

Функционально-графический метод решения параметрических уравнений

Исследовательский проект по математике

Выполнил: Курдюмов Дмитрий

Руководитель: учитель математики

*Курдюмова Елена
Валерьевна*

Цель: научиться самому и помочь другим решать уравнения с параметрами.

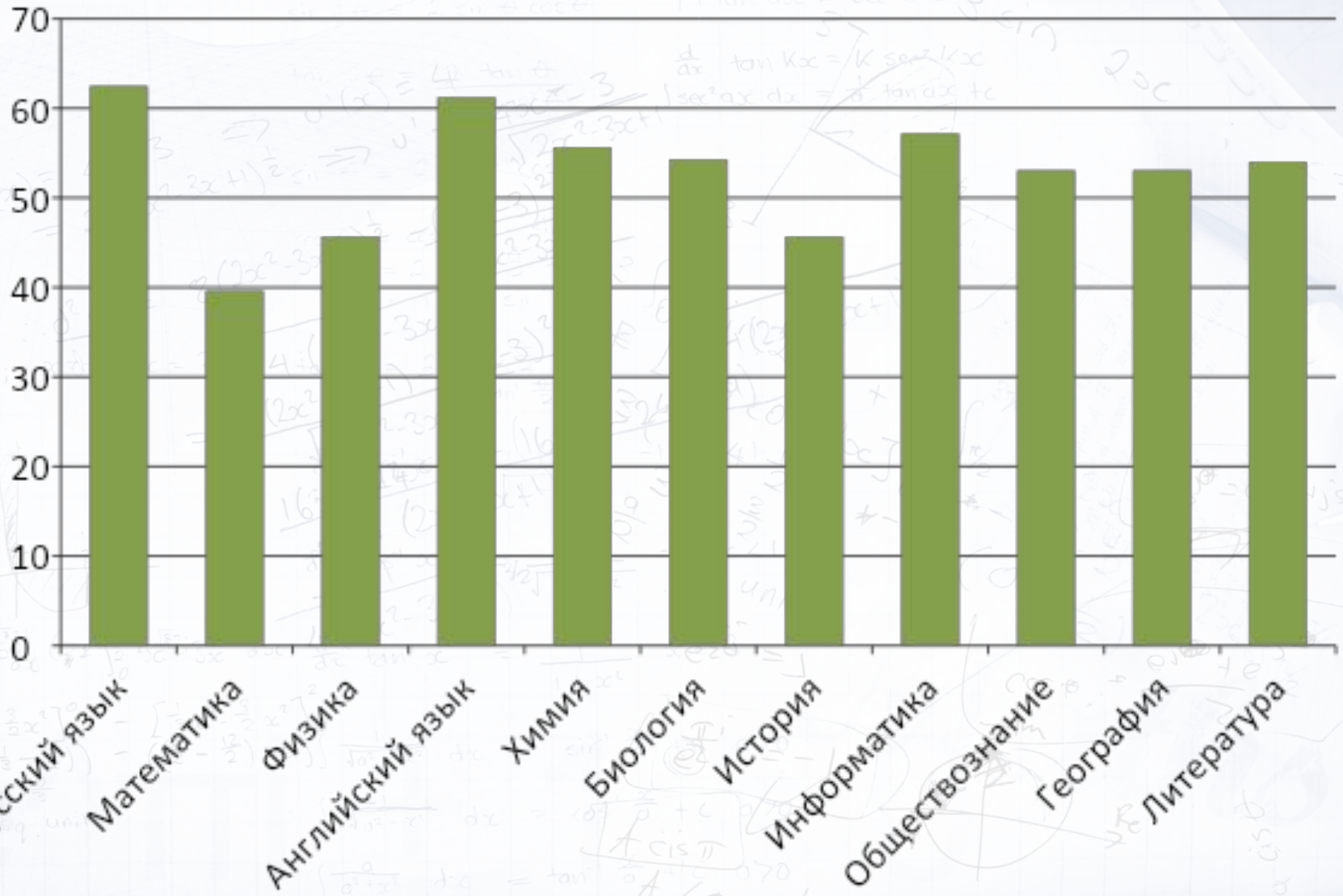
Задачи:

