ОБОШИ «Лицей-интернат пос. им. Маршала Жукова»

Функционально-графический метод решения параметрических уравнений

Исследовательский проект по математике

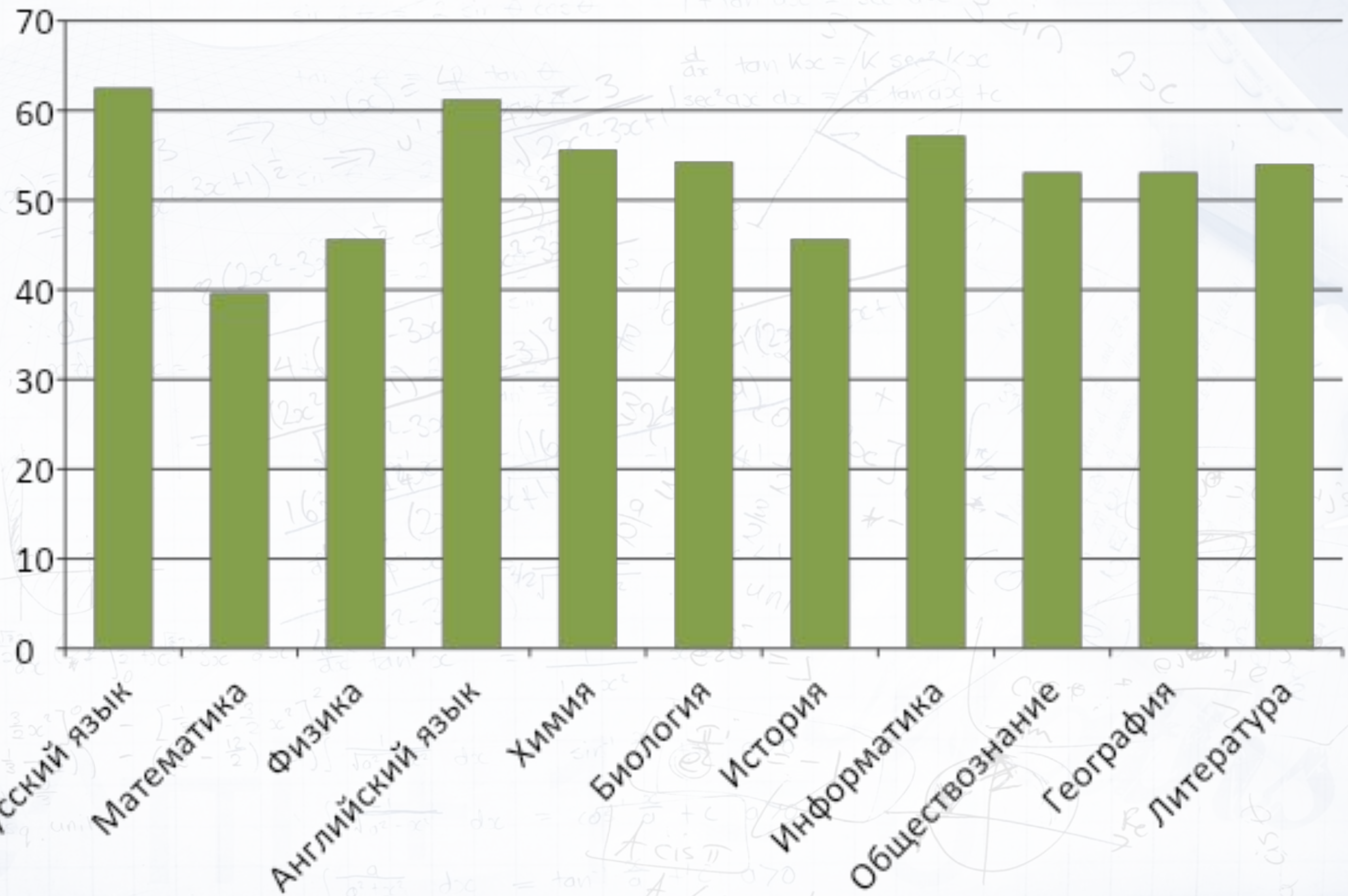
