

ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ
ПРОФЕССИОНАЛЬНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ГОРОДА
МОСКВЫ
"КОЛЛЕДЖ ПОЛИЦИИ"

Тема: Первообразная и интеграл

Преподаватель: Зайцева О.Н.

Подготовила: курсант 11 взвода

Пастухова А.В.

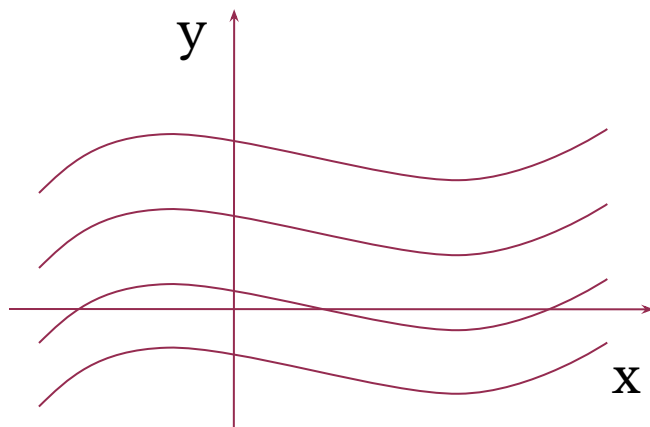
Первообразная

- Функция $F(x)$ называется **первообразной** для функции $f(x)$ на данном промежутке, если для любого x из этого промежутка $F'(x) = f(x)$.
- Пример:
Первообразной для функции $f(x)=x$ на всей числовой оси является $F(x)=x^2/2$, поскольку $(x^2/2)'=x$.

Основное свойство первообразных

- Если $F(x)$ – первообразная функции $f(x)$, то и функция $F(x)+C$, где C – произвольная постоянная, также является первообразной функции $f(x)$.

Геометрическая интерпретация



- Графики всех первообразных данной функции $f(x)$ получаются из графика какой-либо одной первообразной параллельными переносами вдоль оси y .

Определенный интеграл

- В декартовой прямоугольной системе координат XOY фигура, ограниченная осью OX , прямыми $x=a$, $x=b$ ($a < b$) и графиком непрерывной неотрицательной на отрезке $[a;b]$ функции $y=f(x)$, называется криволинейной трапецией

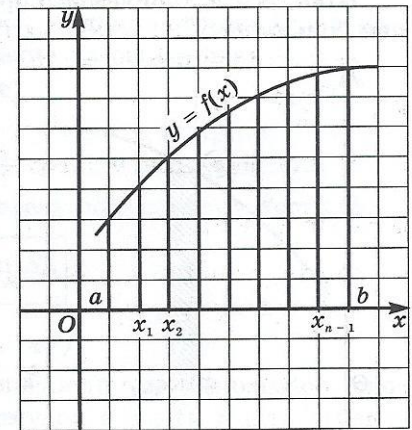


Рис. 224

Определенный интеграл

- Вычислим площадь криволинейной трапеции. Разобьем отрезок $[a;b]$ на n равных частей. Проведем через полученные точки прямые, параллельные оси OY . Заданная криволинейная трапеция разобьется на n частей. Площадь всей трапеции приближенно равна сумме площадей столбиков.

$$S_n = f(x_0) \cdot \Delta x_0 + f(x_1) \cdot \Delta x_1 + \dots + f(x_{n-1}) \cdot \Delta x_{n-1}$$

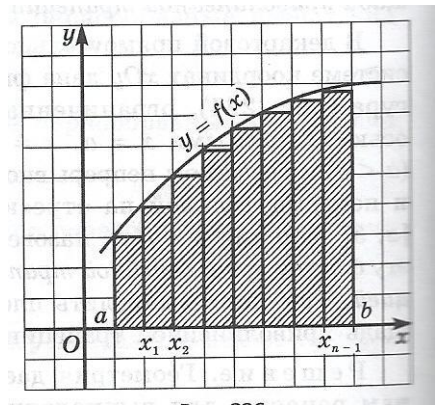
$$S \approx S_n$$

по определению $S = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n$, его называют

определенным интегралом от функции

$y=f(x)$ по отрезку $[a;b]$ и обозначают так:

$$\int_a^b f(x) dx$$



Связь между определенным интегралом и первообразной (Формула Ньютона - Лейбница)

- Для непрерывной функции

$$\int_a^b f(x) dx = F(x) \Big|_a^b = F(b) - F(a)$$

где $F(x)$ – первообразная функции $f(x)$.