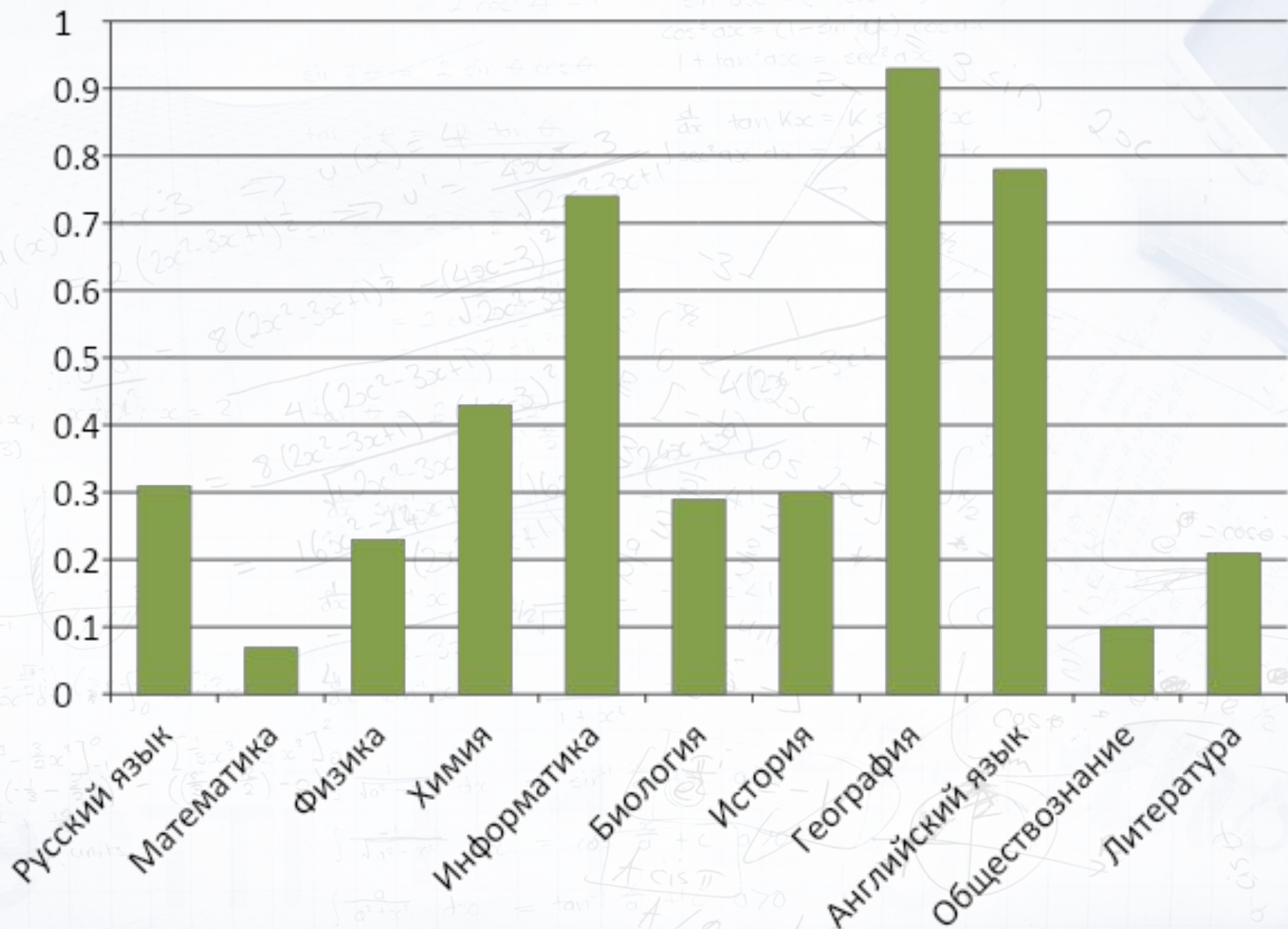
- классифицировать параметрические задания С5 из тестов ЕГЭ по математике
- изучить способы решения параметрических уравнений
- выбрать наиболее удобный способ для решения параметрических заданий из тестов ЕГЭ
- составить пособие по решению параметрических уравнений для старшеклассников.

