Методика решения задач ЕГЭ №19

Илиязова Галина Ивановна

учитель высшей квалификационной категории МБОУ Андреевская СОШ

Солнечногорского района Московской области

Безусловно, задание №19 рассчитано на особую категорию учащихся. Однако мотивацию для решения этих задач нужно формировать на протяжении всего процесса обучения. Для того, чтобы продвинуться в решении некоторых задач не требуется специальных знаний, выходящих за рамки стандарта математического образования, однако необходимо проявить определённый уровень математической культуры, логического мышления, который формируется при решении задач профильного уровня на протяжении всего процесса обучения в школе.

Для успешного решения задач С6 необходимо:

- 1. Уметь строить математические модели.
- 2.Исследовать простейшие математические
-    модели.
- 3.Составлять уравнения и неравенства по условию задачи.
- 4.С помощью рассуждения доказывать полученные модели и распознавать логически некорректные случаи.

В решении задач поможет знание следующих разделов математики:

- 1.Элементы комбинаторики: сочетания, перестановки, бином Ньютона.
- 2.Элементы статистики: числовые характеристики рядов, графические и табличные представления данных.
- 3.Элементы теории вероятности.
- 4. Прогрессии.

Признаки делимости. Формулы сокращённого умножения.

- **Докажите что:**
- **а) число $16^{20}+2^{76}$ делятся на 17;**
- **б) число $16^{3}+31^{4}$ -2 делится на 15.**
- **Решение.**
- **а**) $16^{20}+2^{76}=2^{80}+2^{76}=2^{76}(2^4+1)=2^{76}\cdot 17$- делится на 17.
- **б**) $16^3+31^4-2=(15+1)^3+(30+1)^4-2=$
- $=15^3+3\cdot 15^2+3\cdot 15+1+(30^2+2\cdot 30+1)^2-2=$
- $=15^3+3\cdot 15^2+3\cdot 15+30^4+4\cdot 30^2+2\cdot 30^2+$
- $+4\cdot 30^3+4\cdot 30+2\cdot 30^2$
- **Т.к. каждое слагаемое делится на 15, то и сумма делится на 15.**

Квадратные уравнения. Теорема Виета.

- **Каждый из двух различных корней квадратного трёхчлена**
- **f(x)=** x^2 **+(3a + 10)x +5b-14 и его значение при x=1 являются простыми числами.**
- **Найдите a, b и корни трёхчлена**.
- **Решение.**
- Обозначим 3a + 10 = p, 5b-14 = q.
- Если x=1, то f(1)= 1+ p +q.
- Пусть x_1 и x_2 - корни трёхчлена, $x_1 < x_2$. Используем теорему Виета $x_1 \cdot x_2$= q, x_1+x_2=-p, получим f(1)= 1- ($x_1 + x_2$)+$x_1 x_2$=
- = (x_1- 1)(x_2- 1)
- Т.к.f(1), x_1иx_2 по условию являются простыми, то числа x_1-1 и x_2-1- натуральные и меньшее из них должно быть равно 1. Следовательно, x_1- 1=1, откуда $\mathbf{x_1 = 2}$ и f(1)= x_2-1,т.е. x_2-1 и x_2- два последовательных простых числа и это возможно если эти числа 2 и 3.т.е. $\mathbf{x_2}$**=3.**
- 1)P= -(2+3)=5, 3a+10=-5, **a=-5**; 2) q=2$\cdot 3 = 6$, 5b-14=6, **b=4**
- **Ответ:a=-5, b=4,** $\boldsymbol{x_1}$**=2,** $\boldsymbol{x_2}$**=3**

Сумма делителей натурального числа.

- Пусть **n=** $p_1^{k_1} \cdot p_2^{k_2} \cdot \ldots \cdot p_s^{k_s}$ **каноническое разложение на простые множители** натурального числа n, тогда число, равное сумме всех натуральных делителей числа n, выражается формулой
- **(1+**p_1 **+**p_1^2**+ … +**$p_1^{k_1}$ **)· (1+**p_2 **+** p_2^2**+… +**$p_2^{k_2}$**) · … ·(1+**p_s**+**$p_s^2 + \cdots$**+**$p_s^{k_s}$**)**

Найти сумму всех различных делителей числа 1440.

- **Решение.**
- Так как 1440=$2^5 \cdot 3^2 \cdot 5^1$, то число всех натуральных делителей
- $(1+2+2^2+2^3+2^4+2^5)\cdot(1+3+3^2)\cdot(1+5)=63\cdot13\cdot6=$ $=4314$.
- Ответ: 4314.

Количество делителей натурального числа.

- Пусть n=$p_1^{k_1} \cdot p_2^{k_2} \cdot \ldots \cdot p_s^{k_s}$ каноническое разложение на простые множители натурального числа n. Тогда **число натуральных делителей числа** включая 1 и само число n, равно произведению
- **$(k_1 + 1) \cdot (k_2 + 1) \cdot \ldots \cdot (k_s + 1)$.**

- **Задача**. Найти все натуральные числа, последняя десятичная цифра которых 0 и которые имеют ровно 15 различных натуральных делителей
- (включая единицу и само число).