Основные свойства определенного интеграла

$$\int_a^a f(x) dx = 0$$

$$\int_a^b dx = b - a$$

$$\int_a^b f(x) dx = -\int_b^a f(x) dx$$

Основные свойства определенного интеграла

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

$$\int_a^b cf(x)dx = c \int_a^b f(x)dx, c - const$$

$$\int_a^b (f(x) \pm g(x))dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx$$

**Неопределенный
интеграл.
Непосредственное
интегрирование.**

**Таблица основных
интегралов.**

$$\int 0 dx = c$$

$$\int dx = x + C$$

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C \quad n \neq -1$$

$$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$$

$$\int e^x dx = e^x + C$$

$$\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C$$

$$\int \sin x dx = -\cos x + C$$

$$\int \cos x dx = \sin x + C$$

$$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C$$

$$\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C, \quad x \neq \frac{\pi}{2} + \pi n$$

$$\int \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg}x + C$$

$$\int \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + C$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C, x \in (-1, 1)$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + C, x \in (-a, a), a \neq 0$$

$$\int \frac{dx}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{x-a}{x+a} \right| + C, x \neq \pm a, a \neq 0.$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm k}} = \ln \left| x + \sqrt{x^2 \pm k} \right| + C, x^2 + k > 0.$$

Применение определенного интеграла.

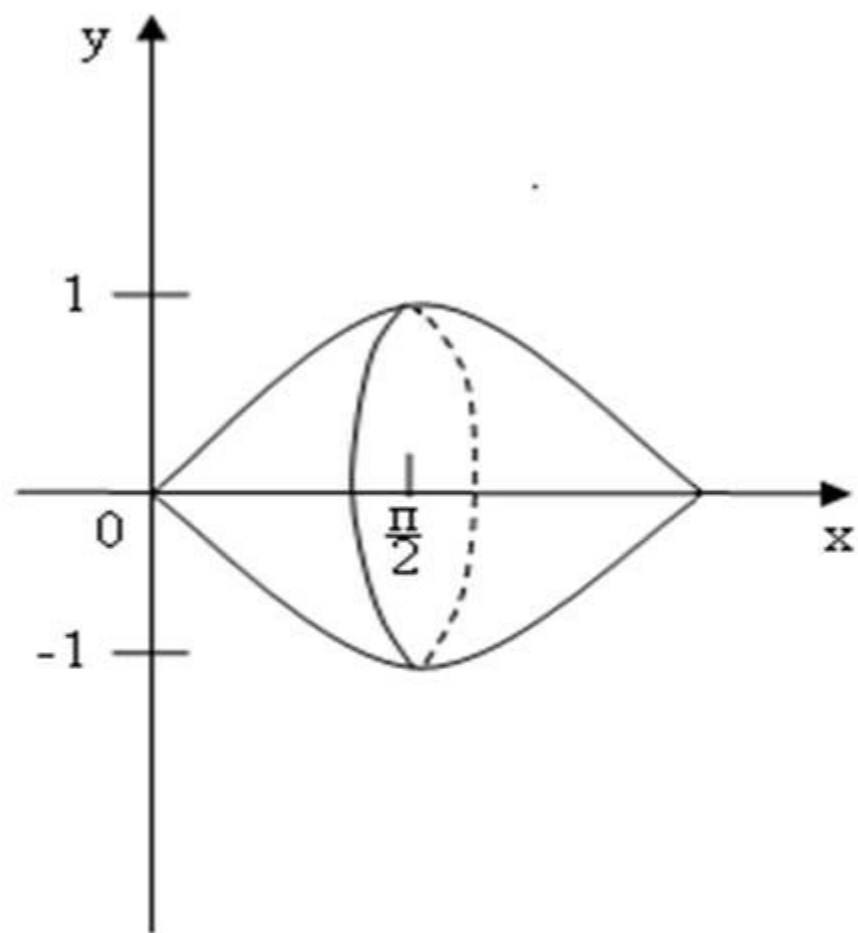
Пример.

