

# Интеграл

Смысл - там, где змеи интеграла  
Меж цифр и букв, меж  $d$  и  $f$ .

В.Я. Брюсов



Таблица  
первообразных

$F(x)$

**Интеграл**

Свойства  
первообразной

С криволинейной  
трапеции

Правила вычисления  
первообразных

# Верно ли что:

а)

$$\int x^5 dx = 5x^4 + c$$

б)

$$\int x^6 dx = \frac{1}{7} x^7$$



# Найти первообразные для функций:

а)  $f(x) = 10x$

$$F(x) = 5x^2 + C$$

б)  $f(x) = x^2$

$$F(x) = \frac{1}{3}x^3 + C$$

в)  $f(x) = -\sin(2x)$

$$F(x) = 0,5\cos(2x) + C$$

г)  $f(x) = 5\cos x$

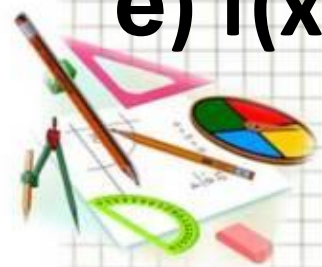
$$F(x) = 5\sin x + C$$

д)  $f(x) = 6x^2$

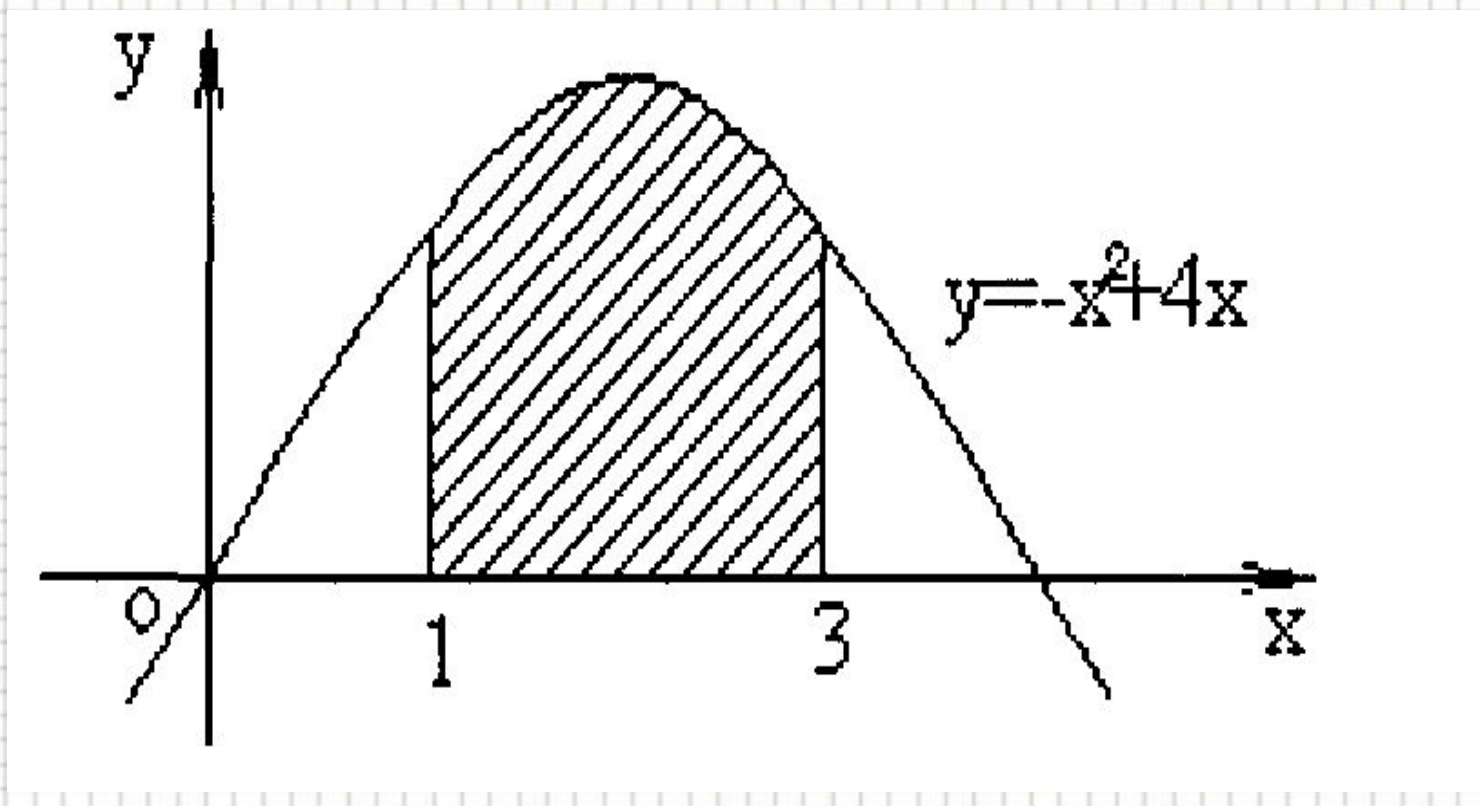
$$F(x) = 2x^3 + C$$

е)  $f(x) = 3$

$$F(x) = 3x + C$$



**Найдите с помощью интеграла  
площадь фигуры изображенной на  
