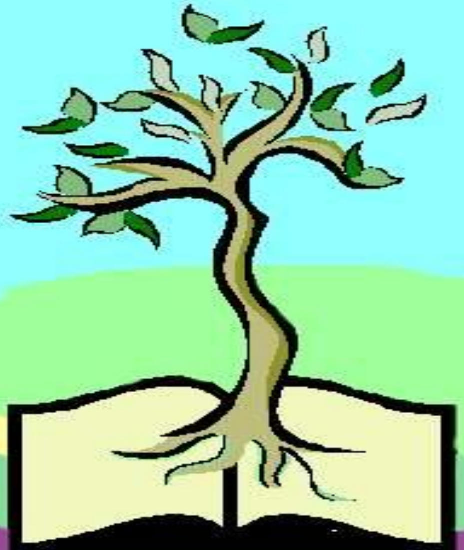
Основы логики

- Понятие логики
- История логики
- Логика по Аристотелю
- Высказывания и операции над ними
- Основные закономерности логики
- Таблицы истинности
- Упражнения



Выход

Понятие логики

Термин логика происходит от древнегреческого ***logos***, означающего «*слово, мысль, понятие, рассуждение, закон*».

Логика – наука, изучающая законы и формы мышления. В логике мышление рассматривается как инструмент познания окружающего мира.

Математическая логика сегодня – раздел математики, логика, развиваемая математическими методами, играющая важную роль в вопросах обоснования математических теорий и нашедшая многочисленные приложения в вопросах конструирования и применения вычислительных машин.

В ЭВМ информация подвергается не только арифметической, но и логической обработке. Основу работы логических схем и устройств ЭВМ составляет специальный математический аппарат – раздел математической логики, называемой алгеброй логики.

История логики

Основоположником логики считают АристотеляОсновоположником логики считают Аристотеля, жившего в 384 – 322 гг. до н.э. В своих книгах (« Категории», «Первая аналитика», « Вторая аналитика» и др.) Аристотель подверг анализу человеческое мышление и его формы: понятие, суждение, умозаключение. В определении Аристотеля логика представляет собой науку о выводе одних умозаключений их других сообразно их логической форме. В соответствии с этим логику Аристотеля называют формальной. (см. раздел «Логика по Аристотелю»)

В своих трудах Аристотель впервые обосновал один из важнейших разделов логики – **учение о суждениях и силлогизмах.**

В XVII в. появились первые идеи о «математизации» логики. Так французский философ и математик Рене Декарт (1596 –1650) считал, что человеческий разум может постигнуть истину, если будет исходить из достоверных положений, сводить сложные идеи к простым, переходить от известного и доказанного к неизвестному, избегая каких-либо пропусков в логических звеньях исследований. Таким образом, он рекомендовал в логике использовать общепринятые математические методы.

В то время другие ученые заметили, что выводы согласно определенным схемам напоминают математические выкладки при нахождении систем уравнений и неравенств. Особенно на этой стороне логических выводов настаивал великий немецкий философ и математик Готфрид Вилтьгельм Лейбниц (1646 – 1716), предложивший детальную программу логических исследований методами математики. Он писал: «Никто не должен бояться, что наблюдение над знаками уведет нас от вещей6 напротив, оно приведет нас к сути вещей».

Лейбниц предложил использовать в логике математическую символику и впервые высказал мысль о возможности применения в ней двоичной системы счисления. Так зарождалась математическая, или символическая, логика.

Логические изыскания Лейбница, существенно опередившие эпоху, оставались неизвестными до конца XIX столетия, когда они были найдены в архиве и опубликованы французским математиком Луи Кутюра. Логические исследования Лейбница были столь значительны, что и через 200 лет оказали существенное влияние на развитие математической логики.