$$\cos 2\theta = \cos^2 \theta - \sin^2 \theta$$
$$= 1 - 2\sin^2 \theta$$
$$= 2\cos^2 \theta - 1$$

$$\sin^2 ax = \frac{1}{2} (1 - \cos 2ax)$$
$$\cos^2 ax = \frac{1}{2} (1 + \cos 2ax)$$
$$\sin^2 ax = (1 - \cos^2 ax) \sin ax$$
$$\cos^2 ax = (1 - \sin^2 ax) \cos ax$$
$$1 + \tan^2 ax = \sec^2 ax$$

$$\frac{d}{dx} \tan kx = k \sec^2 kx$$
$$\int \sec^2 ax dx = \frac{1}{a} \tan ax + c$$





Необходимость сдачи экзамена по математике



- Профильный уровень (не умеют решать)
- Профильный уровень (умеют решать)
- Базовый уровень

Распределение учебных часов программы на изучение параметрических уравнений

8 класс – 1 час на решение квадратных уравнений с параметром,

9 класс – 1 час на решение систем уравнений с параметром,

10 класс – 2 часа на решение тригонометрических уравнений с параметром,

11 класс – 4 часа на решение различных уравнений с параметром.

Что такое параметр

Толковый словарь определяет параметр как величину, характеризующую какое-нибудь основное свойство машины, устройства, системы или явления, процесса.

Параметр (от греческого “parametron” – отмеривающий) – величина, значения которой служат для различения элементов некоторого множества между собой.

Типы параметрических уравнений

- уравнения, которые необходимо решить либо для любого значения параметра, либо для значений параметра, принадлежащих заранее оговоренному множеству;
- уравнения, для которых требуется определить количество решений в зависимости от значения параметра;
- уравнения, для которых требуется найти все те значения параметра, при которых указанные уравнения и их системы имеют заданное число решений.

При каких значениях параметра a уравнение $x - a = ||2x| - 1|$ имеет три корня?

Решение (аналитический способ)

$$1) |2x| - 1 \geq 0$$

$$|2x| \geq 1$$

$$2x \geq 1$$

$$x \geq 0,5$$

или

$$2x \leq -1$$

$$x \leq -0,5$$

а) т.к. $x \geq 0,5$, то $x - a = 2x - 1$ б) т.к. $x \leq -0,5$, то $x - a = -2x - 1$

$$x = 1 - a$$

$$1 - a \geq 0,5$$

$$a \leq 0,5$$

$$3x = a - 1$$

$$x = \frac{a - 1}{3}$$

$$\frac{a - 1}{3} \leq -0,5$$

$$a \leq -0,5$$

При каких значениях параметра a уравнение $x - a = || 2x | - 1 |$ имеет три корня?

Решение (аналитический способ)