Выполнил: Курдюмов Дмитрий

Руководитель: учитель математики Курдюмова Елена Валерьевна

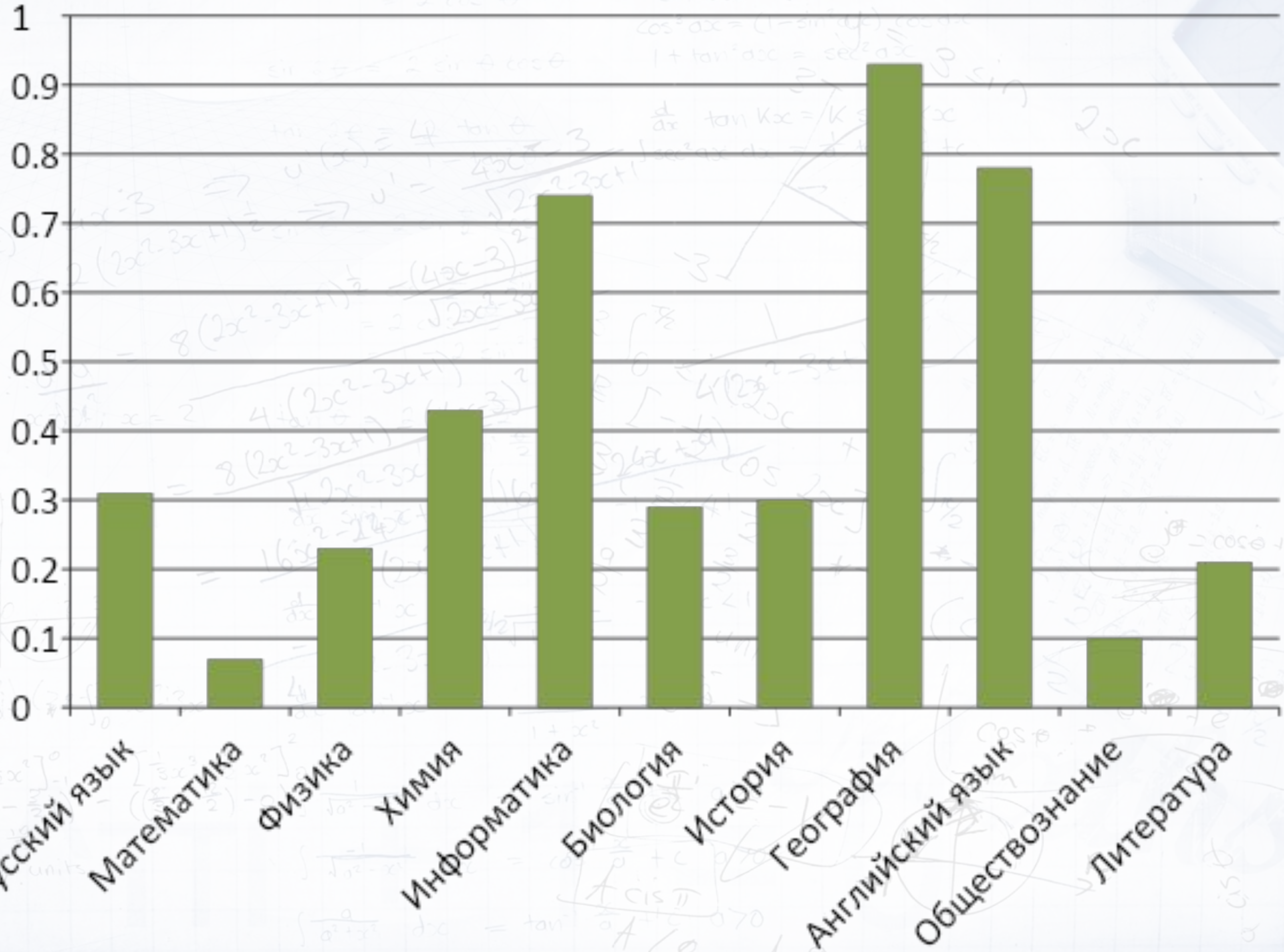
Цель: научиться самому и помочь другим решать уравнения с параметрами.