Отцом математической логики по праву считаетяс замечательный английский математик XIX столетия Джордж Буль (1815 – 1864), именем которого назван раздел математической логики – булева алгебра. Знаменитые труды Д.Буля по началам математической логики – «Математическй анализ логики», «Исчисление логики» и «Исследование законов логики» - появились в конце 40-х начале 50-х гг. в них отразилось убеждение Буля о возможности изучения свойств математических операций, осуществляемых не обязательно над числами. Ученый говорил о символическом методе. Который он применял как к изучению дифференцирования и интегрирования. Так и к логическому выводу и к теоретико-вероятностным рассуждениям. Именно он построил один из разделов формальной логики в виде некоторой «алгебры».аналогичной алгебре чисел, но не сводящейся к ней.

Большой вклад в становление и развитие математической логики внесли Аугустус де Морган (1806 – 1871), Уильям Стенли Джевонс (1835 – 1882), Платон Сергеевич Порейкий (1846 – 1907), Чарльз Сандерс Пирс (1839 – 1914) и др.

Логика по Аристотелю

Аристотель рассматривал 4 вида суждений:

1. **Общеутвердительные** – «Все S суть P».
   Например, «Все рыбы – животные», «Все квадраты – прямоугольники»
2. **Общеотрицательные** – «Никакое S не есть P»
   Например, «Никакие рыбы не являются птицами», «Никакие прямоугольники не являются квадратами».
3. **Частноутвердительные** – «Некоторые S суть P».
   Например, «Некоторые прямоугольники – квадраты», «Некоторые люди – испанцы»
4. **Частноотрицательные** – « Некоторые S не суть P»
   Например, «Некоторые грибы не съедобны», «Некоторые треугольники не равнобедренны».

Аристотелевские **силлогизмы** преставляют собой схемы логическихвыводов, состоящих из трех суждений одного из четырех перечисленных выводов: два первых суждения – посылки, третье – заключение.

Вот простой пример:

«Все птицы – животные»,
<u>«Все воробьи – птицы», следовательно,</u>
«Все воробьи – животные».

В силлогистике говорится о том, какие приемы рассуждения позволяют делать правильные умозаключения, а какие приводят к ложным выводам и поэтому недопустимы.

Приведем один шуточный пример, известный из глубокой древности, показывающий, что приемы логического мышления не столь просты, как это может показаться на первый взгляд.

Один Житель острова Крит сказал: «все критяне лжецы». Но ведь он сам критянин и, значит, лжец. Следовательно он сказал неправду. Выходит, все критяне правдивы. Но тогда и он правдив и, соответственно, сказал правду. А если он сказал правду, то получается, что все критяне все-таки лжецы.Значит, и он лжец и поэтому сказал неправду. Поэтому все критяне правдивы. И он правдив, но все критяне лжецы. Тогда и он лжец …

Как же выбраться из заколдованного круга?

Такие рассуждения, приводящие к явно нелепым выводам, называются **софизмами**. Знание логики позволяет достаточно быстро раскрыть любой софизм, показать, где неправильно мы рассуждали, где применили неправильный прием умозаключения. Этот софизм мы раскроем дальше, после изучения основных логических операций.

Силлогистика по Аристотелю зачастую называется просто традиционной, формальной логикой, в отличие от современной формальной логики, возникшей в XVII в. и базирующейся на математических методах.

Высказывания и операции над ними

Высказывание – это любое предложение какого-либо языка (утверждение,)содержание которого можно определить как истинное или ложное.

Примеры высказываний:

1. Город Вашингтон – столица США (истинное высказывание)
2. Число 2 является делителемчисла 7 (ложное высказывание)
3. $3 + 5 = 2 \cdot 4$ (истинное высказывание)
4. $2 + 6 > 10$ (ложное высказывание)
5. II +VI > VII (ложное высказывание)
6. Сумма чисел 2 и 6 больше числа 8 (ложное высказывание)

Высказывания, приведенные выше, являются **простыми** (**элементарными**). Простые высказывания будем обозначать заглавными латинскими буквами: А = {Квадрат – это ромб}, В = {Волга впадает в Черное море}

Элементарные высказывания являются кирпичиками, из которых с помощью логических операций строятся сложные высказывания. Сложные высказывания иногда называют **формулами логики высказываний**.

