Теория комплексных чисел

Основные понятия комплексных чисел

Содержание:

- Основные понятия
- Геометрическое изображение комплексных чисел
- Тригонометрическая форма записи комплексных чисел
- Действия над комплексными числами
- Показательная форма комплексного числа

Основные понятия

Комплексным числом z называют выражение:

$$z = a + i \cdot b,$$

где a и b – действительные числа, i – ***мнимая единица***, определяемая равенством:

$$i = \sqrt{-1} \qquad i^2 = -1$$

a называется ***действительной частью*** числа z,

b – ***мнимой частью***. Их обозначают так:

$$a = \operatorname{Re} z; \qquad b = \operatorname{Im} z.$$

Если $a = 0$, то число $i\,b$ называется ***чисто мнимым***.

Если $b = 0$, то получается действительное число a.

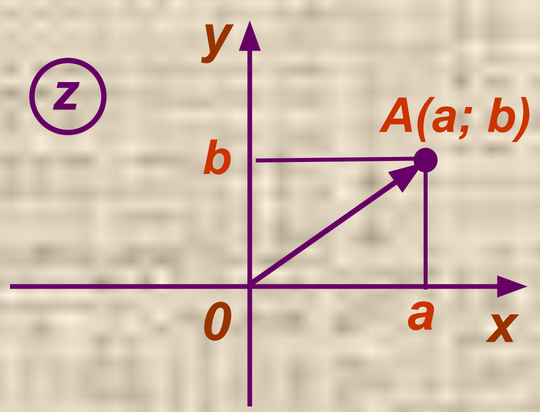
Два комплексных числа, отличающиеся только знаком мнимой части, называются ***сопряженными***:

$$z = a + i \cdot b, \qquad \bar{z} = a - i \cdot b,$$

Геометрическое изображение комплексных чисел

Всякое комплексное число $z = a + i \cdot b$, можно изобразить на плоскости XOY в виде точки $A(a;\, b)$.

Плоскость, на которой изображаются комплексные числа, называют ***плоскостью комплексной переменной***.



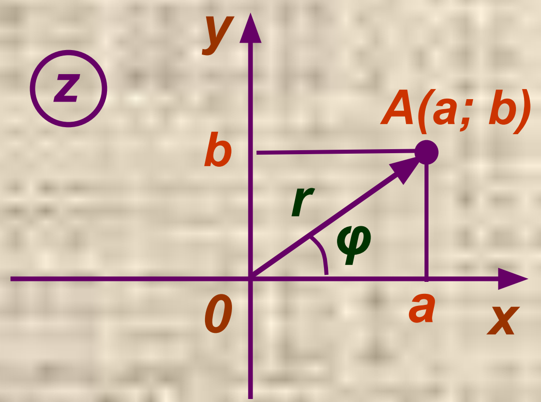
Точкам, лежащим на оси OX, соответствуют действительные числа ($b = 0$), поэтому ось OX называют ***действительной осью***.

Точкам, лежащим на оси OY , соответствуют чисто мнимые числа ($a = 0$), поэтому ось OY называют ***мнимой осью***.

Иногда удобно считать геометрическим изображением комплексного числа z вектор $\overline{OA}$

Тригонометрическая форма записи комплексных чисел

Обозначим через *r* модуль вектора $\overline{OA}$, через *φ* угол между вектором $\overline{OA}$ и положительным направлением оси OX.



Тогда имеют место равенства:

$$a = r\cos\varphi; \quad b = r\sin\varphi$$

Следовательно, комплексное число *Z* можно представить в виде:

$$a + i \cdot b = r\cos\varphi + i \cdot r\sin\varphi$$

$$z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$$

Модуль комплексного числа

Аргумент комплексного числа

Тригонометрическая форма записи комплексного числа

$$r = |z| = \sqrt{a^2 + b^2} \qquad \varphi = \arg z = arctg\,\frac{b}{a}$$

Аргумент комплексного числа *Z* считается положительным, если он отсчитывается от положительного направления оси OX против часовой стрелки. Очевидно, что *φ* определяется не однозначно, а с точностью до слагаемого $2\pi k \quad k \in Z.$

Действия над комплексными числами

1 *Равенство комплексных чисел*.

Два комплексных числа $z_1 = a_1 + i \cdot b_1$ и $z_2 = a_2 + i \cdot b_2$ называются **равными** : $z_1 = z_2$, если $a_1 = a_2, \quad b_1 = b_2$

Комплексное число $z = a + i \cdot b$ **равно нулю** , тогда и только тогда, когда $a = 0, \quad b = 0$

2 *Сложение и вычитание комплексных чисел*.