Задачи:

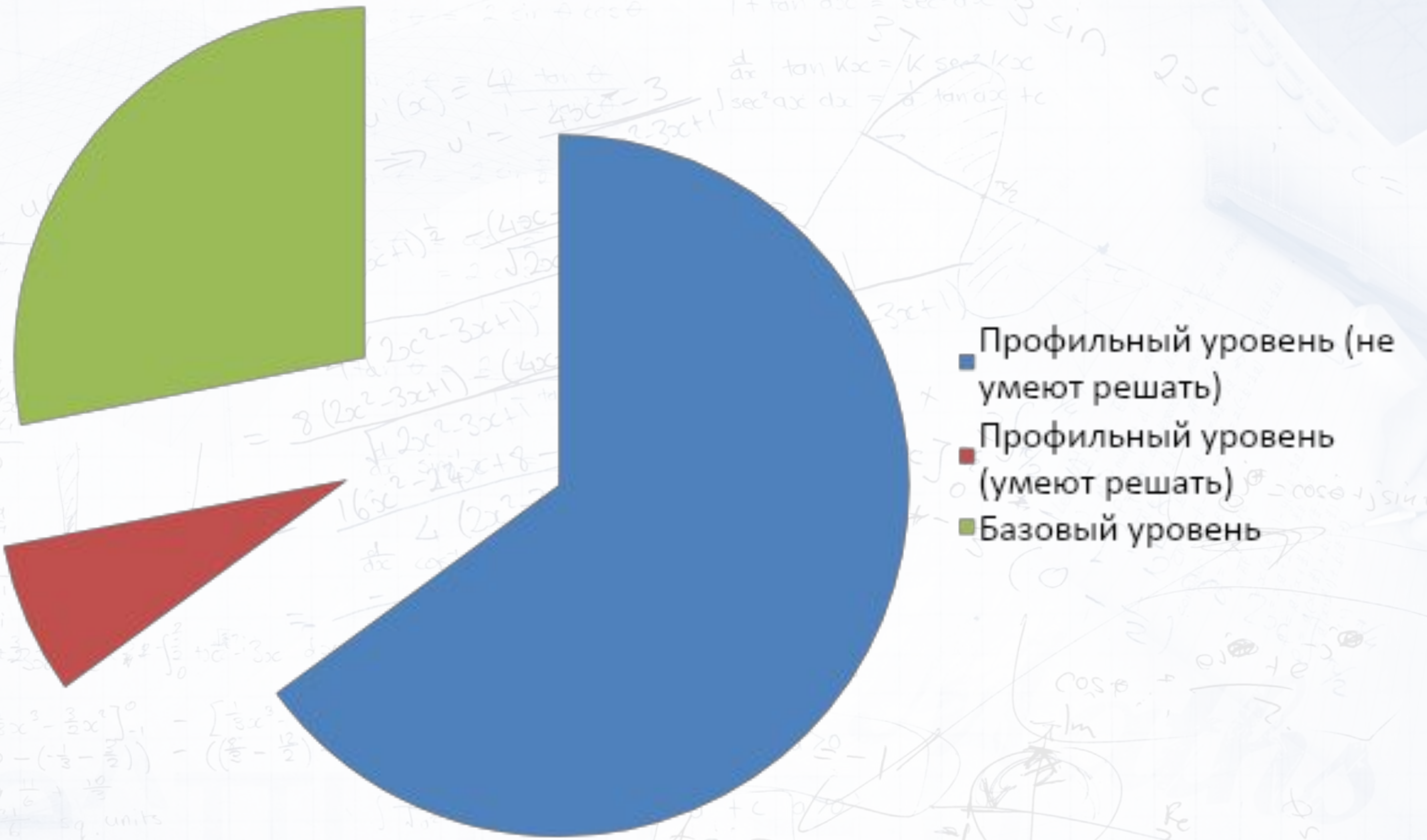
- классифицировать параметрические задания С5 из тестов ЕГЭ по математике
- изучить способы решения параметрических уравнений
- выбрать наиболее удобный способ для решения параметрических заданий из тестов ЕГЭ
- составить пособие по решению параметрических уравнений для старшеклассников.