Примеры сложных высказываний:

1. Число 6 четно или число 8 нечетно;
2. Число 6 четно и число 8 нечетно;
3. Таблетки от кашля «Кашлин» разрешены Минздравом РФ или капли от насморка «Мойнос» разрешены Минздравом РФ.

В алгебре логики как и в обычной алгебре вводится ряд операций:

- **Коньюкция** (лат.conjuctio – связываю), или логическое умножение;
  - соответсвует союзу ***и;***
  - обозначается символом & или $\wedge$

Высказывание А &В истинно в том и только том случае, когда одновременно истинны высказывания А и В.

Рассмотрим пример:

Пусть А = {Учебник лежит на черном столе), В = {Черный стол находится в кабинете №13}

А & В = {Учебник лежит на черном столе и черный стол находится в кабинете №13}

Введем обозначения для значений *истина – 1, ложь – 0* и составим таблицу истинности:

A	B	A & B
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Из таблицы видно, что если А=1 и В=1, то А & В = 1

2. **Дизъюнкция** (лат. disjunctio – различаю), или логическое сложение;
- соответствует союзу ***или;***
- обозначается символом $\vee$;

Высказывание $A \vee B$ ложно в том и только том случае, когда одновременно ложны высказывания A и B.

Рассмотрим пример:

Пусть A = {Иванов учится на «5»), B = {Иванов учится на «5»}

A $\vee$ B={Иванов учится на «5» или Иванов учится на «5»}

Введем обозначения для значений *истина – 1, ложь – 0*.и составим таблицу истинности:

Из таблицы видно, что если A=0 и B=0, то A $\vee$ B = 0

A	B	A $\vee$ B
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

3. **Инверсия** (лат. inversio – переворачиваю), или отрицание;
- соответствует союзу ***не;***
- обозначается символом ¬ или Ā***;***

Высказывание ¬ A истинно, когда A ложно,и ложно тогда, когда A истинно.

Рассмотрим пример:

Пусть A = {Число 5 является делителем числа 30)

Составим таблицу истинности:

Из таблицы видно, что если A=1, то Ā=0, а при A=0 Ā=1

A	Ā
0	1
1	0

- **Импликация,** или условное высказывание;
  - соответствует выражениям *если …, то …**; когда…, тогда…; коль скоро…, то…*** и т.д.
  - обозначается символом → или ⇒;

Пример, A={Выглянет солнце}, B={Станет тепло}

A→B={Если выглянет солнце, то станет тепло}

Составим таблицу истинности:

A	B	A → B
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

- **Эквивалентность,** или тождественность;
  - соответствует выражениям: *тогда и тольто тогда, когда**; если и только если…;***
  - обозначается символом ↔ или ≡ ;

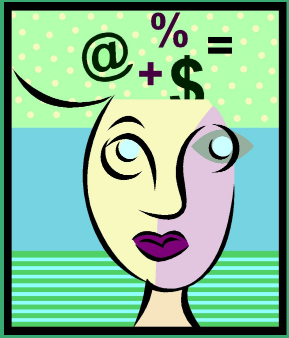
Пример, A={Людоед голоден}, B={Людоед давно не ел}

A↔B={Людоед голоден тогда и только тогда, когда людоед давно не ел}

Составим таблицу истинности:

A	B	A ↔ B
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Основные закономерности логики



Формулы поглощения

$X \wedge X \equiv X \quad X \wedge 1 \equiv X \quad X \wedge 0 \equiv 0$

$X \vee X \equiv X \quad X \vee 1 \equiv 1 \quad X \vee 0 \equiv X$

Основные равносильности алгебры логики

1. $X \wedge Y \equiv X \vee Y$
2. $X \vee Y \equiv Y \vee X$
3. $X \wedge (Y \vee Z) \equiv X \wedge Y \vee X \wedge Z$
4. $(X \wedge Y) \wedge Z \equiv X \wedge (Y \wedge Z)$
5. $(X \vee Y) \vee Z \equiv X \vee (Y \vee Z)$
6. $X \vee (Y \wedge Z) \equiv (X \vee Y) \wedge (X \vee Z)$
7. $\neg (X \vee Y) \equiv \neg X \wedge \neg Y$
   1-й закон Маргана
8. $\neg (X \wedge Y) \equiv \neg X \vee \neg Y$
   2-й закон Маргана
9. $X \wedge \neg X \equiv 0$
   закон противостояния
10. $X \vee \neg X \equiv 1$
    закон исключения третьего
11. $\neg \neg X \equiv X$
    закон двойного отрицания