рисунке:**



**Вычисление площади  
плоской фигуры в  
полярных  
координатах**

**Вычисление площади плоской  
фигуры в прямоугольных  
координатах**

**Математика**

**Вычисление  
объема тела  
вращения**

**Вычисление площади  
поверхности тела  
вращения**

**Вычисление длины дуги кривой**

$$A = \int_{x_1}^{x_2} F(x) dx$$

*A* - работа,  
*F* - сила,  
*N* - мощность

*S* - перемещение  
*v* - скорость  
*a* - ускорение

$$v = \int_{t_1}^{t_2} a(t) dt$$

$$A = \int_{t_1}^{t_2} N(t) dt$$

$$s = \int_{t_1}^{t_2} v(t) dt$$

# Физика

*m* - масса тонкого  
стержня,  
*ρ* - линейная  
плотность

$$q = \int_{t_1}^{t_2} J(t) dt$$

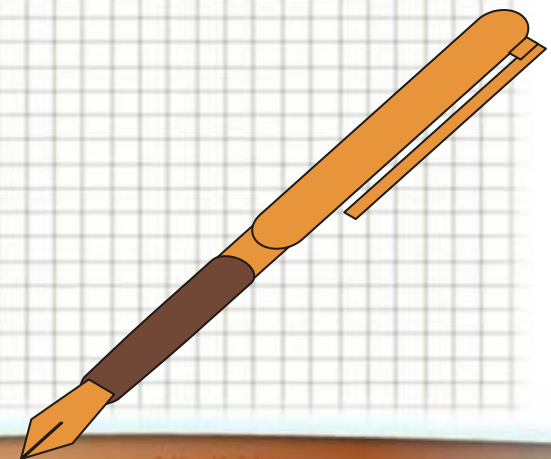
$$m = \int_{x_1}^{x_2} \rho(x) dx$$