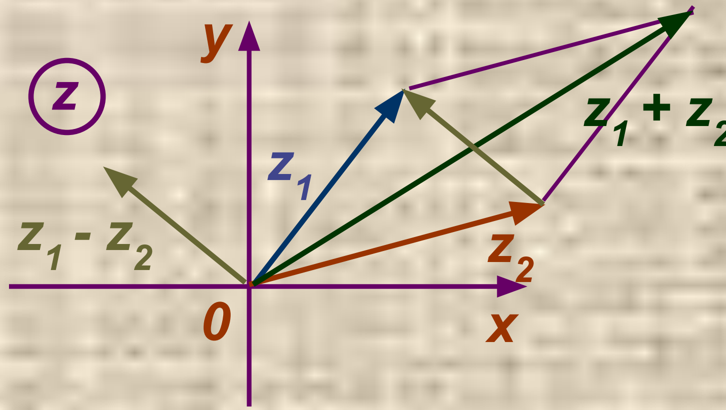
Суммой (разностью) комплексных чисел $z_1 = a_1 + i \cdot b_1$ и $z_2 = a_2 + i \cdot b_2$ называется комплексное число, определяемое равенством:

$$z_1 + z_2 = (a_1 + i \cdot b_1) + (a_2 + i \cdot b_2) = (a_1 + a_2) + i \cdot (b_1 + b_2)$$

$$\left[z_1 - z_2 = (a_1 + i \cdot b_1) - (a_2 + i \cdot b_2) = (a_1 - a_2) + i \cdot (b_1 - b_2) \right]$$

Действия над комплексными числами

Сложение и вычитание комплексных чисел, изображенных векторами производится по правилу сложения или вычитания векторов:



3 Умножение комплексных чисел.

Умножением комплексных чисел $z_1 = a_1 + i \cdot b_1$ и $z_2 = a_2 + i \cdot b_2$ называется число, получаемое при умножении этих чисел по правилам алгебры как двучлены, учитывая что

$$i^2 = -1; \quad i^3 = -i; \quad i^4 = -i \cdot i = 1; \quad i^5 = i$$

При любом целом *k*:

$$\boxed{i^{4k} = 1; \quad i^{4k+1} = i; \quad i^{4k+2} = -1; \quad i^{4k+3} = -i}$$

Действия над комплексными числами

На основании этого правила получим:

$$z_1 \cdot z_2 = (a_1 + i \cdot b_1) \cdot (a_2 + i \cdot b_2) =$$

$$= a_1 \cdot a_2 + i \cdot b_1 \cdot a_2 + i \cdot b_2 \cdot a_1 + i^2 \cdot b_1 \cdot b_2$$

$$\boxed{z_1 \cdot z_2 = (a_1 \cdot a_2 - b_1 \cdot b_2) + i \cdot (b_1 \cdot a_2 + b_2 \cdot a_1)}$$

Если комплексные числа заданы в тригонометрической форме:

$$z_1 = r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1) \qquad z_2 = r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)$$

тогда произведение находится по формуле:

$$\boxed{z_1 \cdot z_2 = r_1 \cdot r_2(\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2))}$$

Произведение сопряженных комплексных чисел:

$$z \cdot \bar{z} = (a + i \cdot b) \cdot (a - i \cdot b) = a^2 - (i \cdot b)^2 = a^2 + b^2$$

$$\boxed{z \cdot \bar{z} = a^2 + b^2 = |z|^2}$$

Действия над комплексными числами

4 <u>*Деление комплексных чисел*</u>.

Чтобы разделить $z_1 = a_1 + i \cdot b_1$ на $z_2 = a_2 + i \cdot b_2$ необходимо умножить делимое и делитель на число, сопряженное делителю:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{a_1 + i \cdot b_1}{a_2 + i \cdot b_2} = \frac{(a_1 + i \cdot b_1) \cdot (a_2 - i \cdot b_2)}{(a_2 + i \cdot b_2) \cdot (a_2 - i \cdot b_2)} =$$

$$= \frac{(a_1 a_2 + b_1 b_2) + i \cdot (a_2 b_1 - a_1 b_2)}{a_2^2 + b_2^2} = \boxed{\frac{a_1 a_2 + b_1 b_2}{a_2^2 + b_2^2} + i \cdot \frac{a_2 b_1 - a_1 b_2}{a_2^2 + b_2^2}}$$

Если комплексные числа заданы в тригонометрической форме:

$$z_1 = r_1(\cos\varphi_1 + i \sin\varphi_1) \qquad z_2 = r_2(\cos\varphi_2 + i \sin\varphi_2)$$

$$\boxed{\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}(\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 - \varphi_2))}$$

Действия над комплексными числами

Найти произведение и частное комплексных чисел:

$$z_1 = 2 + 3i, \quad z_2 = 1 - 4i$$

= -1

$$z_1 \cdot z_2 = (2 + 3i) \cdot (1 - 4i) = 2 + 3i - 8i - 12i^2 =$$

$$= 2 + 3i - 8i + 12 = 14 - 5i$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{2 + 3i}{1 - 4i} = \frac{(2 + 3i) \cdot (1 + 4i)}{(1 - 4i) \cdot (1 + 4i)} = \frac{2 + 3i + 8i + 12i^2}{1^2 + 4^2} =$$

$$\frac{2 + 3i + 8i - 12}{17} = \frac{-10 + 11i}{17} = -\frac{10}{17} + \frac{11}{17}i$$

Действия над комплексными числами

5 *Возведение в степень комплексного числа*.