$$2) |2x| - 1 < 0$$

$$|2x| < 1$$

$$-1 < 2x < 1$$

$$-0,5 < x < 0,5$$

$$а) x \in (-0,5; 0)$$

$$x - a = 1 + 2x$$

$$x = -a - 1$$

$$-0,5 < -a - 1 < 0$$

$$0,5 < -a < 1$$

$$-1 < a < -0,5$$

$$б) x \in [0; 0,5)$$

$$x - a = 1 - 2x$$

$$x = \frac{1 + a}{3}$$

$$0 \leq \frac{1 + a}{3} < 0,5$$

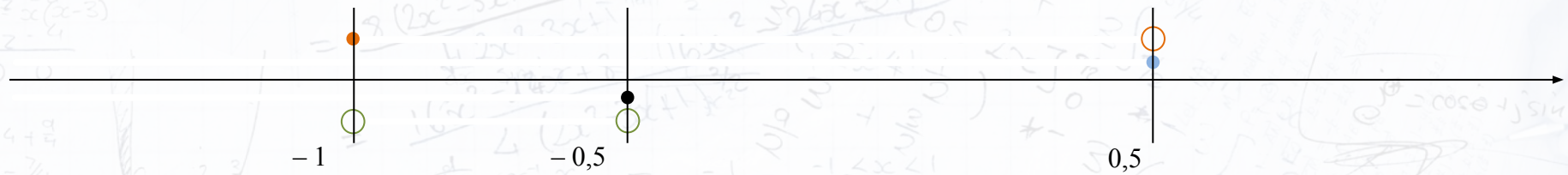
$$0 \leq 1 + a < 1,5$$

$$-1 \leq a < 0,5$$

$$-1 \leq a < 0,5$$

При каких значениях параметра a уравнение $x - a = || 2x | - 1 |$ имеет три корня?

Решение (аналитический способ)

