Тема лекции
«Теория вероятностей»

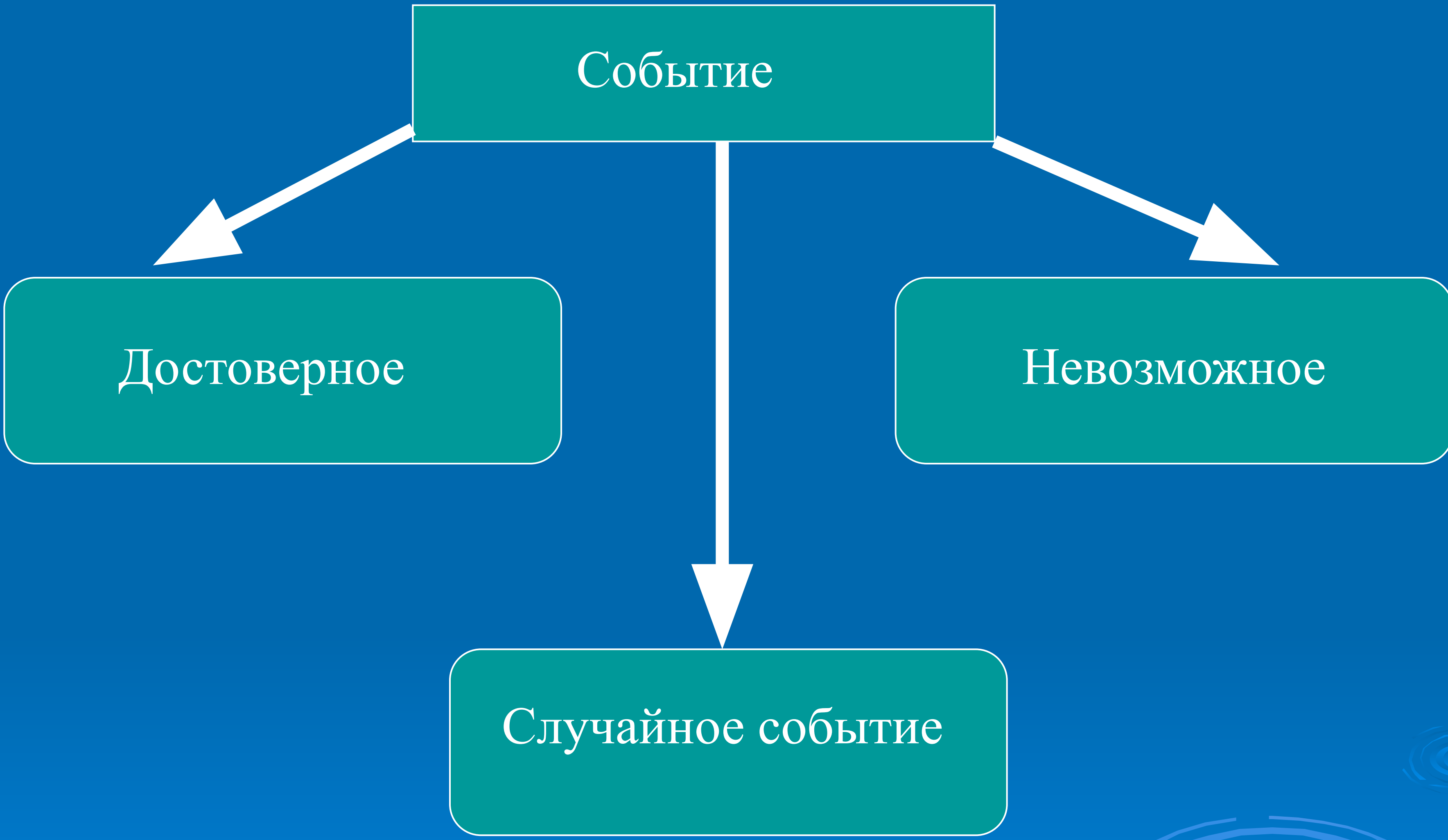
Содержание лекции

1. Вероятность события
2. Теорема сложения вероятностей
3. Теорема умножения вероятностей

Вероятность события

В различных областях человеческой деятельности приходится иметь дело с событиями, которые невозможно точно предсказать.

Поэтому приходится прогнозировать исход такой деятельности на основе собственного или чужого опыта, либо на основе интуиции, опирающейся на опытные данные.


Событие
Достоверное
Невозможное
Случайное событие

Определения:

Случайным называется событие, которое может произойти или не произойти в результате некоторого испытания

Испытание (опыт, эксперимент) – это процесс, включающий определенные условия и приводящий к одному из нескольких возможных исходов.

Исходом испытания может быть результат наблюдения или измерения.

Единичный, отдельный исход испытания называется элементарным событием

Пример:

Испытание	Исход испытания
Подбрасывание монеты	Орел, решка
Продажа квартиры	Продана, не продана
Результат футбольного матча	Победа, проигрыш, ничья

Определение:

Достоверным называется событие, обязательно появляющееся в результате опыта.

