

УРАВНЕНИЯ И НЕРАВЕНСТВА ПОВЫШЕННОЙ СЛОЖНОСТИ С ПАРАМЕТРОМ.

Иванова Инна Владимировна
Сунтар МБОУ «СПТЛ-и»

НЕОБХОДИМАЯ ТЕОРИЯ

Задачи с параметрами бывают двух типов:

- 1) «для каждого значения параметра найти все решения некоторого уравнения или неравенства»
- 2) «найти все значения параметра, при каждом из которых решения уравнения или неравенства удовлетворяют заданным условиям»

НЕОБХОДИМАЯ ТЕОРИЯ

Задачи с параметрами бывают двух типов:

- 1) «для каждого значения параметра найти все решения некоторого уравнения или неравенства»

Пример 2:

Решить уравнение $(x - 3)\sqrt{x - a} = 0$

Ответ: При $a < 3$ $x = a$ или $x = 3$;
при $a = 3$ $x = 3$;
при $a > 3$ $x = a$.

НЕОБХОДИМАЯ ТЕОРИЯ

Пример 3. Найти все значения параметра a , при которых уравнение $\frac{y+a}{y+2} = 0$ не имеет решения

Ответ: если $a = 2$

- 2) «найти все значения параметра, при каждом из которых решения уравнения или неравенства удовлетворяют заданным условиям»

НЕОБХОДИМАЯ ТЕОРИЯ

Четыре метода решения задач с параметром:

- 1) Использование графических иллюстраций;
- 2) Использование симметрии аналитических выражений;
- 3) Сведение к исследованию квадратного трёхчлена;
- 4) Использование ограниченности функций, входящих в левую и правую части уравнений и неравенств.

НЕОБХОДИМАЯ ТЕОРИЯ

Использование графических иллюстраций

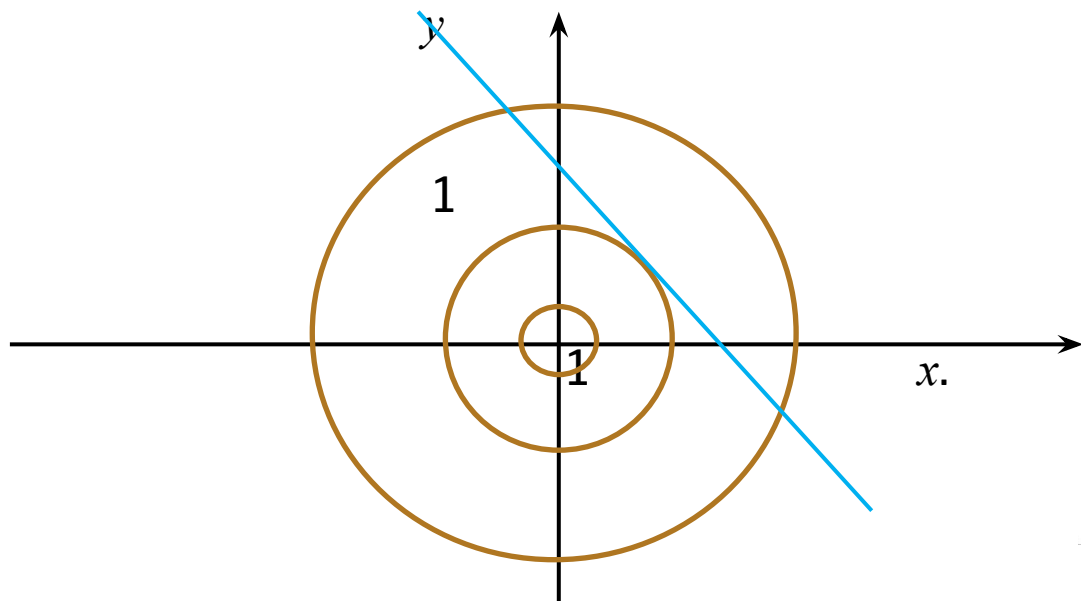
Геометрическая интерпретация при анализе задач с параметрами часто позволяет упростить анализ, а в ряде случаев является единственным ключом к решению.

НЕОБХОДИМАЯ ТЕОРИЯ

Использование графических иллюстраций

Упражнение 1: При каких значениях параметра a

система $\begin{cases} x + y = 9 \\ x^2 + y^2 = a \end{cases}$ имеет единственное решение?



Ответ: при $a = \frac{1}{2}$

НЕОБХОДИМАЯ ТЕОРИЯ

Использование симметрии аналитических выражений;

- 1) В каждой задаче обязательно имеется аналитическое выражение, геометрический образ которого имеет или ось или центр (иногда даже плоскость) симметрии.
- 2) Во всех задачах присутствует требование единственности решения.

НЕОБХОДИМАЯ ТЕОРИЯ

Использование симметрии аналитических выражений

Упражнение 1: При каких значениях параметра a

система $\begin{cases} x + y = 9 \\ x^2 + y^2 = a \end{cases}$ имеет единственное решение?

План решения:

1) если пара чисел $(x_0; y_0)$ – решение системы, то пара чисел $(y_0; x_0)$ тоже является её решением. Поэтому условие $x_0 = y_0$ является *необходимым* для существования единственного решения, *но не является достаточным*.

2) Найдём, при каком значении a система будет иметь пару равных решений, подставим x вместо y . Вычислим a .

3) Подставив a в систему, убеждаемся, что решение действительно единственное.