Приоритет логических операций:

$\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \equiv$

Таблицы истинности

Сложные высказывания строятся из простых высказываний при помощи логических операций (см. раздел «Высказывания и операции над ними»).

Всякое логическое высказывание принимает либо истинное значение (1), либо ложное (0) в зависимости от значений простых высказываний, из которых оно построено.

Для определения значений сложного логического выражения удобно строить ***таблицу истинности***.

Таблица истинности – таблица, показывающая какие значения принимает высказывание при всех сочетаниях (наборах) значений, входящих в него простых высказываний

Пример. Для формулы $C \wedge (A \vee \bar{A} \wedge \bar{E})$ построить таблицу истинности.

C	**A**	**E**	$\bar{A}$	$\bar{E}$	$\bar{A} \wedge \bar{E}$	$A \vee \bar{A} \wedge \bar{E}$	$C \wedge (A \vee \bar{A} \wedge \bar{E})$
0	0	0	1	1	1	1	0
0	0	1	1	0	0	0	0
0	1	0	0	1	0	1	0
0	1	1	0	0	0	1	0
1	0	0	1	1	1	1	1
1	0	1	1	0	0	0	0
1	1	0	0	1	0	1	1
1	1	1	0	0	0	1	1

Дополнение 1.

Наборы входных переменных во избежание ошибок иногда рекомендуют перечислять следующим образом:

1. Определить количество наборов входных переменных;
2. Разделит колонку значений первой переменной пополам и заполнить верхнюю часть колонки 0, а нижнюю – 1.
3. Разделить колонку значений второй переменной на четыре части и заполнить каждую четверть чередующимися группами 0 или 1, начиная с группы 0.
4. Продолжить деление колонок значений последующих переменных на 8 16 и т..д. частей и заполнение их группами 0 или 1 до тех пор, пока группы 0 и 1 не будут состоять из одного символа.

Дополнение 2.

Рассмотрим на приме заполнения другой таблицы истинности.

Под формулой $(X1 \wedge X2) \vee (\neg X1 \vee X2)$ подпишем столбцы возможных значений под каждой из переменных (X1 и X2); последовательно (по приоритету операций) выпишем столбцы значений операций.

(X1	∧	X2)	∨	(¬	X1	∨	X2)
0	0	0	1	1	0	1	0
0	0	1	1	1	0	1	1
1	0	0	0	0	1	0	0
1	1	1	1	0	1	1	1

- исходные значения

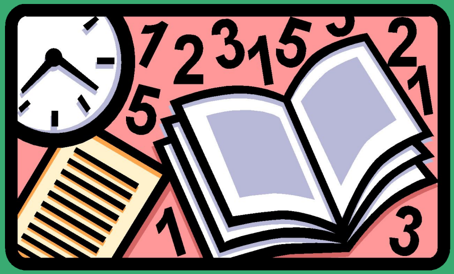
- результат

Дополнение 3.

Можно писать $\wedge$ X1 X2 вместо X1 $\wedge$ X2; $\vee$ X1 X2 вместо X1 $\vee$ X2 .

Тогда приведенную формулу можно записать следующим образом: $\vee \wedge$ X1 X2 $\vee \neg$ X1 X2.

