ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ
ПРОФЕССИОНАЛЬНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ГОРОДА МОСКВЫ
"КОЛЛЕДЖ ПОЛИЦИИ"

Тема: Первообразная и интеграл

Преподаватель: Зайцева О.Н.

Подготовила: курсант 11 взвода

Пастухова А.В.

Первообразная

- Функция F(x) называется **первообразной** для функции f(x) на данном промежутке, если для любого x из этого промежутка F'(x) = f(x).

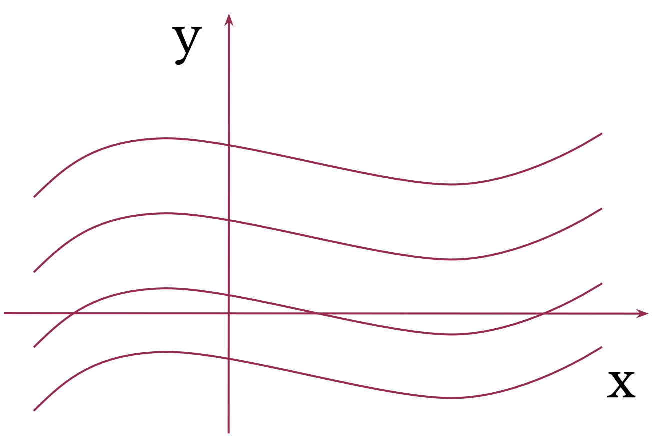
  - Пример:

    Первообразной для функции $f(x)=x$ на всей числовой оси является $F(x)=x^2/2$, поскольку $(x^2/2)'=x$.

Основное свойство первообразных

- Если F(x) – первообразная функции f(x), то и функция F(x)+C, где C – произвольная постоянная, также является первообразной функции f(x).

Геометрическая интерпретация



- Графики всех первообразных данной функции f(x) получаются из графика какой-либо одной первообразной параллельными переносами вдоль оси y.

Определенный интеграл

- В декартовой прямоугольной системе координат XOY фигура, ограниченная осью OX, прямыми x=a, x=b (a<b) и графиком непрерывной неотрицательной на отрезке [a;b] функции y=f(x), называется криволинейной трапецией

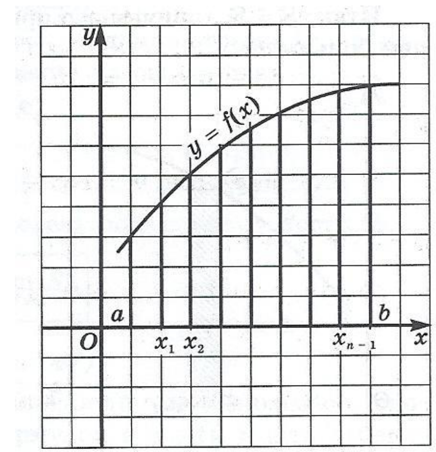
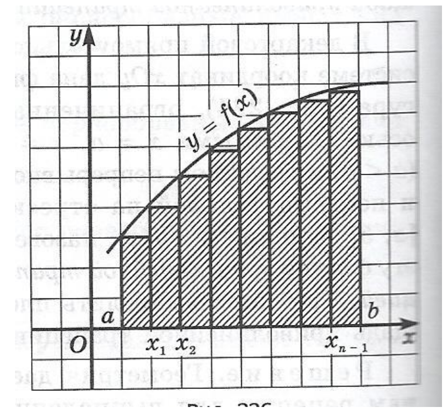


Рис. 224

Определенный интеграл

- Вычислим площадь криволинейной трапеции. Разобьем отрезок [a;b] на n равных частей. Проведем через полученные точки прямые, параллельные оси OY. Заданная криволинейная трапеция разобьется на n частей. Площадь всей трапеции приближенно равна сумме площадей столбиков.



$$S_n = f(x_0)\cdot\Delta x_0 + f(x_1)\cdot\Delta x_1 + \ldots + f(x_{n-1})\cdot\Delta x_{n-1}$$

$$S \approx S_n$$

по определению $S = \lim\limits_{n\to\infty} S_n$, его называют определенным интегралом от функции y=f(x) по отрезку [a;b] и обозначают так: $\int\limits_a^b f(x)dx$

Связь между определенным интегралом и первообразной
(Формула Ньютона - Лейбница)

- Для непрерывной функции

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a)$$

где F(x) – первообразная функции f(x).

