

Геометрическая вероятность

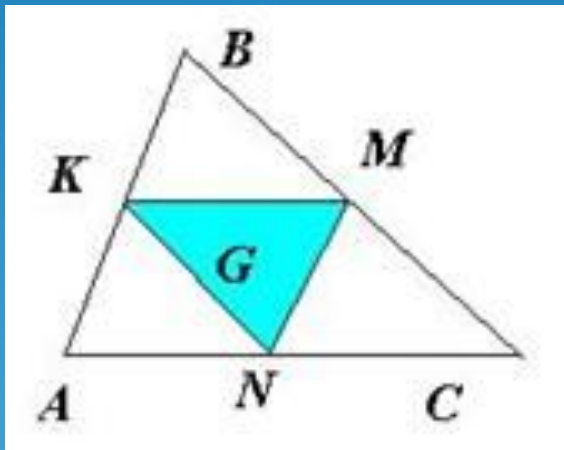
11 класс

Учитель математики МБОУ «СОШ №5» г. Ступино Быстрова Н.Н.



I. Выбор точки из фигуры на плоскости.

Из треугольника ABC случайным образом выбирается точка X. Найти вероятность того, что она принадлежит треугольнику, вершинами которого являются середины сторон треугольника.



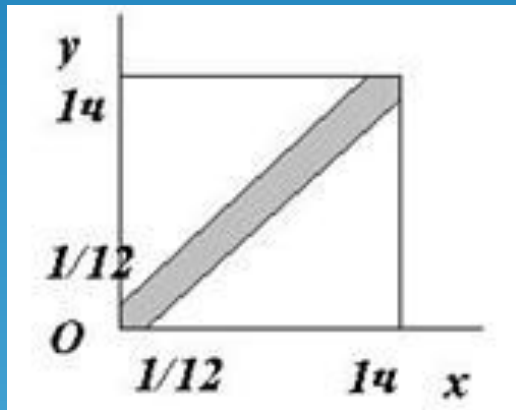
Решение: Средние линии треугольника разбивают его на 4 равных треугольников. Значит, $S_{ABC} = 4S_{KMN}$

Вероятность того, что точка X принадлежит треугольнику KMN, равна:

$$P(A) = \frac{S_{KMN}}{S_{ABC}} = \frac{S_{KMN}}{4S_{KMN}} = \frac{1}{4}.$$

Вывод. Вероятность попадания точки в некоторую фигуру прямо пропорциональна площади этой фигуры.

Дуэли в городе Осторожности редко кончаются печальным исходом. Дело в том, что каждый дуэлянт прибывает на место встречи в случайный момент времени между 5 и 6 часами утра и, прождав соперника 5 минут, удаляется. В случае же прибытия последнего в эти 5 минут дуэль состоится. Какая часть дуэлей действительно заканчивается поединком?



Решение. Пусть x и y обозначают время прибытия 1-го и 2-го дуэлянтов соответственно, измеренное в долях часа начиная с 5 часов.

Дуэлянты встречаются, если $|x - y| < \frac{1}{2}$,

т. е. $x - \frac{1}{2} < y < x + \frac{1}{2}$.

Изобразим это на чертеже.

Заштрихованная часть квадрата отвечает случаю, когда дуэлянты встречаются.

Площадь всего квадрата 1, площадь заштрихованной части:

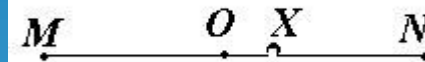
$$1 - 2 \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{11}{12} \cdot \frac{11}{12} \right) = 1 - \frac{11^2}{12^2} = \frac{23}{144} \approx \frac{1}{6}$$

Значит, шансы на поединок равны $\frac{1}{6}$.

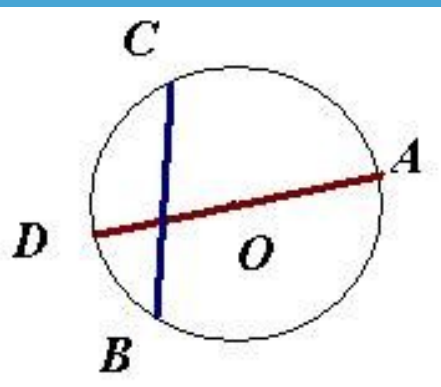
II. Выбор точки из отрезка и дуги

Пример 1. Внутри отрезка MN случайным образом выбирается точка X. Найдите вероятность того, что точка X ближе к точке N, чем к M.

Решение: Пусть точка O – середина отрезка MN. Наше событие наступит тогда, когда точка X лежит внутри отрезка ON. Тогда $P(A) = \frac{ON}{MN} = \frac{1}{2}$.
Ничего не меняется, если точка X выбирается не из отрезка, а из дуги некоторой кривой линии.



Пример 2. На окружности даны точки A и B, причем эти точки не являются диаметрально противоположными. На этой же окружности выбирается точка C. Найти вероятность того, что отрезок BC пересечет диаметр окружности, проходящий через точку A.



Решение: Пусть длина окружности равна L. Интересующее нас событие **K** «отрезок BC пересекает диаметр DA» наступает, только если т. C лежит на полуокружности DA, не содержащей точку B. Длина этой полуокружности равна $\frac{1}{2}L$. $P(K) = \frac{\frac{1}{2}L}{L} = \frac{1}{2}$.

Пример 3. На окружности взята точка А. На окружность «бросают» точку В. Какова вероятность того, что длина хорды АВ будет меньше радиуса окружности.

Решение: Пусть r – радиус окружности.

Для того чтобы хорда АВ была короче радиуса окружности, точка В должна попасть на дугу B_1AB_2 , длина которой равна $\frac{1}{3}$ длины окружности. Вероятность того, что длина хорды АВ будет меньше радиуса окружности, равна:

$$P = \frac{\frac{1}{3}C}{C} = \frac{1}{3}.$$

