Тема лекции
«Теория вероятностей»

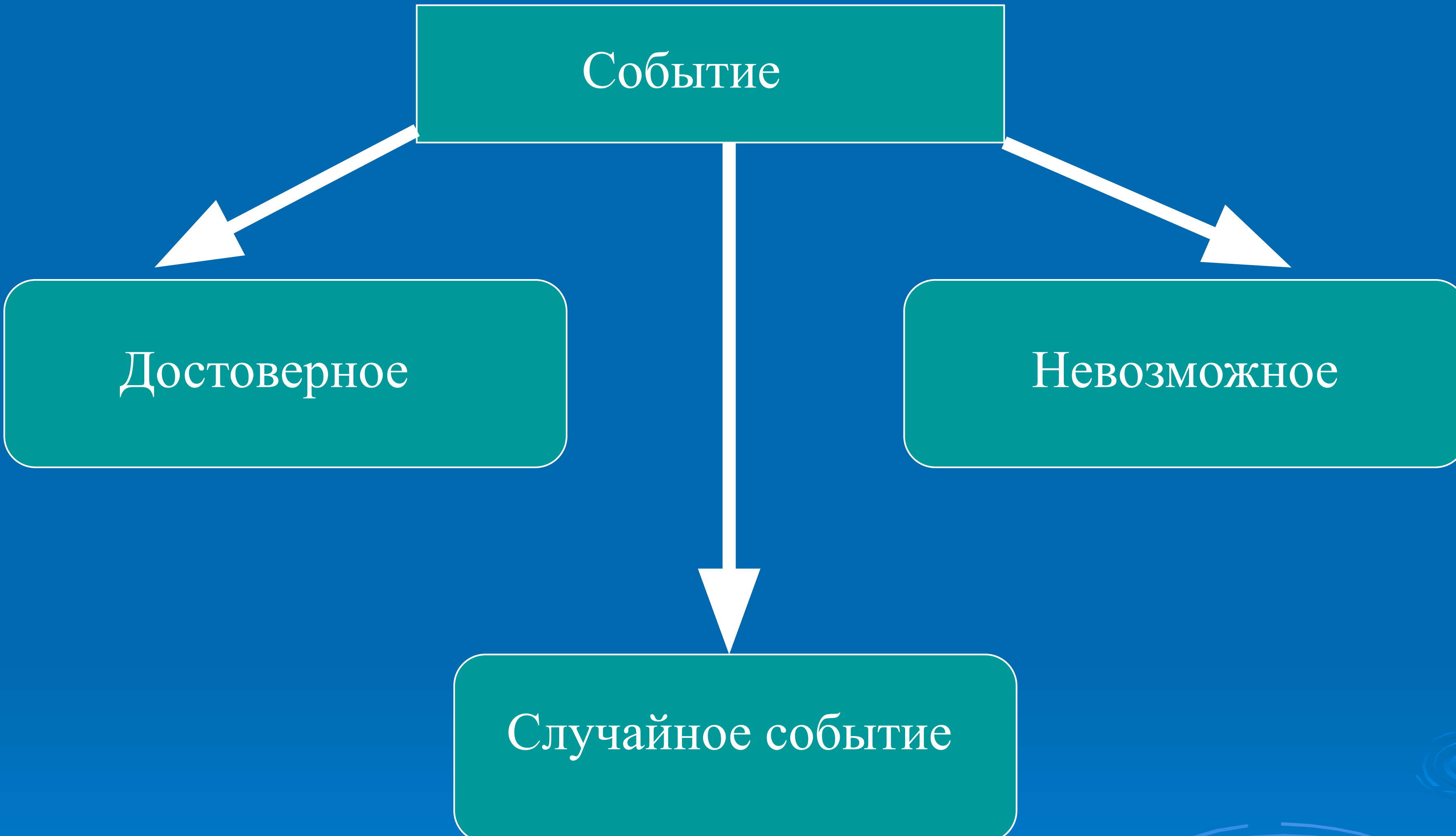
Содержание лекции

1. Вероятность события
2. Теорема сложения вероятностей
3. Теорема умножения вероятностей

Вероятность события

В различных областях человеческой деятельности приходится иметь дело с событиями, которые невозможно точно предсказать.

Поэтому приходится прогнозировать исход такой деятельности на основе собственного или чужого опыта, либо на основе интуиции, опирающейся на опытные данные.


Событие
Достоверное
Невозможное
Случайное событие

Определения:

Случайным называется событие, которое может произойти или не произойти в результате некоторого испытания

Испытание (опыт, эксперимент) – это процесс, включающий определенные условия и приводящий к одному из нескольких возможных исходов.

Исходом испытания может быть результат наблюдения или измерения.