Достоверные события обозначаются символом - Ω

Пример:

Извлечение из урны, содержащей только белые шары, белого шара.

Определение:

Невозможным называется событие, которое не может произойти в результате опыта.

Невозможные события обозначаются символом - $\varnothing$

Пример:

Извлечение из урны, содержащей только белые шары, черного шара.

Достоверные и невозможные события не являются случайными.

Совместные и несовместные события

Несколько событий называются совместными, если наступление одного из них не исключает появления других

Совместные

События

Несовместные

Несколько событий называются несовместными, если появление одного из них исключает появления других

Пример совместных событий

Событие А – в магазин вошел покупатель старше 60 лет

Событие В – в магазин вошла женщина

События А и В совместны, так как в магазин может войти женщина старше 60 лет

Пример несовместных событий

Событие А – выигрыш одной партии в шахматы

Событие В – проигрыш одной партии в шахматы

Событие С – ничейный исход одной партии в шахматы

События А , В и С несовместны

ОПРЕДЕЛЕНИЕ

События называются единственно возможными, если в результате испытания хотя бы одно из них произойдет

ПРИМЕР

Фирма рекламирует свой товар по радио и в газете.

Единственно возможные события:

- Потребитель услышит о товаре по радио;
- Потребитель прочитает о товаре в газете;
- Потребитель получит информацию о товаре по радио и в газете;
- Потребитель не слышал о товаре по радио и не читал в газете.

Равновозможные события

Определение

Несколько событий называются равновозможными, если в результате испытания ни одно из них не имеет объективно большую возможность появления, чем другие.

Пример

При бросании игральной кости появление каждой из ее граней – события равновозможные.

Полная группа событий. Противоположные события

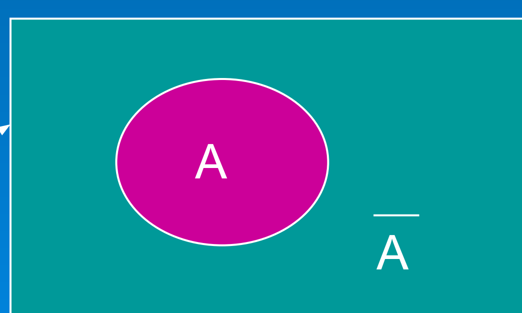
Определения

События $B_1, B_2, \ldots\ldots B_n$

образуют полную группу событий, если хотя бы одно из них обязательно произойдет в опыте.

Два единственно возможных события, образующих полную группу, называются противоположными

Пример:



Полная группа событий

A – событие

$\overline{A}$ – противоположное событие

Алгебра событий

Суммой событий $A_1, A_2 ......A_n$ называется событие, состоящее в появлении хотя бы одного из этих событий

$$A_1 + A_2 + ... + A_n$$

Произведением событий $A_1, A_2 ......A_n$ называется событие, состоящее в одновременном появлении всех этих событий

$$A_1 A_2 ......A_n$$

Вероятность события

Вероятность является количественной мерой возможности появления события

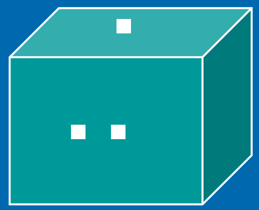
Классическое определение

Вероятностью события А называют отношение числа благоприятствующих элементарных исходов (m) к общему числу равновозможных элементарных исходов, образующих полную группу (n).

$$P(A) = \frac{m}{n}$$

Пример

Рассматриваемое событие А – четное число очков на выпавшей грани игральной кости



Общее число исходов (число граней) – 6

Число благоприятствующих исходов (грани содержащие 2,4,6 очков) – 3

$$P(A)=\frac{m}{n}=\frac{3}{6}=0.5$$

Вероятность события

Относительной частотой появления события A называется отношение числа испытаний m1, при которых событие появилось, к общему числу произведенных испытаний n1.

$$W(A) = \frac{m1}{n1}$$

Статистическое определение

Вероятностью события A называется число, относительно которого устанавливается относительная частота W(A) при неограниченном увеличении числа опытов

Статистическое определение вероятности события

$$P^{*}(A)=\lim_{n\to\infty} W(A)$$

При очень большом числе испытаний статистическая вероятность приближенно равна классической.

В практических задачах за вероятность события принимается относительная частота при достаточно большом числе испытаний.

Свойства вероятности

1. Вероятность достоверного события равна 1.

$$P(\Omega) = 1$$

2. Вероятность невозможного события равна 0.

$$P(\varnothing) = 0$$

3. Вероятность случайного события есть положительное число, заключенное между 0 и 1.

$$0 \le P(A) \le 1$$

4. Сумма вероятностей противоположных событий равна 1.

$$P(A) + P(\overline{A}) = 1$$

Пример

Структура занятых в региональном отделении крупного банка имеет вид:

Структура	Женщины	Мужчины
Администраторы	25	15
Операционисты	35	25

Какова вероятность того, что случайно выбранный служащий окажется: а) мужчина-администратор, б) женщина-операционист, в) мужчина?