- **Решение.** Поскольку число делителей 15, то
- 15=3· 5=(2+1)·(4+1) и 15=(14+1),то возможные разложения искомых чисел в соответствии с формулой могут иметь вид p^{14} или q^2r^4, где p,q,r - простые числа. Первый вариант невозможен, т.к. искомое число должно оканчиваться на 0. Во втором случае 0 на конце можно получить, если q=2, r=5 или q=5, r=2. Получаются числа $2^5 \cdot 5^4$= 2500 или $5^2 \cdot 2^4$= 400.
- **Ответ:** 2500; 400.

Задача, связанная со свойствами делимости целых чисел, логическим перебором.

- На доске написано более 27, но менее 45 целых чисел. Среднее арифметическое этих чисел -5, среднее арифметическое всех положительных из них равно 9, а среднее арифметическое всех отрицательных из них равно – 18.
- а) Сколько чисел написано на доске?
- б) Каких чисел написано больше: положительных или отрицательных?
- в) Какое наибольшее количество положительных чисел может быть среди них?

Решение.

- Пусть k из написанных чисел положительны, n – отрицательны и m – нули. Сумма набора чисел равна количеству чисел в этом наборе, умноженному на его среднее арифметическое, поэтому
- $9k – 18n +0m = -5(k +n + m)$.
- **а)** Каждое слагаемое в левой части полученного равенства делится на 9, поэтому и $k +n + m$ делится на 9.
- По условию $27< k + n + m< 45$, поэтому
- $k +n + n = 36$.
- **На доске написано 36 чисел**.

- **б**) Приведём равенство
  $9k - 18n + 0m = -5(k + n + m)$ к виду
- $13n = 14k + 5m$. Так как $m \geq 0$, то $13n \geq 14k$, откуда $n>k$. **Следовательно, отрицательных чисел больше, чем положительных**.
- **в**) Так как $k + n + m = 36$,
- а $9k - 18n = -5(k + n + m)$, то получим, что $9k - 18n = -180$ и $k = 2n - 20$.
- Поскольку $k + n \leq 36$, то $3n - 20 \leq 36$ и, значит, $3n \leq 56$, откуда $n \leq 18$ (т.к. n – натуральное число). Но $k = 2n - 20$, поэтому $k \leq 16$.
- Пусть положительных чисел ровно 16,тогда положительное число 9 написано 16 раз, 18 раз написано число -18 и 2 раза написан 0. Тогда $\frac{9 \cdot 16 - 18 \cdot 18}{36} = -5$
- **Ответ: а) 36; б) отрицательных; в) 16.**

Чётность и нечётность чисел в задачах С 6.

- **Необходимо чётко знать:**
- 1.Представление чётного числа и нечётного в виде $n=2k$, $n=2k+1$.
- 2. **Свойства чётных и нечётных чисел:**
- а) сумма чётного и нечётного чисел-нечётное;
- б)сумма чётных чисел- число чётное;
- в)сумма нечётных чисел- четное число, если количество слагаемых чётно, и нечётное, если количество слагаемых нечётно;
- г)произведение целых чисел чётно, если хотя бы один из множителей чётен, и нечётно, если все множители нечётны
- д)сумма и разность двух целых чисел имеют одинаковую чётность.

Задача.

- Найти все натуральные n, при которых число 2^n+65 - точный квадрат.
- **Решение**. Рассмотрим два случая.
- **а).n-чётно**, тогда n=2k, k$\in$N и 2^{2k}+65=m^2, m$\in$N.
- Имеем m^2- 2^{2k}=65 или (m-2^k)(m+2^k)=65.
- Т.к. 65=65$\cdot 1 = 13\cdot$5 и m+$2^k > $ m- 2^k, то
- m+2^k=65 m=33
- m- 2^k=1 k=5 **n=10**
- m+ 2^k=13 m=9
- m- 2^k=5 k=2 **n=4**

- б).Пусть **n- нечётно**. Если n=1, число 2+65=67 не является квадратом. Пусть n=2k+1, k$\in \mathrm{N}$, тогда слагаемое 2^{2k+1}= 2$\cdot$ 4^k. Т.к. степень 4 оканчивается на цифру 4 или 6, то 2$\cdot 4^k$ оканчивается на цифру 8 или 2, сумма 2^{2k+1}+65 оканчивается цифрой 3 или 7. Но точный квадрат не оканчивается этими цифрами.
- **Ответ:4; 10**

Задание с 6 из диагностической работы от 27.09.11

- Можно ли привести пример различных натуральных чисел произведение которых равно 1512 и
- а)пять;
- б)четыре;
- в)три
- из них образуют геометрическую прогрессию?

Решение.

Пусть n – количество последовательных членов геометрической прогрессии, произведение которых делит 1512.

$1512 = 2^3 3^3 7^1$. Следовательно, члены геометрической прогрессии состоят только из простых множителей 2, 3 и 7.