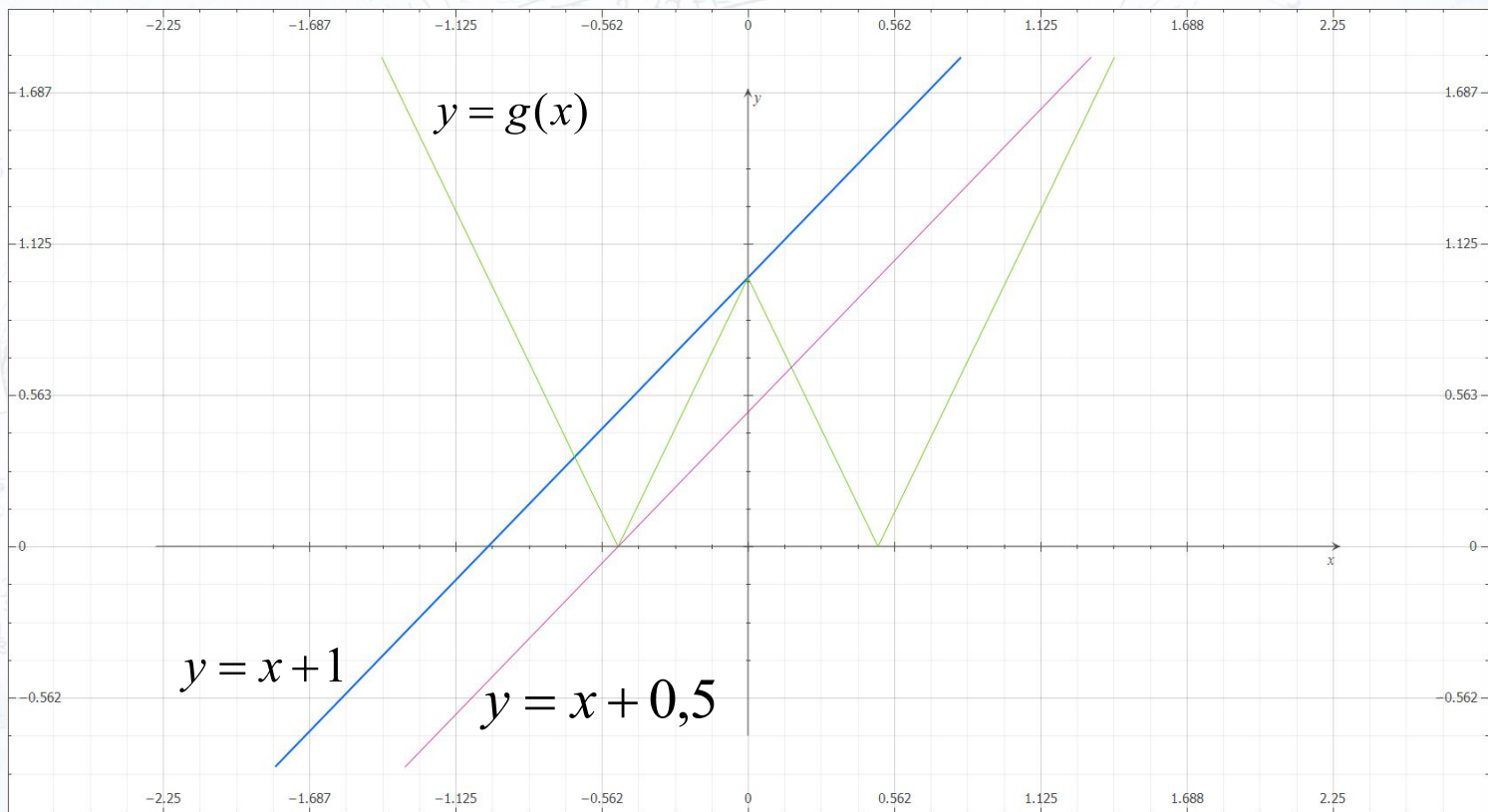


Ответ: $a = -1; a = -0,5$.

При каких значениях параметра a уравнение $x - a = ||2x| - 1|$ имеет три корня?

Решение (функционально-графический способ)

$$x - a = f(x) \quad ||2x| - 1| = g(x)$$



$$a = -1; a = -0,5.$$

Примеры задач

При каких значениях параметра a уравнение $|x| + \left| \frac{x+1}{3x-1} \right| = a$ имеет ровно три решения?