Решение

а) Событие А – случайно выбранный служащий – мужчина-администратор.

Вычислим вероятность события А, используя классическое определение вероятности:

Общее число исходов это численность работающих в банке служащих n=100.

Число благоприятствующих исходов это численность мужчин-администраторов m=15.

Тогда вероятность события А равна:

$$P(A) = \frac{m}{n} = \frac{15}{100} = 0.15$$

Решение

б) Событие B – случайно выбранный служащий – женщина-операционист.

Общее число исходов это численность работающих в банке служащих n=100.

Число благоприятствующих исходов это численность женщин-операционисток m=35.

Тогда вероятность события в равна:

$$P(B)=\frac{m}{n}=\frac{35}{100}=0.35$$

Решение

в) Событие C – случайно выбранный служащий – мужчина.

Общее число исходов это численность работающих в банке служащих n=100.

Число благоприятствующих исходов это численность мужчин m=40.

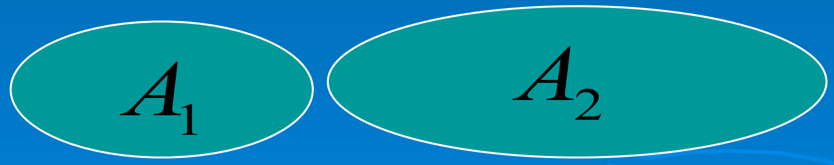
Тогда вероятность события в равна:

$$P(B)=\frac{m}{n}=\frac{40}{100}=0.4$$

Теорема сложения вероятностей несовместных событий

Вероятность суммы конечного числа несовместных событий $A_1, A_2 \ldots\ldots A_n$ равна сумме вероятностей этих событий

$$P(A_1 + A_2 + \ldots + A_n) = P(A_1) + P(A_2) + \ldots. + P(A_n)$$



$$P(A_1 + A_2) = P(A_1) + P(A_2)$$

Условная вероятность

Определение

Вероятность события А, вычисленная при условии, что имело место другое событие В, называется условной вероятностью события А

$$P(A/B)$$

Если вероятность события А рассматривается при условии, что произошли два других события В и С, используется условная вероятность относительно произведения событий В и С

$$P(A/BC)$$

Теорема умножения вероятностей

Вероятность произведения двух событий равна произведению вероятности одного из них на условную вероятность другого, вычисленную при условии, что первое имело место

$$P(AB) = P(A)P(B/A)$$

Пример: В магазине 35 компьютеров, 5 из них с дефектами. Найти вероятность того, два наугад взятых компьютера без дефектов.

Решение: А – первый наугад взятый компьютер без дефекта

В - второй наугад взятый компьютер без дефекта, при условии, что первый компьютер без дефекта

$$P(A) = \frac{30}{35} = \frac{6}{7} \qquad P(B/A) = \frac{29}{34} \qquad P(AB) = \frac{6}{7}\frac{29}{34} = \frac{87}{119}$$

Независимые и зависимые события

Определение

События А и В называются независимыми, если при наступлении события А вероятность события В не меняется.

Для независимых событий

$$P(AB) = P(A)P(B)$$

События А и В называются зависимыми, если вероятность каждого из них зависит от того произошло или нет другое событие.

Теорема сложения вероятностей совместных событий

Вероятность суммы двух совместных событий A и B равна сумме вероятностей этих событий без вероятности их совместного наступления

$$P(A+B)=P(A)+P(B)-P(AB)$$

Вероятность появления хотя бы одного события

Если события $A_1, A_2, \ldots\ldots A_n$ независимы в совокупности, тогда вероятность появления события А, состоящего в появлении хотя бы одного из событий $A_1, A_2, \ldots\ldots A_n$ равна:

$$P(A) = 1 - P(\overline{A_1})P(\overline{A_2})\ldots\ldots\ldots P(\overline{A_n})$$

Пример

Студент пришел на экзамен, выучив 15 вопросов из 25. Экзаменатор задал студенту 3 вопроса. Какова вероятность того, что студент ответит на все 3 вопроса?

Решение:

Событие А – студент знает все 3 вопроса- заключается в совместном наступлении событий:

A_1 - студент знает 1-й вопрос;

A_2 - студент знает 2-й вопрос;

A_3 - студент знает 3-й вопрос.

События A_1, A_2, A_3 - зависимые

Решение

$$P(A)=P(A_1A_2A_3)=P(A_1)P(A_2/A_1)P(A_3/A_1A_2)$$

Вычислим вероятности событий

$$P(A_1)=\frac{15}{25}=\frac{3}{5} \qquad P(A_2/A_1)=\frac{14}{24}=\frac{7}{12}$$

$$P(A_3/A_1A_2)=\frac{13}{23}$$

Тогда вероятность того, что студент ответит на все 3 вопроса, равна:

$$P(A)=\frac{3}{5}*\frac{7}{12}*\frac{13}{23}=0.198$$