Ответ: при $a = \frac{1}{2}$

НЕОБХОДИМАЯ ТЕОРИЯ

Сведение к исследованию квадратного трёхчлена

Упражнение 2: Найти значения параметра a , при каждом из которых уравнение $a \cdot 9^x - 4 \cdot 3^x + 1 = 0$ имеет единственное решение.

План решения:

- 1) Если дискриминант равен нулю, то
- 2) Если дискриминант больше нуля, но корни разного знака, то ...
- 3) Если уравнение – линейное, то ...

Ответ: при $a \in (-\infty; 0] \cup \{4\}$

НЕОБХОДИМАЯ ТЕОРИЯ

Использование ограниченности функций, входящих в левую и правую части уравнений и неравенств.

Применение этого метода окажется успешным, если знать:

- 1) Как находить экстремумы элементарных функций и их композиций на заданном множестве.
- 2) Неравенство Коши (неравенство средних).
- 3) Неравенство для суммы синуса и косинуса одного аргумента:
 $|a \sin x + b \cos x| \leq \sqrt{a^2 + b^2}.$
- 4) Неравенство для суммы двух взаимно обратных чисел:
 $\frac{1}{x} + x \geq 2$ при $x > 0$, $\frac{1}{x} + x \leq -2$ при $x < 0$

НЕОБХОДИМАЯ ТЕОРИЯ

Использование ограниченности функций, входящих в левую и правую части уравнений и неравенств.

Упражнение 3. При каких значениях параметра p система

$$\begin{cases} x^2 + 2px + 4p^2 - 5p + 3 \leq 4\sin y - 4\cos y \\ 0 \leq y \leq 2\pi \end{cases}$$

имеет единственное решение?

План решения:

1) Оценим левую часть первого неравенства, находим её наименьшее значение....

2) Оценим правую часть первого неравенства, находим наибольшее значение

...

3) Чтобы решение было единственным, надо совпадал с максимумом правой, получаем уравнение

Ответ: при $p \in \left\{ -\frac{1}{3}; 2 \right\}$

4) Решаем уравнение...

ДЕМО-2015. ЗАДАНИЕ №20.

Найдите все положительные значения a ,
при каждом из которых система

$$\begin{cases} (|x| - 5)^2 + (y - 4)^2 = 9 \\ (x + 2)^2 + y^2 = a^2 \end{cases}$$

имеет единственное решение.

Ответ:



ДЕМО-2015. ЗАДАНИЕ №20.

<i>Содержание критерия</i>	<i>Баллы</i>
Обоснованно получен верный ответ	4
С помощью верного рассуждения получены оба верных значения параметра, но – или в ответ включены также и одно-два неверных значения; – или решение недостаточно обосновано	3
С помощью верного рассуждения получено хотя бы одно верное значение параметра	2
Задача сведена к исследованию: – или взаимного расположения трёх окружностей; – или двух квадратных уравнений с параметром	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
<i>Максимальный балл</i>	<i>4</i>

ВОСТОК-2013. ЗАДАНИЕ N°6.

Найдите все значения a , при каждом из которых уравнение

$$x^2 - |x + 2 + a| = |x - a - 2| - (a - 2)^2$$

имеет единственный корень.

Ответ:



СИБИРЬ-2013. ЗАДАНИЕ N°6.

Найдите все значения a , при каждом из которых уравнение

$$x^2 + (a - 3)^2 = |x + 3 - a| + |x + a - 3|$$

имеет единственный корень.

Ответ:



ЦЕНТР-2013. ЗАДАНИЕ N°6.

Найдите все значения a , при каждом из которых уравнение

$$ax + \sqrt{-7 - 8x - x^2} = 2a + 3$$

имеет единственный корень.

Ответ:



УРАЛ-2013. ЗАДАНИЕ N°6.

Найдите все значения a , при каждом из которых уравнение

$$8a + \sqrt{7 + 6x - x^2} = ax + 4$$

имеет единственный корень.

Ответ:



ДОСРОЧНЫЙ-2014. ЗАДАНИЕ N°6.

Найдите все значения a , при каждом из которых уравнение

$$\sqrt{x^4 + (a - 5)^4} = |x + a - 5| + |x - a + 5|$$

имеет единственный корень.

Ответ:



ДИАГНОСТИЧЕСКИЙ-2014. ЗАДАНИЕ №6.

При каких значениях a , произведение корней уравнения

$$(x + 2a)(x^2 - a^2 - 2a - 1) = 0$$

меньше наименьшего корня этого уравнения.

Ответ: При



5 ИЮНЯ 2014. ЗАДАНИЕ N°6.

- Найдите все значения a , при каждом из которых уравнение

$$(|x + 2| + |x - a|)^2 - 5(|x + 2| + |x - a|) + 3a(5 - 3a) = 0$$

имеет ровно два решения.

Ответ: при



ИСПОЛЬЗОВАННЫЕ МАТЕРИАЛЫ:



- Черкасов О.Ю. Якушев А.Г. МАТЕМАТИКА: ИНТЕНСИВНЫЙ КУРС ПОДГОТОВКИ К ЭКЗАМЕНУ. Издание восьмое, исправленное. ООО «Издательство «Айрис Пресс» Москва 2003.
- Демонстрационный вариант ЕГЭ 2015 года
- Материалы единого государственного экзамена за 2013– 2014 годы.