70
60
50
40
30
20
10
0
Русский язык
Математика
Физика
Английский язык
Химия
Биология
История
Информатика
Обществознание
География
Литература


1
0.9
0.8
0.7
0.6
0.5
0.4
0.3
0.2
0.1
0
Русский язык
Математика
Физика
Химия
Информатика
Биология
История
География
Английский язык
Обществознание
Литература

Необходимость сдачи экзамена по математике



Распределение учебных часов программы на изучение параметрических уравнений

8 класс – 1 час на решение квадратных уравнений с параметром,
9 класс – 1 час на решение систем уравнений с параметром,
10 класс – 2 часа на решение тригонометрических уравнений с параметром,
11 класс – 4 часа на решение различных уравнений с параметром.

Что такое параметр

Толковый словарь определяет параметр как величину, характеризующую какое - нибудь основное свойство машины, устройства, системы или явления, процесса.

Параметр (от греческого “parametron” – отмеривающий) – величина, значения которой служат для различения элементов некоторого множества между собой.

Типы параметрических уравнений

- уравнения, которые необходимо решить либо для любого значения параметра, либо для значений параметра, принадлежащих заранее оговоренному множеству;
- уравнения, для которых требуется определить количество решений в зависимости от значения параметра;
- уравнения, для которых требуется найти все те значения параметра, при которых указанные уравнения и их системы имеют заданное число решений.

При каких значениях параметра a уравнение $x - a = || 2x | - 1 |$ имеет три корня?

Решение (аналитический способ)

1) $| 2x | - 1 \geq 0$

$| 2x | \geq 1$

$2x \geq 1$ или $2x \leq -1$

$x \geq 0{,}5$ $x \leq -0{,}5$

а) т.к. $x \geq 0{,}5$, то $x - a = 2x - 1$

$x = 1 - a$

$1 - a \geq 0{,}5$

$a \leq 0{,}5$

б) т.к. $x \leq -0{,}5$, то $x - a = -2x - 1$

$3x = a - 1$

$x = \dfrac{a-1}{3}$

$\dfrac{a-1}{3} \leq -0{,}5$

$a \leq -0{,}5$

При каких значениях параметра a уравнение $x - a = || 2x | - 1 |$ имеет три корня?

Решение (аналитический способ)

2) $| 2x | - 1 < 0$

$| 2x | < 1$

$-1 < 2x < 1$

$-0{,}5 < x < 0{,}5$

а) $x \in (-0{,}5;\, 0)$

$x - a = 1 + 2x$

$x = -a - 1$

$-0{,}5 < -a - 1 < 0$

$0{,}5 < -a < 1$

$-1 < a < -0{,}5$

б) $x \in [0;\, 0{,}5)$

$x - a = 1 - 2x$

$$x = \frac{1 + a}{3}$$

$$0 \le \frac{1 + a}{3} < 0{,}5$$

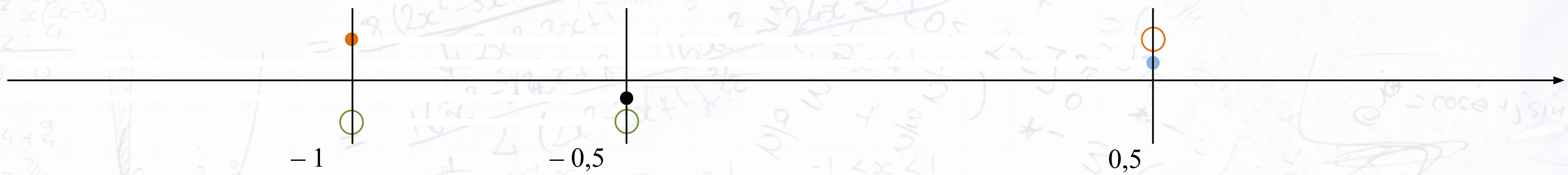
$0 \le 1 + a < 0{,}5$

$-1 \le a < 1{,}5$

$-1 \le a < 0{,}5$

При каких значениях параметра a уравнение $x - a = ||2x| - 1|$ имеет три корня?