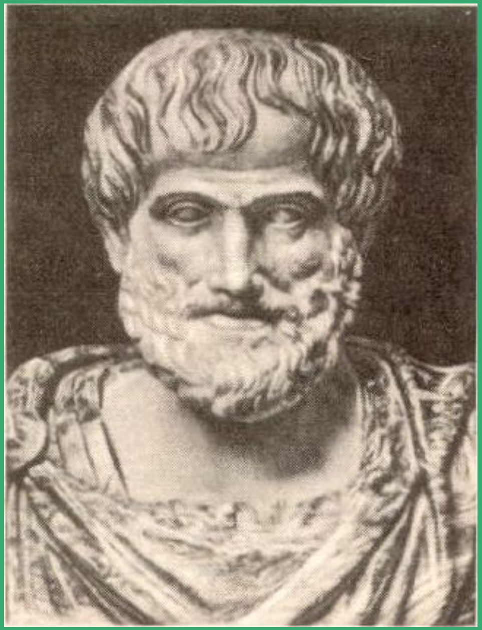
Упражнения



1. Рассмотрите следующие высказывания:
   A = {Река Днепр впадает в Черное море}
   B = {45 – простое число}
   C = {Вена – столица Австрии}
   D = {0 – натуральное число}
   Определите какие из истинные, а какие ложные
2. По мишени произведено 4 выстрела. Рассмотрим высказывания:
   P_k = {мишень поражена k-ым выстрелом}, где k = 1, 2, 3.
   Что означают следующие высказывания:
   а) $P_1 \vee P_2 \vee P_3$ б) $P_1 \wedge P_2 \wedge P_3$ в) $\neg (P_1 \vee P_2 \vee P_3)$
3. Найдите значения выражений:
   а) $(1 \vee 1) \vee (1 \vee 0)$; е) $((1 \vee 1) \wedge (1 \wedge 1)) \wedge (0 \vee 1)$;
   б) $((1 \vee 0) \vee 1) \vee 1$; ж) $((1 \wedge A) \vee (B \wedge 0)) \vee 1$;
   в) $(A \vee 1) \vee (B \vee 0)$; з) $((1 \wedge 1) \vee 0) \equiv (0 \vee 1)$;
   г) $(0 \wedge 1) \wedge 1$; и) $((0 \wedge 0) \rightarrow 1) \wedge (1 \vee 1)$;
   д) $1 \wedge (1 \wedge 0) \rightarrow 1$; к) $((1 \vee 0) \rightarrow 1) \equiv (1 \wedge 0)$;
4. Даны три числа в различных системах счисления:
   $P = 23_{10}$, $B = 23_8$, $C = 1A_{16}$.
   Переведите P, B и C в двоичную систему счисления и выполните поразрядно логические операции $(P \vee B) \wedge C$.
   Ответ дайте в десятичной системе счисления.
5. Поразрядное отрицание восьмиразрядного двоичного числа, записанное в двоичной системе счисления, равно 217. Определить исходное число в десятичной системе счисления.
6. Определите логическое произведение и логическую сумму всех двоичных чисел в диапазоне от 16_{10} до 22_{10}, включая границы. Ответ запишите в восьмеричной системе счисления.
7. Составьте таблицы истинности для следующих формул логики высказываний:
   а) $A \wedge (A \wedge B \wedge C)$ в) $\neg (A \vee B) \wedge (A \wedge C)$
   б) $(A \wedge B) \equiv (\neg A \vee \neg B)$ г) $((C \vee B) \rightarrow B) \wedge (A \wedge B) \rightarrow B$

Аристотель

Родом Аристотель был из города Стагира на фракийском побережье полуострова Халькидика. Его отец был врачом и другом македонского царя Аминта II. Аристотель рос и учился вместе с сыном Аминта — будущим царем Филиппом II Македонским, и на протяжении всей жизни ею судьба была тесно связана с македонским царским домом. В возрасте 18 лет Аристотель отправился в Афины к великому мыслителю Платону и провел в его школе около 20 лет. Он был самым способным из учеников Платона, глубоко усвоившим его знания и идеи, но далеко не всегда согласным со своим учителем. В 343 г. до н.э. царь Филипп приглашает Аристотеля стать наставником своего сына Александра. Когда через несколько лет Александр сам становится царем, знаменитым Александром Македонским, Аристотель возвращается в Афины и собирает вокруг себя учащуюся молодежь, которой читает курсы различных наук. В 323 г. до н.э. умер Александр Македонский и в Афинах победила антимакедонская партия. Аристотель, как друг и учитель Александра, вынужден был покинуть Афины. Год спустя он умер на острове Евбея.