*q* - электрический  
заряд,  
*I* - сила тока

$$Q = \int_{t_1}^{t_2} c(t) dt$$

*Q* - количество теплоты  
*c* - теплоемкость

**«Применение интегрального  
исчисления к решению  
прикладных задач в  
экономике»**

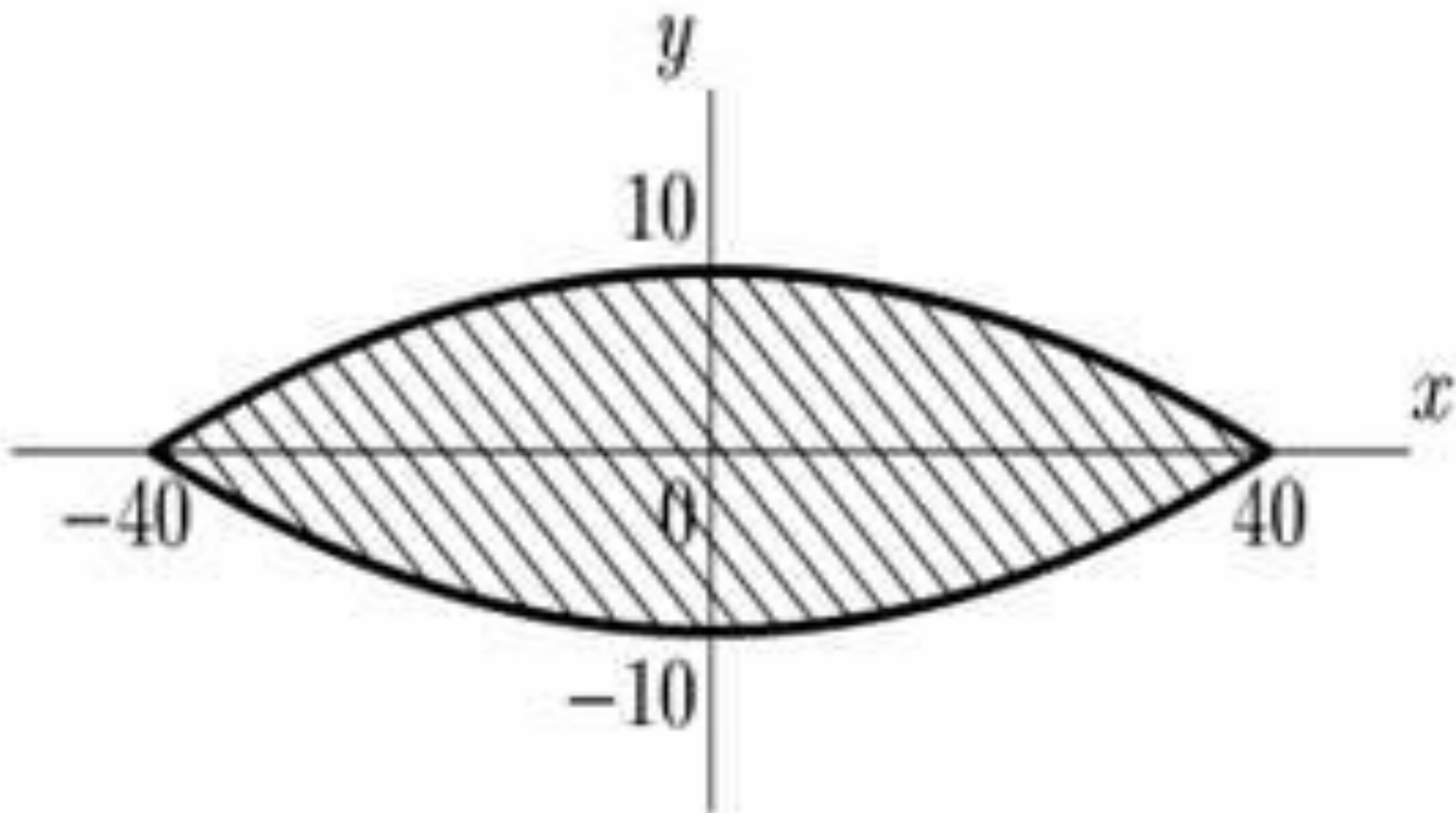




## ► Прогнозирование материальных затрат

**Задача.** Палуба корабля напоминает две пересекающиеся параболы. Сколько необходимо краски для ее покрытия, если длина корабля 80 м, ширина в центре – 20 м, а на каждый квадратный метр необходимо 0,25 кг краски.





## ► Определения объема выпуска продукции

**Задача.** Определить объем продукции, произведенной рабочим за третий час рабочего дня, если производительность труда характеризуется функцией  $f(t) = 3/(3t + 1) + 4$ .