Решение (аналитический способ)

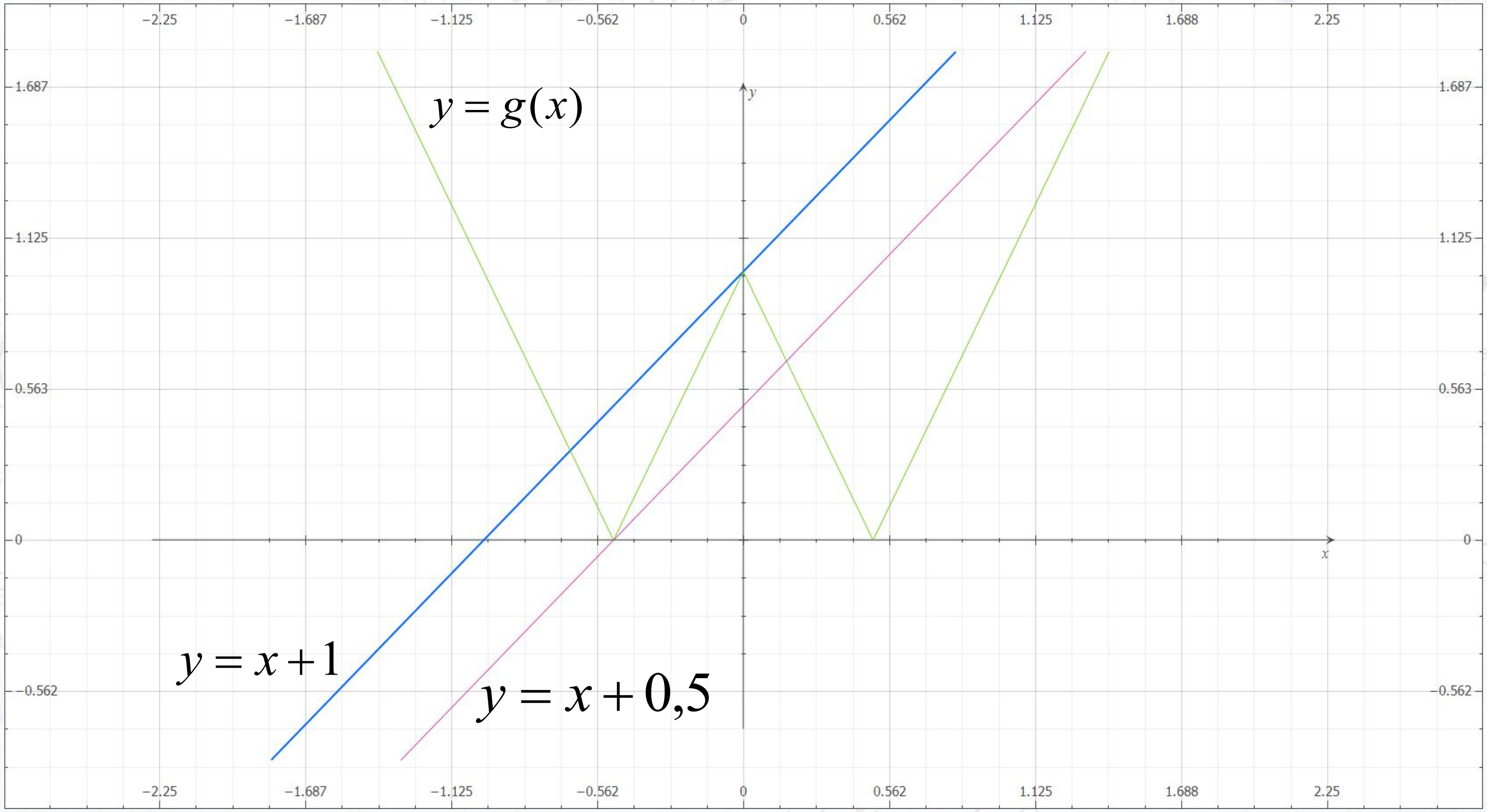


Ответ: $a = -1; \ a = -0{,}5.$

При каких значениях параметра a уравнение $x - a = ||2x| - 1|$ имеет три корня?

Решение (функционально-графический способ)

$$x - a = f(x) \qquad ||2x| - 1| = g(x)$$



$a = -1;\ a = -0{,}5.$

Примеры задач

При каких значениях параметра a уравнение $|x|+\left|\dfrac{x+1}{3x-1}\right|=a$ имеет ровно три решения?