Пусть первый член равен $2^a \cdot 3^b \cdot 7^c$, а знаменатель прогрессии равен $2^d \cdot 3^e \cdot 7^f$ (a, b, c, d, e, f – целые неотрицательные числа, при этом хотя бы одно из чисел d, e, f больше нуля). Тогда произведение чисел равно

$$2^{na+d+2d+\ldots+(n-1)d} \cdot 3^{nb+e+2e+\ldots+(n-1)e} \cdot 7^{nc+f+2f+\ldots+(n-1)f} =$$
$$= 2^{na+\frac{(n-1)n}{2}d} \cdot 3^{nb+\frac{(n-1)n}{2}e} \cdot 7^{nc+\frac{(n-1)n}{2}f}.$$

Полученное число является делителем числа $1512 = 2^3 \cdot 3^3 \cdot 7^1$. Следовательно,

$$na + \frac{(n-1)nd}{2} \le 3,\ nb + \frac{(n-1)ne}{2} \le 3 \ \text{ и } \ nc + \frac{(n-1)nf}{2} \le 1. \quad (1)$$

Если $n \ge 4$, то $na + \dfrac{(n-1)nd}{2} \ge 4a + 6d$.

Аналогично,

$$nb + \frac{(n-1)ne}{2} \ge 4b + 6e \ \text{ и } \ nc + \frac{(n-1)nf}{2} \ge 4c + 6f.$$

Неравенства

$$4a + 6d \le 3,\ \ 4b + 6e \le 3 \ \text{ и } \ 4c + 6f \le 1$$

имеют целые неотрицательные решения только при $d = e = f = 0$, что невозможно.

Следовательно, $n \leq 3$. Тем самым мы ответили на вопросы а) и б) – ни пять, ни четыре числа не могут образовывать геометрическую прогрессию и иметь при этом произведение, которое делит 1512.

Приведем пример пяти чисел, удовлетворяющих условию задачи при $n = 3$. Положим $a = b = c = e = f = 0$, $d = 1$.

Получаем три члена геометрической прогрессии 1, 2, 4. Их произведение равно 8. $\frac{1512}{8} = 189 = 3 \cdot 63$. Следовательно, в качестве четвертого и пятого можно взять, например, числа 3 и 63: $1512 = 1 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 63$.

Ответ: а) нет; б) нет; в) да.

Более простое и доступное для учащихся решение.

- а) Пусть a,b,c,d,e-данные числа, тогда abcde=1512
- a=b_1; b=b_1q; c=$b_1 q^2$; d=$b_1 q^3$; e=$b_1 q^4$.
- $b_1 b_1$q$b_1 q^2 b_1 q^3 b_1 q^4$=1512
- ${b_1}^5 q^{10}$=1512
- ${b_1}^5 q^{10}$= $2^{3\cdot} 3^{3\cdot}$ 7
- Т.к.b_1 и q-натуральные числа и разложение нельзя представить в виде 5 и 10 степеней, то нельзя привести пример.

Ответ: нет

- б).a=$b_{1;}$ b=b_1q; c=b_1q^2; d=b_1q^3; e.
- b_1b_1q$b_1q^2b_1q^3$e=1512
- ${b_1}^4q^6$e=1512=$2^{3\cdot}3^{3\cdot}7$
- Это разложение нельзя представить в виде произведения 4 и 6 степеней.
- **Ответ: нет**
- в) a=b_1; b $= b_1$q; c=b_1q^2; d ;e.
- b_1b_1qb_1q^2de=1512
- ${b_1}^3q^3$de=$2^{3\cdot}3^{3\cdot}$7·1=2·6·18·7·1
- Числа 2,6,18-образуют геометрическую прогрессию.
- Ответ: 2; 6; 18; 7; 1.
- **Ответ: а) нет**
- **б)нет**
- **в) да 2; 6; 18; 7; 1.**

Задача

- Перед каждым из чисел 14, 15, …, 20 и 6, 7, …, 10 произвольным образом ставят знак плюс или минус, после чего от каждого из образовавшихся чисел первого набора отнимают каждое из образовавшихся чисел второго набора, а затем все 35 полученных результатов складывают. Какую наименьшую по модулю и какую наибольшую сумму можно получить в итоге?

Решение.

- 1.Если все числа первого набора взять с плюсом, а второго- с минусом, то сумма наибольшая и равна
- 5(14+15+ … +20) – 7(-6- 7-…-10)=
- $= 5(\frac{14+20}{2} \cdot 7) + 7(\frac{6+10}{2} \cdot 5) = 35 \cdot 25 = 875$
- 2.Предыдущая сумма- нечётное число, то число нечётных слагаемых в ней нечётно поэтому любая из получающихся сумм будет нечётной, независимо от знака и значит не может быть равной 0.
- 3.Наименьшее значение 1 может быть получено следующим образом:
- $5(-14-15+16-17+18-19+20)-7(-6+7-8+9-10)=5\cdot11+7\cdot8=$
- =-55+56=1
- Ответ: 1 и 875

Успешной сдачи ЕГЭ.

- Спасибо за внимание.