Основные свойства определенного интеграла

$$\int_a^a f(x)dx = 0$$

$$\int_a^b dx = b - a$$

$$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$$

Основные свойства определенного интеграла

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

$$\int_a^b cf(x)dx = c\int_a^b f(x)dx, c - const$$

$$\int_a^b (f(x) \pm g(x))dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx$$

Неопределенный интеграл. Непосредственное интегрирование.

Таблица основных интегралов.

$$\int 0dx = c$$

$$\int dx = x + C$$

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + CO$$

$$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$$

$$\int e^x dx = e^x + C$$

$$\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C$$

$$\int \sin x dx = -\cos x + C$$

$$\int \cos x dx = \sin x + C$$

$$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = tgx + C$$

$$\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -ctgx + C, \ x \neq \frac{\pi}{2} + \pi n$$

$$\int \frac{dx}{1+x^2} = \text{arctg}x + C$$

$$\int \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a}\text{arctg}\frac{x}{a} + C$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C,\ x \in (-1,1)$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin\frac{x}{a} + c,\ x \in (-a, a), a \neq 0$$

$$\int \frac{dx}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + C,\ x \neq \pm a, a \neq 0.$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm k}} = \ln\left|x + \sqrt{x^2 \pm k}\right| + C,\ x^2 + k > 0.$$

Применение определенного интеграла.

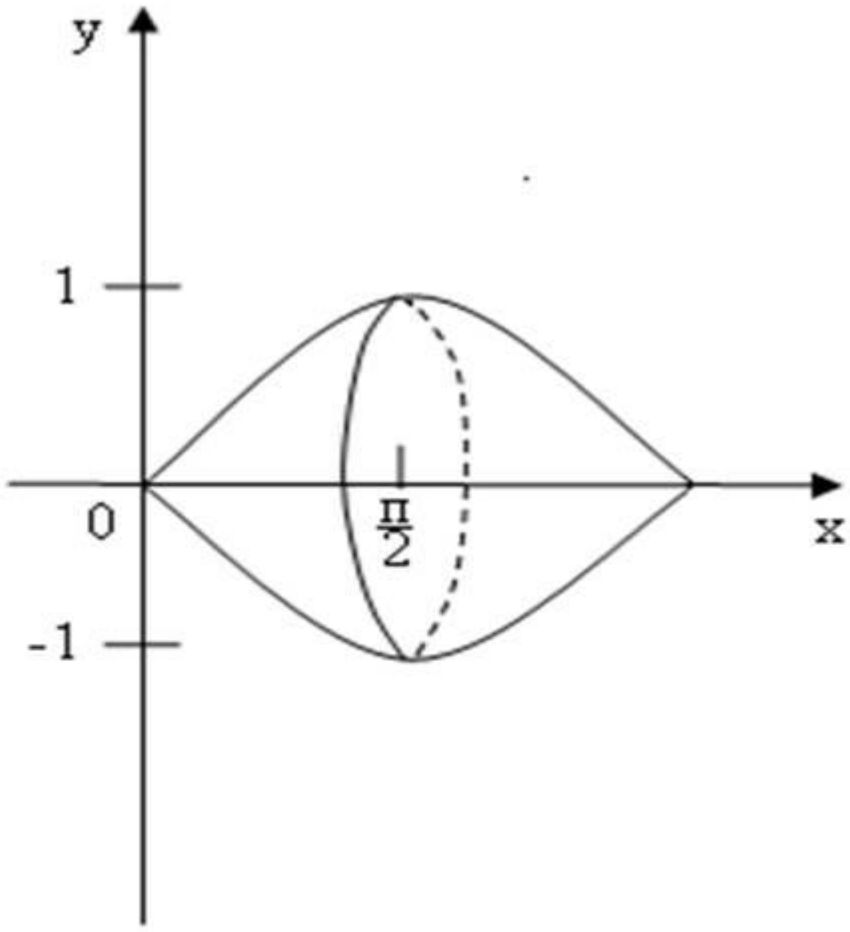
Пример.