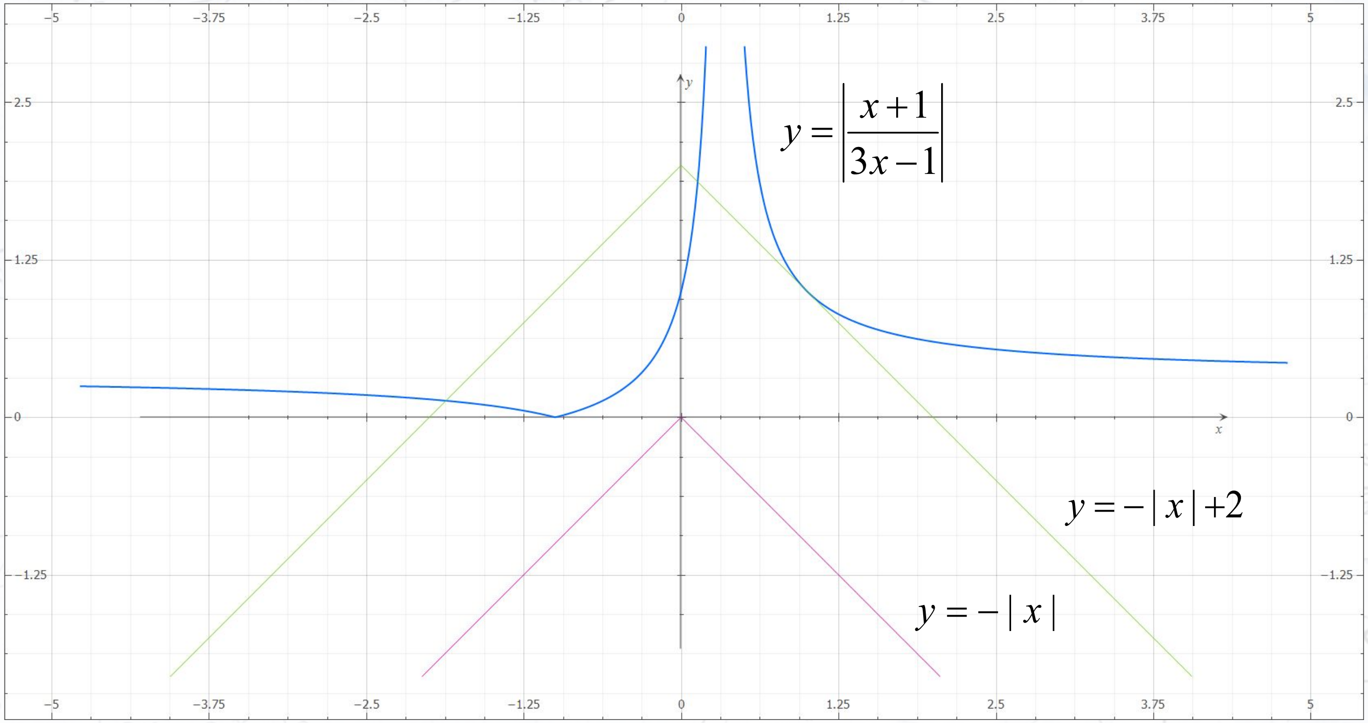
$$g(x)=-|x|+a$$

$$f(x)=\left|\frac{x+1}{3x-1}\right|=\left|\frac{(3x-1)\cdot\frac{1}{3}+\frac{4}{3}}{3x-1}\right|=\left|\frac{(3x-1)\cdot\frac{1}{3}}{3x-1}+\frac{\frac{4}{3}}{3x-1}\right|=\left|\frac{1}{3}+\frac{4}{3(3x-1)}\right|=\left|\frac{1}{3}+\frac{4}{9\left(x-\frac{1}{3}\right)}\right|$$

график – гипербола $y=\dfrac{4}{9x}$ в системе координат $\left(\dfrac{1}{3};\dfrac{1}{3}\right)$

Примеры задач

При каких значениях параметра a уравнение $|x| + \left|\frac{x+1}{3x-1}\right| = a$ имеет ровно три решения?



при $a < \frac{2}{3}$ нет решения, $a = \frac{2}{3}$ два решения, $\frac{2}{3} < a < 2$ одно решение,

$a = 2$ три решения, $a > 2$ четыре решения.

Ответ: 2

Примеры задач

При каких значениях параметра a уравнение $|x+3|+a=\sqrt{|x|}$ имеет ровно два корня?

$f(x)=|x+3|+a$ $\qquad g(x)=\sqrt{|x|}$ $\qquad x_0$ – точка касания ($x_0>0$)

$$g'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x_0}}=1$$ (т.к. $y=|x|$, $k=1$)