Вычислить объем тела, образованного вращением вокруг оси Ox одной полуволны синусоиды $y = \sin x$

Решение: Воспользуемся формулой для вычисления объема тела вращения получаем $V = \pi \int_0^{\pi} \sin^2 x dx$ далее вычисляется данный интеграл:

$$\begin{aligned} V &= \pi \int_0^{\pi} \sin^2 x dx = \pi \int_0^{\pi} \frac{1 - \cos 2x}{2} dx = \frac{\pi}{2} \left(\int_0^{\pi} dx - \int_0^{\pi} \cos 2x dx \right) = \\ &= \frac{\pi}{2} \left(x - \frac{\sin 2x}{2} \right) \Big|_0^{\pi} = \frac{\pi^2}{2} \text{ (куб.ед.)}. \end{aligned}$$



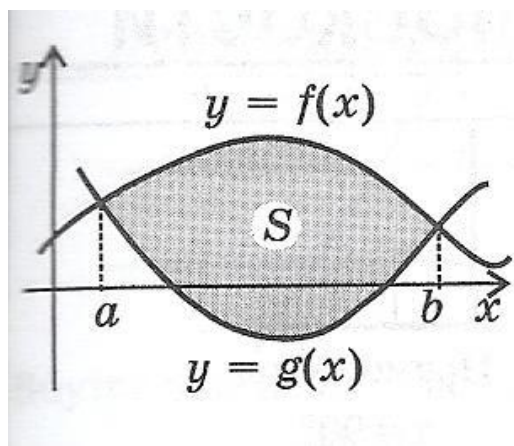


Вычисление площадей и объемов

с помощью определенного интеграла

Площадь фигуры,

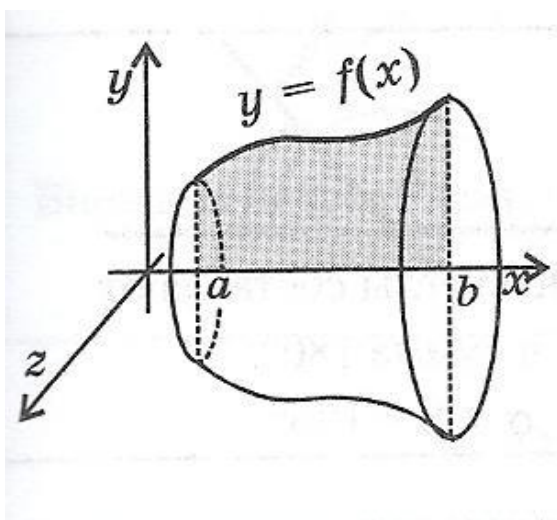
- Ограниченной графиками непрерывных функций $y=f(x)$ и $y=g(x)$ таких, что $f(x) \geq g(x)$ для любого x из $[a;b]$, где a и b – абсциссы точек пересечения графиков функций:



$$S = \int_a^b (f(x) - g(x)) dx$$

Объем тела,

- полученного в результате вращения вокруг оси x криволинейной трапеции, ограниченной графиком непрерывной и неотрицательной функции $y=f(x)$ на отрезке $[a;b]$:



$$V = \pi \int_a^b f^2(x) dx$$

Применение определенного интеграла в физике

Работа силы

Работа A , совершаемая силой F на конечном участке траектории L точки ее приложения, равна алгебраической сумме работ на всех малых частях этого участка, т.е. выражается криволинейным интегралом

