УРАВНЕНИЯ И НЕРАВЕНСТВА ПОВЫШЕННОЙ СЛОЖНОСТИ С ПАРАМЕТРОМ.

Иванова Инна Владимировна
Сунтар МБОУ «СПТЛ-и»

НЕОБХОДИМАЯ ТЕОРИЯ

Задачи с параметрами бывают двух типов:

1) «для каждого значения параметра найти все решения некоторого уравнения или неравенства»
2) «найти все значения параметра, при каждом из которых решения уравнения или неравенства удовлетворяют заданным условиям»

НЕОБХОДИМАЯ ТЕОРИЯ

Задачи с параметрами бывают двух типов:

1) «для каждого значения параметра найти все решения некоторого уравнения или неравенства»

Пример 2:

Решить уравнение $(x-3)\sqrt{x-a}=0$

Ответ: При $a<3$ $x=a$ или $x=3$;

при $a=3$ $x=3$;

при $a>3$ $x=a$.

НЕОБХОДИМАЯ ТЕОРИЯ

Пример 3. Найти все значения параметра a, при которых уравнение $\frac{y+a}{y+2} = 0$ не имеет решения

Ответ: если $a = 2$

2) «найти все значения параметра, при каждом из которых решения уравнения или неравенства удовлетворяют заданным условиям»

НЕОБХОДИМАЯ ТЕОРИЯ

Четыре метода решения задач с параметром:

1) Использование графических иллюстраций;
2) Использование симметрии аналитических выражений;
3) Сведение к исследованию квадратного трёхчлена;
4) Использование ограниченности функций, входящих в левую и правую части уравнений и неравенств.

НЕОБХОДИМАЯ ТЕОРИЯ

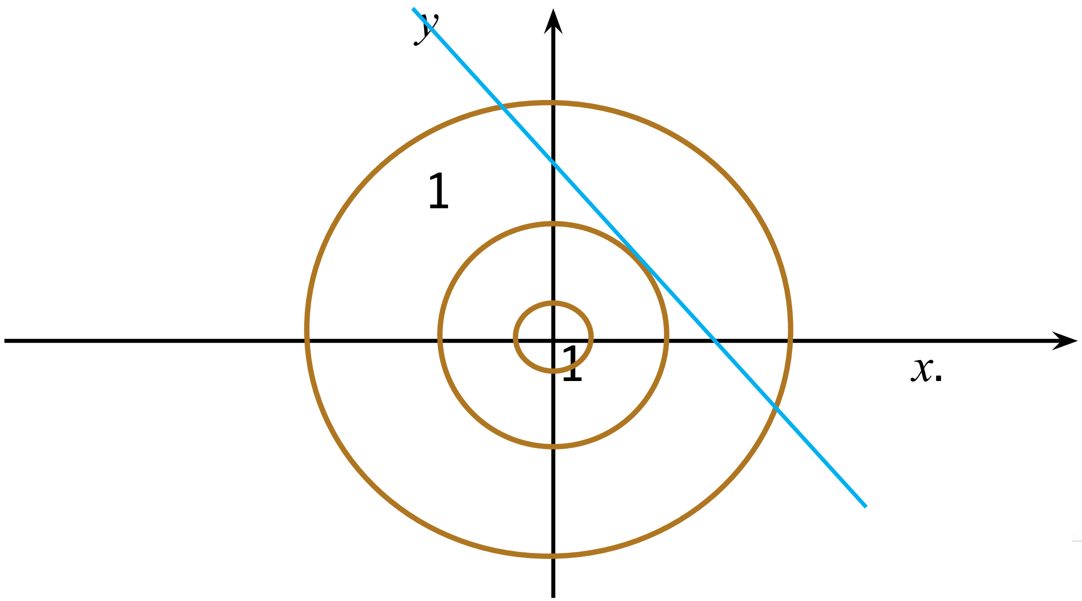
Использование графических иллюстраций

Геометрическая интерпретация при анализе задач с параметрами часто позволяет упростить анализ, а в ряде случаев является единственным ключом к решению.

НЕОБХОДИМАЯ ТЕОРИЯ

Использование графических иллюстраций

Упражнение1: При каких значениях параметра a система $\begin{cases} x + y = 9 \\ x^2 + y^2 = a \end{cases}$ имеет единственное решение?



Ответ: при $a = \frac{1}{2}$

НЕОБХОДИМАЯ ТЕОРИЯ

Использование симметрии аналитических выражений;

1) В каждой задаче обязательно имеется аналитическое выражение, геометрический образ которого имеет или ось или центр (иногда даже плоскость) симметрии.

2) Во всех задачах присутствует требование единственности решения.

НЕОБХОДИМАЯ ТЕОРИЯ

Использование симметрии аналитических выражений

Упражнение1: При каких значениях параметра a система $\begin{cases} x + y = 9 \\ x^2 + y^2 = a \end{cases}$ имеет единственное решение?

План решения:

1) если пара чисел $(x_0;\ y_0)$ – решение системы, то пара чисел $(y_0;\ x_0)$ тоже является её решением. Поэтому условие $x_0 = y_0$ является ***необходимым*** для существования единственного решения, *но не является достаточным*.

2) Найдём, при каком значении а система будет иметь пару равных решений, подставим x вместо y. Вычислим a.