При возведении комплексного числа $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ в целую положительную степень модуль возводится в эту степень, а аргумент умножается на показатель степени (формула Муавра)

$$\boxed{z^n = r^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi)}$$

6 *Извлечение корня из комплексного числа*.

Корень n – ой степени из комплексного числа $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ находится по формуле:

$$\boxed{\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi + 2k\pi}{n} + i\sin\frac{\varphi + 2k\pi}{n}\right)}$$

Арифметическое значение корня из положительного числа r

Действия над комплексными числами

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi + 2k\pi}{n} + i\sin\frac{\varphi + 2k\pi}{n}\right)$$

Придавая *k* значения *0, 1, 2, …,n –1*, получим *n* различных значений корня.

Для других значений *k* аргументы будут отличаться от полученных на число, кратное *2π*, и , следовательно будут получаться значения корня, совпадающие с рассмотренными.

Итак, корень *n* – ой степени из комплексного числа имеет *n* различных значений.

Корень *n* – ой степени из действительного числа также имеет *n* значений, так как действительное число – частный случай комплексного числа и может быть представлено в тригонометрической форме:

$$A = |A|(\cos 0 + i\sin 0) \quad (A > 0)$$

$$A = |A|(\cos\pi + i\sin\pi) \quad (A < 0)$$

Действия над комплексными числами

Найти все значения кубического корня из единицы

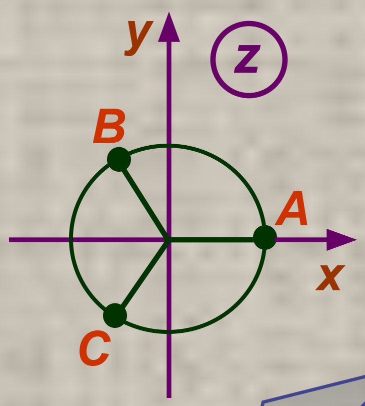
$$1 = \cos 0 + i \sin 0 \quad (r = 1; \quad \varphi = 0)$$

$$\sqrt[3]{1} = \cos\frac{0+2k\pi}{3} + i\sin\frac{0+2k\pi}{3} = \cos\frac{2k\pi}{3} + i\sin\frac{2k\pi}{3}$$

$$k = 0 \quad \sqrt[3]{1} = \cos 0 + i \sin 0 = 1$$

$$k = 1 \quad \sqrt[3]{1} = \cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

$$k = 2 \quad \sqrt[3]{1} = \cos\frac{4\pi}{3} + i\sin\frac{4\pi}{3} = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$$



Показательная форма комплексного числа

Пусть $z = x + i \cdot y$. Если x и y – действительные переменные, то z называется комплексной переменной.

Рассмотрим показательную функцию от комплексной переменной z.

$$w = e^{z} \quad \text{или} \quad w = e^{x+i\cdot y}$$

Комплексные значения функции w определяются по формуле:

$$\boxed{e^{x+i\cdot y} = e^{x}(\cos y + i \cdot \sin y)} \quad (1)$$

Пример: $z = 2 + i \cdot \dfrac{\pi}{4}$

$$e^{2+i\cdot\frac{\pi}{4}} = e^{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i \cdot \sin\frac{\pi}{4}\right) = \frac{e^{2}\sqrt{2}}{2} + i \cdot \frac{e^{2}\sqrt{2}}{2}$$

Показательная форма комплексного числа

Если в формуле *(1)* положим $x = 0$, то получим:

$$\boxed{e^{i \cdot y} = \cos y + i \cdot \sin y} \quad (2)$$

Эта формула называется ***формулой Эйлера***, выражающая показательную функцию с мнимым показателем через тригонометрические функции.

Заменим в формуле *(2)* *y* на *– y*:

$$e^{-i \cdot y} = \cos(-y) + i \cdot \sin(-y) \Rightarrow e^{-i \cdot y} = \cos y - i \cdot \sin y \quad (3)$$

Складывая и вычитая равенства *(2)* и *(3)* получим :

$$\boxed{\cos y = \frac{e^{iy} + e^{-iy}}{2} \qquad \sin y = \frac{e^{iy} - e^{-iy}}{2i}}$$

Показательная форма комплексного числа

Представим комплексное число z в тригонометрической форме::

$$z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$$

По формуле Эйлера: $\cos\varphi + i \cdot \sin\varphi = e^{i\varphi}$

Следовательно, всякое комплексное число можно представить в ***показательной форме***:

$$\boxed{z = r \cdot e^{i\varphi}}$$

<u>Действия над комплексными числами в показательной форме</u>:

Пусть имеем: $z_1 = r_1 \cdot e^{i\varphi_1}$; $z_2 = r_2 \cdot e^{i\varphi_2}$. Тогда:

$$z_1 \cdot z_2 = r_1 \cdot r_2 \cdot e^{i(\varphi_1+\varphi_2)};$$

$$z^n = r^n \cdot e^{i\varphi n};$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} e^{i(\varphi_1-\varphi_2)};$$

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r} \cdot e^{i\frac{\varphi+2\pi k}{n}}.$$