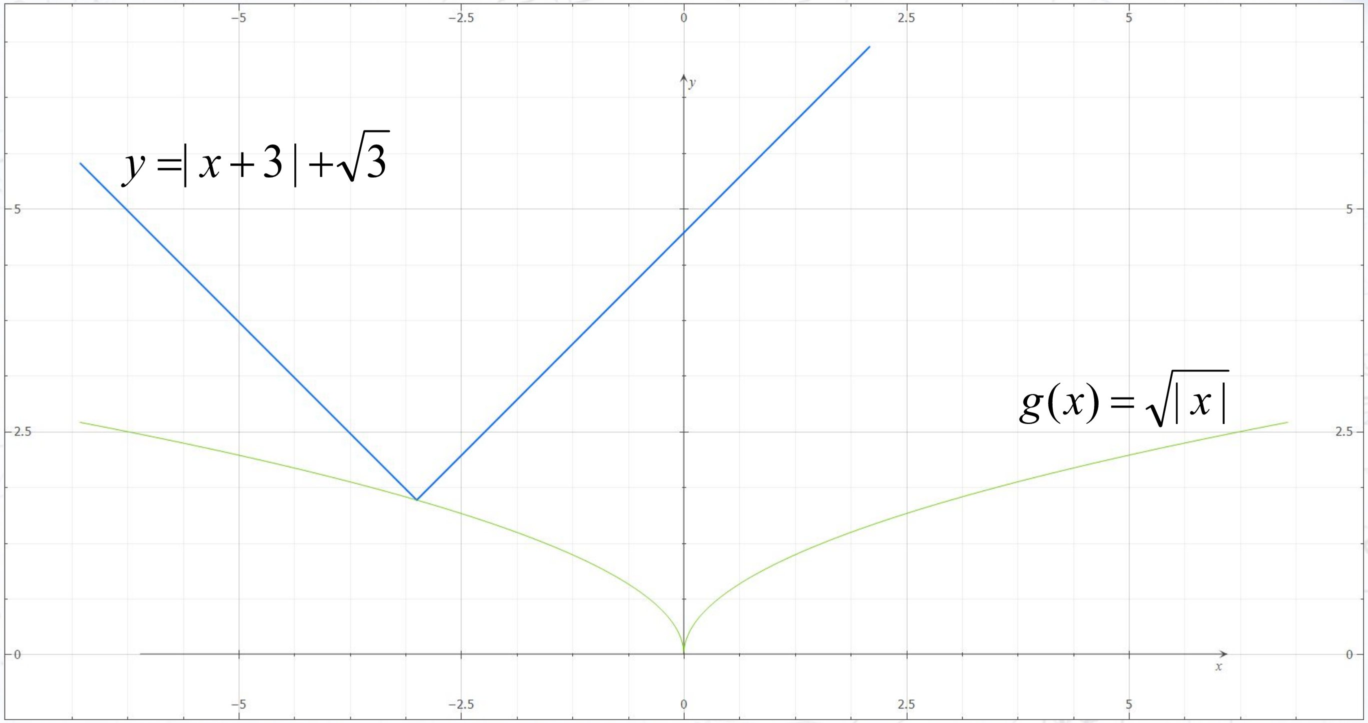
$$2\sqrt{x_0}=1,\quad x_0=\frac{1}{4}$$

$$g_0=\sqrt{\left|\frac{1}{4}\right|}=\frac{1}{2};\quad \left(\frac{1}{4};\frac{1}{2}\right)\in f(x)$$

$$\left|\frac{1}{4}+3\right|+a=\frac{1}{2};\quad a=\frac{1}{2}-3\frac{1}{4}=-2\frac{3}{4}$$

Примеры задач

При каких значениях параметра a уравнение $|x+3|+a=\sqrt{|x|}$ имеет ровно два корня?



Ответ: $a\in(-\infty;-3)\cup\left(-2\frac{3}{4};\sqrt{3}\right)$

Задачи с путеводителем

Линейное уравнение с модулем

При каких значениях параметра *a* уравнение $1 = |x-3| - |2x+a|$ имеет один корень?

Решение: (по алгоритму решить уравнение)

- Перенесите модуль с параметром в одну часть, а все, что без параметра, в другую.
- Постройте график функции без параметра, так называемый неподвижный график ($y = |x-3| - 1$).
- График функции с параметром $y = |2x+a|$ постройте при *a=0*. ($y = |2x|$)
- Двигая график функции $y = |2x|$ вдоль оси X, найти те положения графика, когда пересечение с графиком функции $y = |x-3| - 1$ будет в одной точке.
- Задать формулой полученные графики. ($y = |2x-2|$ и $y = |2x-4|$)