Единичный, отдельный исход испытания называется элементарным событием

Пример:

Испытание	Исход испытания
Подбрасывание монеты	Орел, решка
Продажа квартиры	Продана, не продана
Результат футбольного матча	Победа, проигрыш, ничья

Определение:

Достоверным называется событие, обязательно появляющееся в результате опыта.

Достоверные события обозначаются символом - Ω

Пример:

Извлечение из урны, содержащей только белые шары, белого шара.

Определение:

Невозможным называется событие, которое не может произойти в результате опыта.

Невозможные события обозначаются символом - $\varnothing$

Пример:

Извлечение из урны, содержащей только белые шары, черного шара.

Достоверные и невозможные события не являются случайными.

Совместные и несовместные события

Несколько событий называются **совместными**, если наступление одного из них не исключает появления других

Совместные

События

Несовместные

Несколько событий называются **несовместными**, если появление одного из них исключает появления других

Пример совместных событий

Событие А – в магазин вошел покупатель старше 60 лет

Событие В – в магазин вошла женщина

События А и В совместны, так как в магазин может войти женщина старше 60 лет

Пример несовместных событий

Событие А – выигрыш одной партии в шахматы

Событие В – проигрыш одной партии в шахматы

Событие С – ничейный исход одной партии в шахматы

События А , В и С несовместны

ОПРЕДЕЛЕНИЕ

События называются единственно возможными, если в результате испытания хотя бы одно из них произойдет

ПРИМЕР

Фирма рекламирует свой товар по радио и в газете.

Единственно возможные события:

- Потребитель услышит о товаре по радио;
- Потребитель прочитает о товаре в газете;
- Потребитель получит информацию о товаре по радио и в газете;
- Потребитель не слышал о товаре по радио и не читал в газете.

Равновозможные события

Определение

Несколько событий называются равновозможными, если в результате испытания ни одно из них не имеет объективно большую возможность появления, чем другие.

Пример

При бросании игральной кости появление каждой из ее граней – события равновозможные.

Полная группа событий. Противоположные события

Определения

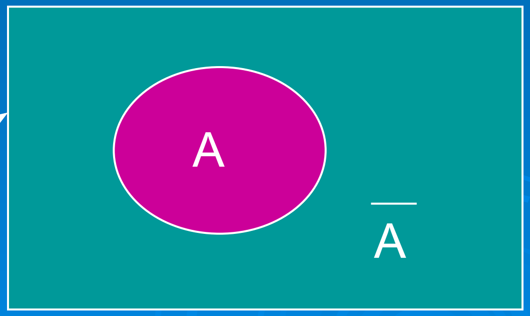
События $B_1, B_2, \ldots\ldots B_n$

образуют полную группу событий, если хотя бы одно из них обязательно произойдет в опыте.

Два единственно возможных события, образующих полную группу, называются противоположными

Пример:

Полная группа событий



A – событие

$\bar{A}$ – противоположное событие

Алгебра событий

Суммой событий $A_1, A_2 ...... A_n$ называется событие, состоящее в появлении хотя бы одного из этих событий

$$A_1 + A_2 + ... + A_n$$

Произведением событий $A_1, A_2 ...... A_n$ называется событие, состоящее в одновременном появлении всех этих событий

$$A_1 A_2 ...... A_n$$

Вероятность события

Вероятность является количественной мерой возможности появления события

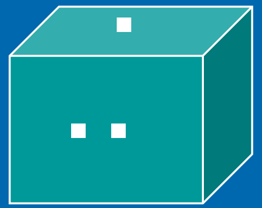
Классическое определение

Вероятностью события A называют отношение числа благоприятствующих элементарных исходов (m) к общему числу равновозможных элементарных исходов, образующих полную группу (n).

$$P(A) = \frac{m}{n}$$

Пример

Рассматриваемое событие А – четное число очков на выпавшей грани игральной кости



Общее число исходов (число граней) – 6

Число благоприятствующих исходов (грани содержащие 2,4,6 очков) – 3

$$P(A) = \frac{m}{n} = \frac{3}{6} = 0.5$$

Вероятность события

Относительной частотой появления события A называется отношение числа испытаний m1, при которых событие появилось, к общему числу произведенных испытаний n1.

$$W(A) = \frac{m1}{n1}$$

Статистическое определение

Вероятностью события A называется число, относительно которого устанавливается относительная частота W(A) при неограниченном увеличении числа опытов

Статистическое определение вероятности события

$$P^{*}(A)=\lim_{n\to\infty}W(A)$$

При очень большом числе испытаний статистическая вероятность приближенно равна классической.

В практических задачах за вероятность события принимается относительная частота при достаточно большом числе испытаний.

