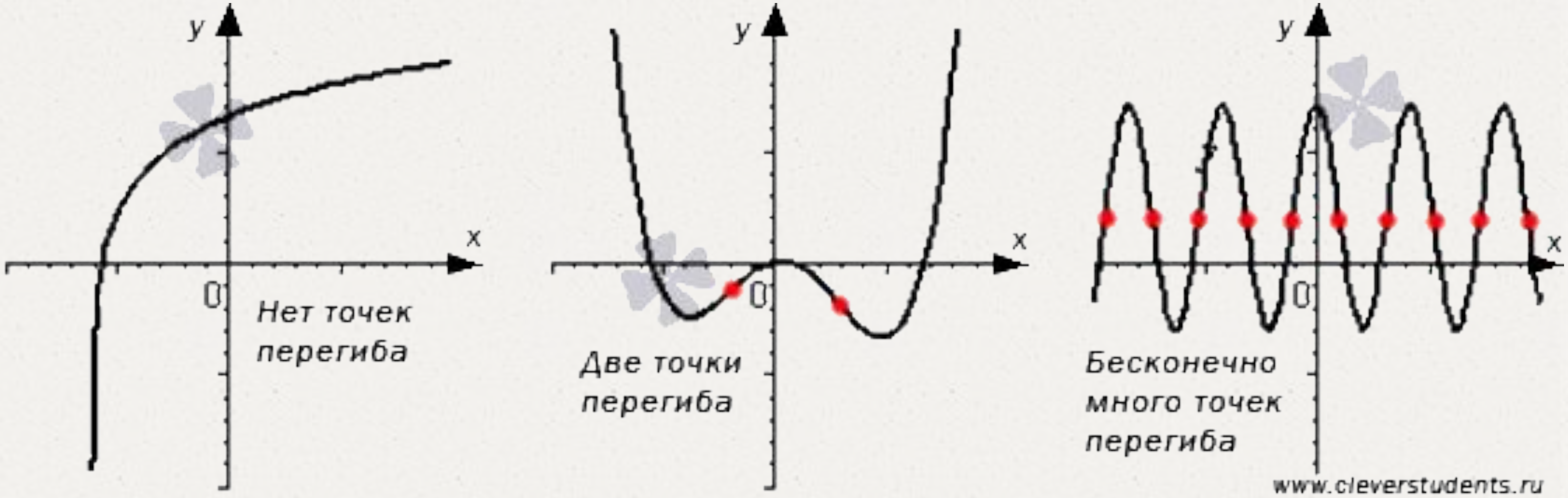
Правило нахождения точек перегиба графика функции $y=f(x)$

I. Найти вторую производную $f''(x)$.

II. Найти критические точки функции $y=f(x)$, в которых $f''(x)=0$ или терпит разрыв.

III. Исследовать знак $f''(x)$ в промежутках, на которые найденные критические точки делят область определения функции $f(x)$. Если при этом критическая точка $x0$ разделяет промежутки выпуклости противоположных направлений, то $x0$ – абсцисса точки перегиба функции.

IV. Вычислить значения функции в точках перегиба.



y
x
0
Нет точек
перегиба
y
x
0
Две точки
перегиба
y
x
0
Бесконечно
много точек
перегиба
www.cleverstudents.ru

Пример 3. Найти точки перегиба кривых:

а) $f(x) = 6x^2 - x^3$

Находим:

$f'(x) = 12x - 3x^2$

$f''(x) = 12 - 6x$

$f''(x) = 0 \quad x = 2$ – критическая точка

В промежутке $-\infty < x < 2$ $f''(x) > 0$, а в промежутке $2 < x < +\infty$ имеем $f''(x) < 0$, тогда при $x = 2$ кривая имеет точку перегиба.

Найдем ординату этой точки:

$f(2) = 16$

Следовательно, $(2;16)$ – точка перегиба.

Пример 3. *Найти точки перегиба кривых:*
б)

$$f(x) = x + \sqrt[3]{x^5} - 2$$

Находим:

$$f'(x) = 1 + \frac{5}{3}\sqrt[3]{x^2} \qquad f''(x) = \frac{10}{9} \cdot \frac{1}{\sqrt[3]{x}}$$

f''(x)=0 x=0 – критическая точка, в которой вторая производная терпит разрыв.
В промежутке -∞<x<0 f''(x)<0, а в промежутке 0<x<+∞ имеем f''(x)>0, тогда при x=0 кривая имеет точку перегиба (0;-2).