- Определить значения параметра и записать ответ.

Задачи с путеводителем

Квадратное уравнение

При каком значении параметра *a* уравнение $(x+1)^2 - \frac{x}{a} = -2$ имеет хотя бы два корня?

Решение:

- Перенесите слагаемое с параметром в правую часть, а число -2 в левую.
- Постройте неподвижный график функции. ($y = (x+1)^2 + 2$)
- График функции с параметром $y = \frac{x}{a}$ проходит через точку (0;0), поэтому зафиксируйте прямую, проходящую через (0;0) и касающуюся параболы.
- Сколько таких прямых должно получиться? (2)
- Их угловой коэффициент равен производной функции $y = (x+1)^2 + 2$ в точке касания (из уравнения касательной), т.е. $y'(x_0) = \frac{1}{a}$.
- Найдите производную функции $y = (x+1)^2 + 2$. ($y'(x_0) = 2(x_0+1)$)
- Из уравнения $2(x_0+1) = \frac{1}{a}$ выразите x_0. ($x_0 = \frac{1}{2a} - 1$)
- Выразите y_0, подставив x_0 в уравнение параболы. ($y_0 = \left(\frac{1}{2a} - 1 + 1\right)^2 + 2 = \frac{1}{4a^2} + 2$)
- Т.к. эта точка принадлежит и прямой, то выразите y_0, подставив x_0 в уравнение прямой. ($y_0 = \frac{1-2a}{2a^2}$)
- Приравняйте y_0 и найдите параметр.