Свойства вероятности

1. Вероятность достоверного события равна 1.

$$P(\Omega) = 1$$

2. Вероятность невозможного события равна 0.

$$P(\varnothing) = 0$$

3. Вероятность случайного события есть положительное число, заключенное между 0 и 1.

$$0 \le P(A) \le 1$$

4. Сумма вероятностей противоположных событий равна 1.

$$P(A) + P(\overline{A}) = 1$$

Пример

Структура занятых в региональном отделении крупного банка имеет вид:

Структура	Женщины	Мужчины
Администраторы	25	15
Операционисты	35	25

Какова вероятность того, что случайно выбранный служащий окажется: а) мужчина-администратор, б) женщина-операционист, в) мужчина?

Решение

а) Событие А – случайно выбранный служащий – мужчина-администратор.

Вычислим вероятность события А, используя классическое определение вероятности:

Общее число исходов это численность работающих в банке служащих n=100.

Число благоприятствующих исходов это численность мужчин-администраторов m=15.

Тогда вероятность события А равна:

$$P(A) = \frac{m}{n} = \frac{15}{100} = 0.15$$

Решение

б) Событие В – случайно выбранный служащий – женщина-операционист.

Общее число исходов это численность работающих в банке служащих n=100.

Число благоприятствующих исходов это численность женщин-операционисток m=35.

Тогда вероятность события в равна:

$$P(B)=\frac{m}{n}=\frac{35}{100}=0.35$$

Решение

в) Событие С – случайно выбранный служащий – мужчина.

Общее число исходов это численность работающих в банке служащих n=100.

Число благоприятствующих исходов это численность мужчин m=40.

Тогда вероятность события в равна:

$$P(B) = \frac{m}{n} = \frac{40}{100} = 0.4$$

Теорема сложения вероятностей несовместных событий

Вероятность суммы конечного числа несовместных событий $A_1, A_2 \ldots\ldots A_n$ равна сумме вероятностей этих событий

$$P(A_1 + A_2 + \ldots + A_n) = P(A_1) + P(A_2) + \ldots. + P(A_n)$$

$$P(A_1 + A_2) = P(A_1) + P(A_2)$$

Условная вероятность

Определение

Вероятность события А, вычисленная при условии, что имело место другое событие В, называется условной вероятностью события А

$$P(A/B)$$

Если вероятность события А рассматривается при условии, что произошли два других события В и С, используется условная вероятность относительно произведения событий В и С

$$P(A/BC)$$

Теорема умножения вероятностей

Вероятность произведения двух событий равна произведению вероятности одного из них на условную вероятность другого, вычисленную при условии, что первое имело место

$$P(AB) = P(A)P(B/A)$$

Пример: В магазине 35 компьютеров, 5 из них с дефектами. Найти вероятность того, два наугад взятых компьютера без дефектов.

Решение: А – первый наугад взятый компьютер без дефекта

В - второй наугад взятый компьютер без дефекта, при условии, что первый компьютер без дефекта

$$P(A) = \frac{30}{35} = \frac{6}{7} \qquad P(B/A) = \frac{29}{34} \qquad P(AB) = \frac{6}{7}\frac{29}{34} = \frac{87}{119}$$

Независимые и зависимые события

Определение

События А и В называются независимыми, если при наступлении события А вероятность события В не меняется.

Для независимых событий

$$P(AB) = P(A)P(B)$$

События А и В называются зависимыми, если вероятность каждого из них зависит от того произошло или нет другое событие.

Теорема сложения вероятностей совместных событий

Вероятность суммы двух совместных событий A и B равна сумме вероятностей этих событий без вероятности их совместного наступления

$$P(A+B)=P(A)+P(B)-P(AB)$$

Вероятность появления хотя бы одного события

Если события $A_1, A_2, \ldots\ldots A_n$ независимы в совокупности, тогда вероятность появления события А, состоящего в появлении хотя бы одного из событий $A_1, A_2, \ldots\ldots A_n$ равна:

$$P(A) = 1 - P(\overline{A_1})P(\overline{A_2})\ldots\ldots\ldots P(\overline{A_n})$$

Пример

Студент пришел на экзамен, выучив 15 вопросов из 25. Экзаменатор задал студенту 3 вопроса. Какова вероятность того, что студент ответит на все 3 вопроса?

Решение:

Событие А – студент знает все 3 вопроса-заключается в совместном наступлении событий:

A_1 - студент знает 1-й вопрос;

A_2 - студент знает 2-й вопрос;

A_3 - студент знает 3-й вопрос.

События A_1, A_2, A_3 - зависимые

Решение

$$P(A)=P(A_1A_2A_3)=P(A_1)P(A_2/A_1)P(A_3/A_1A_2)$$

Вычислим вероятности событий

$$P(A_1)=\frac{15}{25}=\frac{3}{5} \qquad P(A_2/A_1)=\frac{14}{24}=\frac{7}{12}$$

$$P(A_3/A_1A_2)=\frac{13}{23}$$

Тогда вероятность того, что студент ответит на все 3 вопроса, равна:

$$P(A)=\frac{3}{5}*\frac{7}{12}*\frac{13}{23}=0.198$$