# ▶ **Нахождение потребительского излишка**

**Задача.** Известно, что спрос на некоторый товар описывается функцией  $q = \frac{8000}{p^3}$ , а предложение данного товара характеризуется функцией  $q = 500p$ .  
Найдите величину излишка потребителя при покупке данного товара.



# ▶ Нахождение потребительского излишка

**Задача.** Известно, что спрос на некоторый товар задается функцией  $p = \frac{231}{q+1}$ , предложение – функцией  $p = q + 11$ . Определите величину выигрыша потребителя при покупке данного товара.



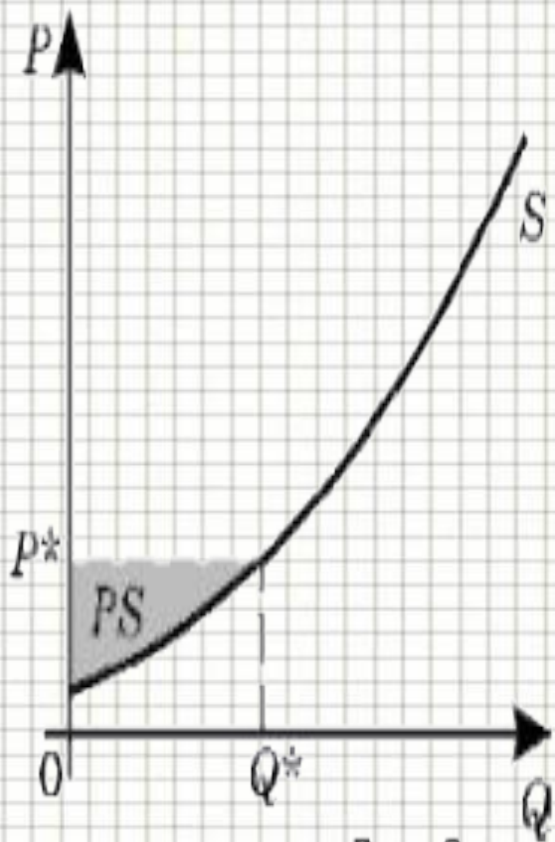


Рис. 8

$$PS = P^*Q^* - \int_0^{Q^*} f(Q) dQ.$$



## ▶ **Нахождение излишка**

### **производителя**

**Задача.** Известно, что кривая предложения некоторого товара имеет вид  $p = 4q^3 + 2$ , а равновесие на рынке данного товара достигается при объеме продаж  $Q^* = 3$ . Определите добавочную выгоду производителя при продаже такого количества продукции.

**▶ Нахождение  
дисконтированной  
стоимости денежного потока**

$$\Pi = \int_0^T I(t) e^{-pt} dt$$





$q$  – количество товара,  
 $p$  – цена единицы товара  
 $(p^*; q^*)$  – точка равновесия

$CS$  – потребительский излишек  
 $PS$  – излишек производителя

$$CS = \int_0^{q^*} p(q) dq - p^* q^*$$

$$PS = p^* q^* - \int_0^{q^*} p(q) dq$$

# Экономика

$G$  – коэффициент Джини

$$G = \frac{S_1}{S_1 + S_2}$$

$$V = \int_{t_1}^{t_2} f(t) dt$$

$f$  – производительность,  
 $t$  – время,  
 $V$  – объём продукции

$$П = \int_0^T I(t) e^{-pt} dt$$

$П$  – дисконтированная стоимость денежного потока,  
 $I$  – скорость денежного потока,  
 $p$  – годовая процентная ставка,  
 $t$  – время

Определенный интеграл,  
Ты мне ночами начал сниться,  
Когда тебя впервые брал,  
Я ощутил твои границы.

И ограниченность твоя  
Мне придавала больше силы.

С тобой бороться должен я,  
Но должен победить красиво!

Какое счастье познал  
Я в выборе первообразной,  
Как долго я ее искал.