Вычислить объем тела, образованного вращением вокруг оси Ox одной полуволны синусоиды $y = \sin x$

Решение: Воспользуемся формулой для вычисления объема тела вращения получаем $V = \pi \int_0^{\pi} \sin^2 x dx$ далее вычисляется данный интеграл:

$$V = \pi \int_0^{\pi} \sin^2 x dx = \pi \int_0^{\pi} \frac{1 - \cos 2x}{2} dx = \frac{\pi}{2} \left(\int_0^{\pi} dx - \int_0^{\pi} \cos 2x dx \right) =$$

$$= \frac{\pi}{2} \left(x - \frac{\sin 2x}{2} \right) \Bigg|_0^{\pi} = \frac{\pi^2}{2} (куб.ед.).$$


y
1
-1
0
π
2
x

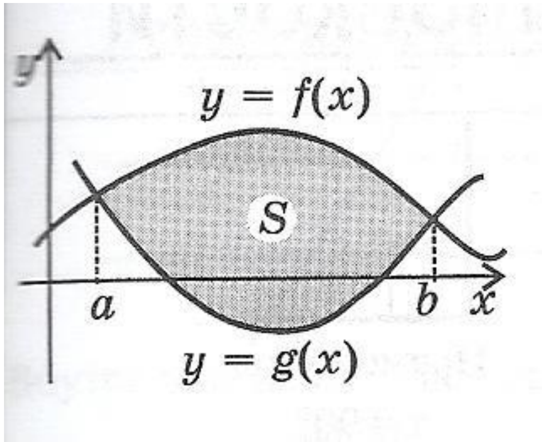
Вычисление площадей и объемов

с помощью определенного интеграла

Площадь фигуры,

- Ограниченной графиками непрерывных функций y=f(x) и y=g(x) таких, что $f(x) \geq g(x)$

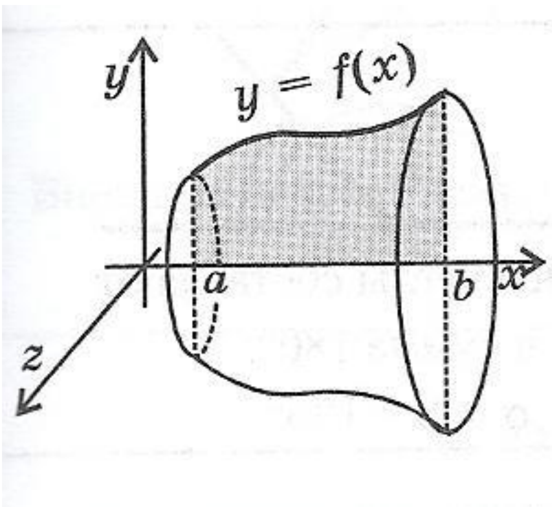
  для любого x из [a;b], где a и b – абсциссы точек пересечения графиков функций:



$$S = \int_a^b (f(x) - g(x))dx$$

Объем тела,

- полученного в результате вращения вокруг оси x криволинейной трапеции, ограниченной графиком непрерывной и неотрицательной функции y=f(x) на отрезке [a;b]:



$$V = \pi \int_a^b f^2(x)dx$$

Применение определенного интеграла в физике

Работа силы

Работа A, совершаемая силой F на на конечном участке траектории L точки ее приложения, равна алгебраической сумме работ на всех малых частях этого участка, т.е. выражается криволинейным интегралом