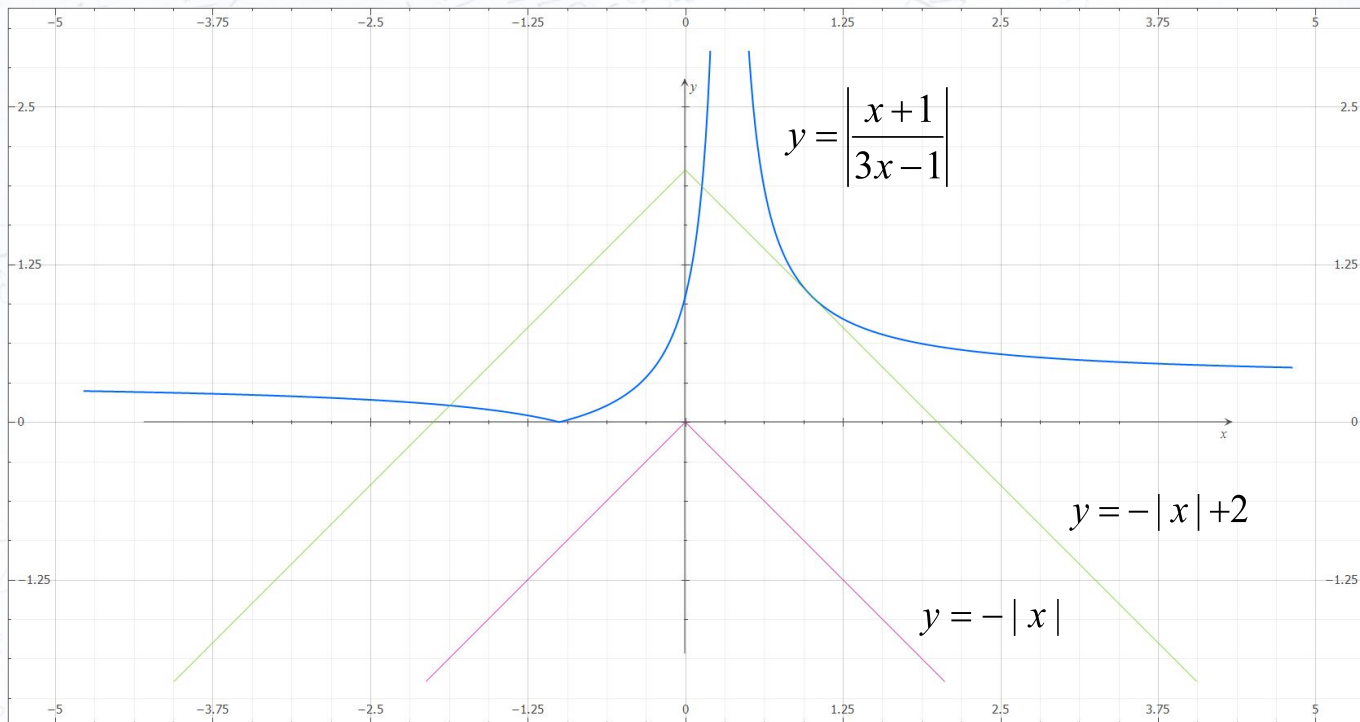
$$g(x) = -|x| + a$$

$$f(x) = \left| \frac{x+1}{3x-1} \right| = \left| \frac{(3x-1) \cdot \frac{1}{3} + \frac{4}{3}}{3x-1} \right| = \left| \frac{(3x-1) \cdot \frac{1}{3} + \frac{4}{3}}{3x-1} \right| = \left| \frac{1}{3} + \frac{4}{3(3x-1)} \right| = \left| \frac{1}{3} + \frac{4}{9\left(x - \frac{1}{3}\right)} \right|$$

график – гипербола $y = \frac{4}{9x}$ в системе координат $\left(\frac{1}{3}; \frac{1}{3}\right)$

Примеры задач

При каких значениях параметра a уравнение $|x| + \left| \frac{x+1}{3x-1} \right| = a$ имеет ровно три решения?



при $a < \frac{2}{3}$ нет решения, $a = \frac{2}{3}$ два решения, $\frac{2}{3} < a < 2$ одно решение,
 $a = 2$ три решения, $a > 2$ четыре решения.

Ответ: 2

Примеры задач

При каких значениях параметра a уравнение $|x + 3| + a = \sqrt{|x|}$ имеет ровно два корня?

$$f(x) = |x + 3| + a \quad g(x) = \sqrt{|x|} \quad x_0 - \text{точка касания } (x_0 > 0)$$

$$g'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x_0}} = 1 \quad (\text{т.к. } y = |x|, k = 1)$$

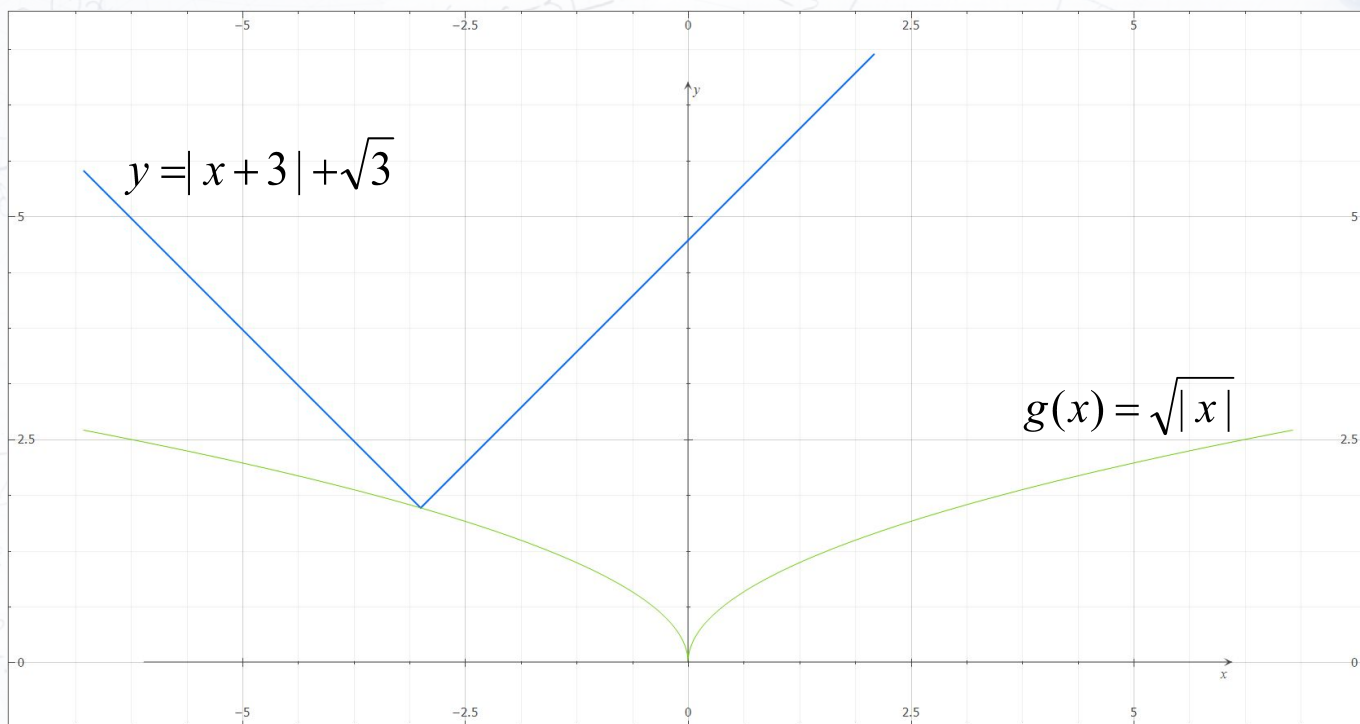
$$2\sqrt{x_0} = 1, \quad x_0 = \frac{1}{4}$$