$$A = \int_0^x F dx$$

Работа силы упругости

x_0 - Начальная длина пружины

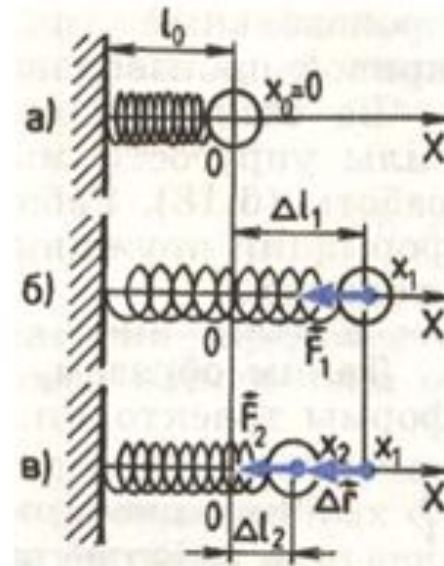
x_1 - Растяжение пружины

$F = kx$ - Сила упругости

$$A = \int_0^x F dx = \int_0^l kx dx$$

$$A = \int_0^l kx dx = k \int_0^l x dx = k \left[\frac{x^2}{2} \right]_0^l$$

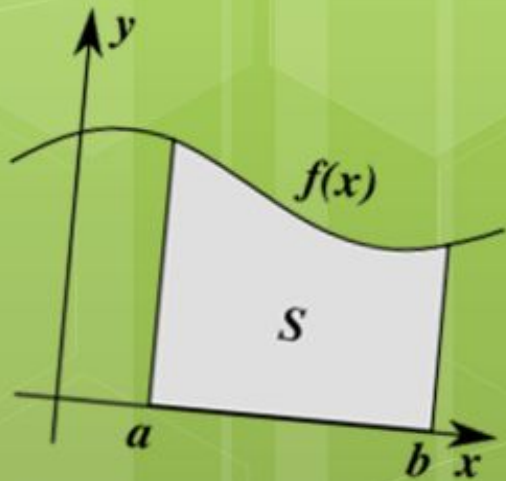
■ Деформация пружины



Приложение определенного интеграла в экономике

$$\int_a^b f(x) dx$$

$$\int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx$$



$$\iint_{\Omega} \sqrt{H(x,y)} dx dy$$



Приложение
определенного
интеграла в
экономике

1

Определить объем
продукции, произведенной
рабочим за третий час
рабочего дня, если
производительность труда
характеризуется функцией
 $f(t) = 3/(3t + 1) + 4$.

РЕШЕНИЕ

Если $f(t)$ характеризует производительность труда рабочего в зависимости от (времени) t , то объем продукции, за времени от t_1 до t_2 будет выражаться формулой:

$$V = \int_{t_1}^{t_2} f(t) dt$$

В нашем случае:

$$\begin{aligned} V &= \int_2^3 \left(\frac{3}{3t+1} + 4 \right) dt = (\ln(3t+1) + 4t) \Big|_2^3 = \\ &= \ln 10 + 12 - \ln 7 - 8 = \ln 10/7 + 4 \end{aligned}$$

2

Определить запас товаров в магазине, образуемый за три дня, если поступление товаров характеризуется функцией $f(t) = 2t + 5$.

РЕШЕНИЕ

Имеем:

$$V = \int_0^3 (2t + 5) dt =$$

$$= \left(\frac{2t^2}{2} + 5t \right) \Big|_0^3 =$$

$$= 9 + 15 - 0 - 0 = 24$$

Задачи на
определение
излишка
потребителя.



3

Известно, что спрос на некоторый товар задается функцией $p=4-q^2$, где q – количество товара (в шт.), p – цена единицы товара (в руб.), а равновесие на рынке данного товара достигается при $p^*=q^*=1$. Определите величину потребительского излишка.

РЕШЕНИЕ

$$CS = \int_0^{q^*} f(q) dq - p^* q^* =$$

$$= \int_0^1 (4 - q^2) dq - 1 \times 1 =$$

$$= \left(4q - \frac{q^3}{3}\right) \Big|_0^1 - 1 = 4 - \frac{1}{3} - 1 = 2\frac{2}{3}$$