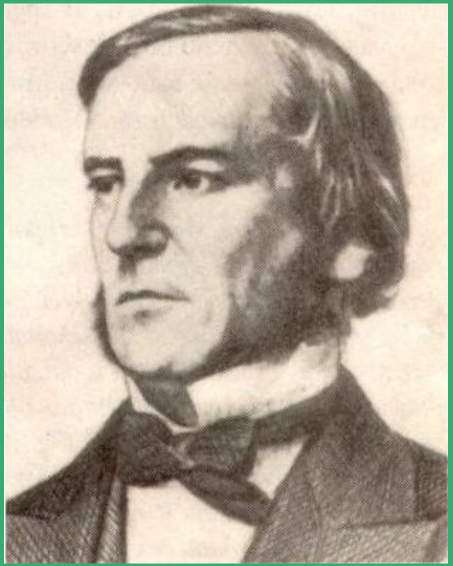


Готфрид Вильгельм Лейбниц

Готфрид Вильгельм Лейбниц родился в г. Лейпциге (Саксония); его отец был профессором этики, а дед — профессором права Лейпцигского университета. В 1661 г. Лейбниц становится студентом и изучает философию, юриспруденцию и математику в университетах Лейпцига, Вены и Альтдорфа. В 1666 году он защищает сразу две диссертации на звание доцента — по юриспруденции и математике. Затем Лейбниц служит при дворах немецких князей в качестве юриста, находится на дипломатической службе. С 1676 г. и до самой смерти Лейбниц состоял советником, и библиотекарем при дворе ганноверского герцога. На протяжении этих 40 лет Лейбниц вел научные исследования, публиковал научные труды, поддерживал переписку со всеми ведущими учеными эпохи.

Лейбниц был универсальным ученым, внесшим существенный вклад в философию, юриспруденцию, историю, физику и математику. Он является одним, из создателей дифференциального и интегрального исчисления, комбинаторики, теории определителей. Значительна и научно-организаторская деятельность Лейбница — он был одним из основателей Прусской Академии наук в Берлине.

Джордж Буль



Джордж Буль родился в Линкольне (Англия) в семье мелкого торговца. Материальное положение его родителей было тяжелым, поэтому Джордж смог окончить только начальную школу для детей бедняков; в других учебных заведениях он не учился. Этим, может быть, отчасти и объясняетется, что, не связанный традицией, он пошел в науке собственным путем. Буль самостоятельно изучил латынь, древнегреческий, немецкий и французский языки, изучил философские трактаты. С ранних лет Буль искал работу, оставляющую возможности для самообразования. После многих неудачных попыток Булю удалось открыть маленькую начальную школу, в которой он преподавал сам. Школьные учебники по математике привели его в ужас своей нестрогостью и нелогичностью, Буль вынужден был обратиться к сочинениям классиков науки и самостоятельно проштудировать обширные труды Лапласа и Лагранжа.

В связи с этими занятиями у него появились первые самостоятельные идеи. Результаты своих исследований Буль сообщал в письмах профессорам математики (Д.Грегори, А. де Моргану) знаменитого Кембриджского университета и вскоре получил известность как оригинально мыслящий математик. В 1849 г. в г. Корк (Ирландия) открылось новое высшее учеб ное заведение — Куинз колледж, по рекомендации коллег-математиков Буль получил, здесь профессуру, которую сохранил до своей смерти в 1864 г. Только здесь он получил возможность не только обеспечить старость родителей, но и спокойно, без мыслей о хлебе насущном, заниматься наукой. Здесь же он женился на дочери профессора греческого языка Мери Эверест, которая много помогала Булю в работе и оставила после его смерти интересные воспоминания о своем муже; она стала матерью четырех дочерей Буля, одна из которых, Этель Лилиан Буль, в замужестве Войнич, — автор популярного в нашей стране романа "Овод".