$$A = \int_0^x F dx$$

Работа силы упругости

x_0 - Начальная длина пружины

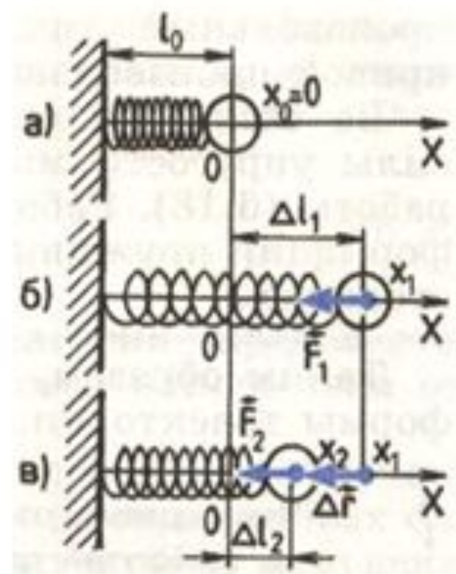
x_1 - Растяжение пружины

F = kx - Сила упругости

$$A = \int_0^x F dx = \int_0^l kx dx$$

$$A = \int_0^l kx dx = k \int_0^l x dx = k \left[\frac{x^2}{2} \right]_0^l$$

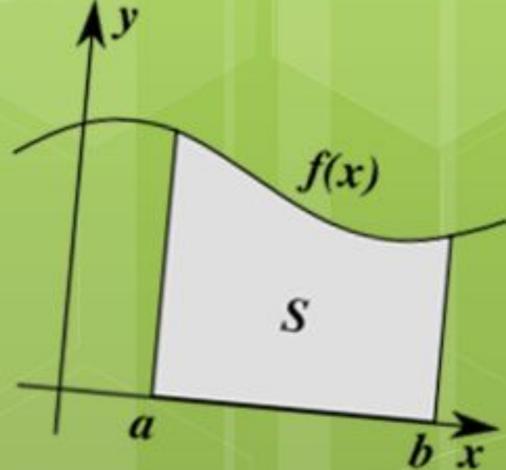
- Деформация пружины

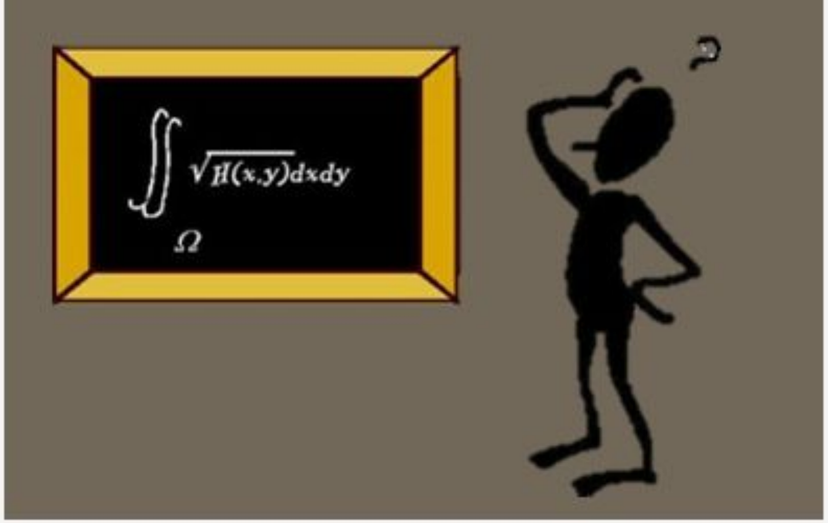


Приложение определенного интеграла в экономике

$$\int_a^b f(x)dx$$

$$\int_a^c f(x) + \int_c^b f(x)dx$$





Приложение определенного интеграла в экономике

1

Определить объем продукции, произведенной рабочим за третий час рабочего дня, если производительность труда характеризуется функцией $f(t) = 3/(3t + 1) + 4$.

РЕШЕНИЕ

Если ***f(t)*** характеризует производительность труда рабочего в зависимости от (времени) ***t***, то объем продукции, за времени от t_1 до t_2 будет выражаться формулой:

$$V=\int_{t_1}^{t_2} f(t)dt$$

В нашем случае:

$$V=\int_2^3\left(\frac{3}{3t+1}+4\right)dt=(\ln(3t+1)+4t)\Big|_2^3=$$

$$=\ln 10+12-\ln 7-8=\ln 10/7+4$$

2

Определить запас товаров в магазине, образуемый за три дня, если поступление товаров характеризуется функцией $f(t) = 2t + 5$.

РЕШЕНИЕ

Имеем:

$$V = \int_0^3 (2t + 5)dt =$$

$$= \left(\frac{2t^2}{2} + 5t\right)\Big|_0^3 =$$

$$= 9 + 15 - 0 - 0 = 24$$

Задачи на определение излишка потребителя.

3

Известно, что спрос на некоторый товар задается функцией $p=4-q2$, где q– количество товара (в шт.), p– цена единицы товара (в руб.), а равновесие на рынке данного товара достигается при $p^*=q^*=1$. Определите величину потребительского излишка.

РЕШЕНИЕ

$$CS = \int_0^{q*} f(q)dq - p*q* =$$

$$= \int_0^1 (4 - q^2)dq - 1 \times 1 =$$

$$= (4q - \frac{q^3}{3})\Big|_0^1 - 1 = 4 - \frac{1}{3} - 1 = 2\frac{2}{3}$$