3) Подставив a в систему, убеждаемся, что решение действительно единственное.

Ответ: при $a = \frac{1}{2}$

НЕОБХОДИМАЯ ТЕОРИЯ

Сведение к исследованию квадратного трёхчлена

Упражнение 2: Найти значения параметра a, при каждом из которых уравнение $a\cdot 9^x-4\cdot 3^x+1=0$ имеет единственное решение.

План решения:

1) Если дискриминант равен нулю, то ….
2) Если дискриминант больше нуля, но корни разного знака, то …
3) Если уравнение – линейное, то …

Ответ: при $a\epsilon(-\infty;\ \mathbf{0}]\cup\{4\}$

НЕОБХОДИМАЯ ТЕОРИЯ

Использование ограниченности функций, входящих в левую и правую части уравнений и неравенств.

Применение этого метода окажется успешным, если знать:

1) Как находить экстремумы элементарных функций и их композиций на заданном множестве.
2) Неравенство Коши (неравенство средних).
3) Неравенство для суммы синуса и косинуса одного аргумента: $|a\,sinx + b\,cosx| \le \sqrt{a^2+b^2}$.
4) Неравенство для суммы двух взаимно обратных чисел: $\frac{1}{x} + x \ge 2$ при $x > 0$, $\frac{1}{x} + x \le -2$ при $x < 0$

НЕОБХОДИМАЯ ТЕОРИЯ

Использование ограниченности функций, входящих в левую и правую части уравнений и неравенств.

Упражнение 3. При каких значениях параметра *p* система

$$\begin{cases} x^2 + 2px + 4p^2 - 5p + 3 \le 4\sin y - 4\cos y \\ 0 \le y \le 2\pi \end{cases}$$

имеет единственное решение?

План решения:

1) Оценим левую часть первого неравенства, находим её наименьшее значение….

2) Оценим правую часть первого неравенства, находим наибольшее значение …

3) Чтобы решение было единственным, надо … совпадал с максимумом правой, получаем уравнение …

4) Решаем уравнение…

Ответ: при $p \in \left\{-\frac{1}{3}; 2\right\}$

ДЕМО-2015. ЗАДАНИЕ №20.

Найдите все положительные значения a**, при каждом из которых система**

$$\begin{cases} (|x|-5)^2+(y-4)^2=9 \\ (x+2)^2+y^2=a^2 \end{cases}$$

имеет единственное решение.

Ответ:

ДЕМО-2015. ЗАДАНИЕ №20.

Содержание критерия	*Баллы*
Обоснованно получен верный ответ	4
С помощью верного рассуждения получены оба верных значения параметра, но – или в ответ включены также и одно-два неверных значения; – или решение недостаточно обосновано	3
С помощью верного рассуждения получено хотя бы одно верное значение параметра	2
Задача сведена к исследованию: – или взаимного расположения трёх окружностей; – или двух квадратных уравнений с параметром	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	***4***

ВОСТОК-2013. ЗАДАНИЕ №С6.

Найдите все значения *a*, при каждом из которых уравнение

$$x^2 - |x + 2 + a| = |x - a - 2| - (a - 2)^2$$

имеет единственный корень.

Ответ:

СИБИРЬ-2013. ЗАДАНИЕ №С6.

Найдите все значения *a*, при каждом из которых уравнение

$$x^2 + (a-3)^2 = |x+3-a| + |x+a-3|$$

имеет единственный корень.

Ответ:

Центр-2013. Задание №С6.

Найдите все значения *а*, при каждом из которых уравнение

$$ax + \sqrt{-7 - 8x - x^2} = 2a + 3$$

имеет единственный корень.

Ответ:

УРАЛ-2013. ЗАДАНИЕ №С6.

Найдите все значения *а*, при каждом из которых уравнение

$$8a + \sqrt{7 + 6x - x^2} = ax + 4$$

имеет единственный корень.

Ответ:

Досрочный-2014. Задание №С6.

Найдите все значения *а*, при каждом из которых уравнение

$$\sqrt{x^4+(a-5)^4}=|x+a-5|+|x-a+5|$$

имеет единственный корень.

Ответ:

ДИАГНОСТИЧЕСКИЙ-2014. ЗАДАНИЕ №С6.

При каких значениях *a*, произведение корней уравнения

$$(x + 2a)(x^2 - a^2 - 2a - 1) = 0$$

меньше наименьшего корня этого уравнения.

Ответ: при

5 июня 2014. Задание №С6.

Найдите все значения *а*, при каждом из которых уравнение

$$(|x+2|+|x-a|)^2-5(|x+2|+|x-a|)+3a(5-3a)=0$$

имеет ровно два решения.

Ответ: при

ИСПОЛЬЗОВАННЫЕ МАТЕРИАЛЫ:

- Черкасов О.Ю. Якушев А.Г. МАТЕМАТИКА: ИНТЕНСИВНЫЙ КУРС ПОДГОТОВКИ К ЭКЗАМЕНУ. Издание восьмое, исправленное. ООО «Издательство «Айрис Пресс» Москва 2003.
- Демонстрационный вариант ЕГЭ 2015 года
- Материалы единого государственного экзамена за 2013– 2014 годы.