$$g_0 = \sqrt{\left|\frac{1}{4}\right|} = \frac{1}{2}; \quad \left(\frac{1}{4}; \frac{1}{2}\right) \in f(x)$$

$$\left|\frac{1}{4} + 3\right| + a = \frac{1}{2}; \quad a = \frac{1}{2} - 3\frac{1}{4} = -2\frac{3}{4}$$

Примеры задач

При каких значениях параметра a уравнение $|x + 3| + a = \sqrt{|x|}$ имеет ровно два корня?



Ответ: $a \in (-\infty; -3) \cup \left(-2\frac{3}{4}; \sqrt{3}\right)$

Задачи с путеводителем

Линейное уравнение с модулем

При каких значениях параметра a уравнение $1 = |x - 3| - |2x + a|$ имеет один корень?

Решение: (по алгоритму решить уравнение)

- Перенесите модуль с параметром в одну часть, а все, что без параметра, в другую.
- Постройте график функции без параметра, так называемый неподвижный график ($y = |x - 3| - 1$).
- График функции с параметром $y = |2x + a|$ постройте при $a=0$. ($y = |2x|$)
- Двигая график функции $y = |2x|$ вдоль оси X , найти те положения графика, когда пересечение с графиком функции $y = |x - 3| - 1$ будет в одной точке.
- Задать формулой полученные графики. ($y = |2x - 2|$ и $y = |2x - 4|$)
- Определить значения параметра и записать ответ.

Задачи с путеводителем

Квадратное уравнение

При каком значении параметра a уравнение $(x+1)^2 - \frac{x}{a} = -2$ имеет хотя бы два корня?

Решение:

- Перенесите слагаемое с параметром в правую часть, а число -2 в левую.
- Постройте неподвижный график функции. ($y = (x+1)^2 + 2$)
- График функции с параметром $y = \frac{x}{a}$ проходит через точку $(0;0)$, поэтому зафиксируйте прямую, проходящую через $(0;0)$ и касающуюся параболы.
- Сколько таких прямых должно получиться? (2)
- Их угловой коэффициент равен производной функции $y = (x+1)^2 + 2$ в точке касания (из уравнения касательной), т.е. $y'(x_0) = \frac{1}{a}$.
- Найдите производную функции $y = (x+1)^2 + 2$. ($y'(x_0) = 2(x_0+1)$)
- Из уравнения $2(x_0+1) = \frac{1}{a}$ выразите x_0 . ($x_0 = \frac{1}{2a} - 1$)
- Выразите y_0 , подставив x_0 в уравнение параболы. ($y_0 = \left(\frac{1}{2a} - 1 + 1\right)^2 + 2 = \frac{1}{4a^2} + 2$)
- Т.к. эта точка принадлежит и прямой, то выразите y_0 , подставив x_0 в уравнение прямой. ($y_0 = \frac{1-2a}{2a^2}$)
- Приравняйте y_0 и найдите параметр.