



**ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКАЯ
РАБОТА «СПОСОБЫ
РЕШЕНИЙ КВАДРАТНЫХ
УРАВНЕНИЙ»**

ТЕМА, ЕЁ АКТУАЛЬНОСТЬ И ЦЕЛЬ ИССЛЕДОВАНИЯ

Тема: способы решений квадратных уравнений.

Актуальность: на уроках алгебры, геометрии, физики мы очень часто встречаемся с решением квадратных уравнений. Поэтому каждый ученик должен уметь верно и рационально решать квадратные уравнения, это также может мне пригодиться при решении более сложных задач, в том числе и в 9 классе при сдаче экзаменов.

Цель работы: изучить различные методы решения квадратного уравнения и выявить наиболее легкий и быстрый способ.

ЗАДАЧИ И ГИПОТЕЗА

Задачи:

- изучить историю развития квадратных уравнений;
- рассмотреть стандартные и нестандартные методы решения квадратных уравнений;
- выявить наиболее удобные способы решения квадратных уравнений;
- научиться решать квадратные уравнения различными способами.

Гипотеза: существует множество способов решения квадратных уравнений.

МЕТОДЫ ИССЛЕДОВАНИЯ

Методы исследования:

Теоретические: изучение литературы по теме исследования.

Анализ: информации полученной при изучении литературы; результатов полученных при решении квадратных уравнений различными способами.

Сравнение способов на рациональность их использования при решении квадратных уравнений.

КВАДРАТНЫЕ УРАВНЕНИЯ В ДРЕВНЕМ ВАВИЛОНЕ

$$ax^2+bx+c=0$$

Древний Вавилон

Уже примерно за 2000 лет до нашей эры Вавилоняне знали, как решать квадратные уравнения. Решение их в Древнем Вавилоне было тесно связано с практическими задачами, в основном такими, как измерение площади земельных участков, земельные работы, связанные с военными нуждами; наличие этих познаний также обусловлено развитием математики и астрономии вообще. Были известны способы решения как полных, так и неполных квадратных уравнений. Приведём примеры квадратных уравнений, решавшихся в Древнем Вавилоне, используя современную алгебраическую запись:

$$x^2+x=\frac{3}{4} \quad x^2-x=14\frac{1}{2}$$

Правила решения квадратных уравнений во многом аналогичны современным, однако в вавилонских текстах не зафиксированы рассуждения, путём которых эти правила были получены.

КВАДРАТНЫЕ УРАВНЕНИЯ В ГРЕЦИИ

В «Арифметике» Диофанта нет систематического изложения алгебры, однако в ней содержится систематизированный ряд задач, сопровождаемых объяснениями и решаемых при помощи составления уравнений разных степеней.

При составлении уравнений Диофант для упрощения решения умело выбирает неизвестные. Вот, к примеру, одна из его задач.

Задача 11. «Найти два числа, зная, что их сумма равна 20, а произведение - 96»

Диофант рассуждает следующим образом: из условия задачи вытекает, что искомые числа не равны, так как если бы они были равны, то их произведение равнялось бы не 96, а 100. Таким образом, одно из них будет больше половины их суммы, т.е. $10 + x$, другое же меньше, т.е. $10 - x$. Разность между ними $2x$.

Отсюда уравнение:

$$(10 + x)(10 - x) = 96$$

$$100 - x^2 = 96$$

$$x^2 - 4 = 0$$

Отсюда $x = 2$, $x = -2$ для Диофанта не существует, так как греческая математика знала только положительные числа.

КВАДРАТНЫЕ УРАВНЕНИЯ В ИНДИИ

Задачи на квадратные уравнения встречаются в астрономическом трактате «Ариабхаттиам», составленном в 499 г. индийским математиком и астрономом Ариабхаттой. Другой индийский ученый, Брахмагупта (VII в.), изложил общее правило решения квадратных уравнений, приведенных к единой канонической форме: $ax^2 + bx = c$, $a > 0$.

В уравнении коэффициенты, кроме a , могут быть и отрицательными. Правило Брахмагупты по существу совпадает с нашим. В Древней Индии были распространены публичные соревнования в решении трудных задач. В одной из старинных индийских книг говорится по поводу таких соревнований следующее: «Как солнце блеском своим затмевает звезды, так ученый человек затмит славу другого в народных собраниях, предлагая и решая алгебраические задачи». Задачи часто облекались в стихотворную форму.

Вот одна из задач знаменитого индийского математика XII в. Бхаскары.

Задача.

«Обезьянок резвых стая	А двенадцать по лианам...
Власть поевши, развлекалась.	Стали прыгать, повисая...
Их в квадрате часть восьмая	Сколько ж было обезьянок,
На поляне забавлялась.	Ты скажи мне, в этой стае?»

Соответствующее задаче уравнение:

$$\left(\frac{x}{8}\right)^2 + 12 = x$$

Бхаскара пишет под видом: $x^2 - 64x = -768$ и, чтобы дополнить левую часть этого уравнения до квадрата, прибавляет к обеим частям 32^2 , получая затем:

$$x^2 - 64x + 32^2 = -768 + 1024, (x - 32)^2 = 256,$$

$$x - 32 = \pm 16,$$

$$x_1 = 16, x_2 = 48.$$

КВАДРАТНЫЕ УРАВНЕНИЯ В ЕВРОПЕ В 13-17 ВЕКАХ

В Европе были впервые изложены в «Книге абака», написанной в 1202 г. итальянским математиком Леонардо Фибоначчи. Автор разработал самостоятельно некоторые новые алгебраические примеры решения задач и первый в Европе подошел к введению отрицательных чисел. Его книга способствовала распространению алгебраических знаний не только в Италии, но и в Германии, Франции и других странах Европы. Многие задачи из «Книги абака» переходили почти во все европейские учебники XVI - XVII вв. и частично XVIII.

Общее правило решения квадратных уравнений, приведенных к единому каноническому виду:

$x^2 + bx = c$, при всевозможных комбинациях знаков коэффициентов b , c было сформулировано в Европе лишь в 1544 г. М. Штифелем.

Вывод формулы решения квадратного уравнения в общем виде имеется у Виета, однако Виет признавал только положительные корни. Итальянские математики Тарталья, Кардано, Бомбелли среди первых в XVI в. учитывают, помимо положительных, и отрицательные корни. Лишь в XVII в. Благодаря труда Жирара, Декарта, Ньютона и других ученых способ решения квадратных уравнений принимает современный вид

КВАДРАТНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Квадратное уравнение — алгебраическое уравнение общего вида

$$ax^2 + bx + c = 0,$$

где x — свободная переменная, a, b, c — коэффициенты, причём $a \neq 0$.

Выражение $ax^2 + bx + c$ называют квадратным трёхчленом.

Корень — это значение переменной x , обращающее квадратный трёхчлен в ноль, а квадратное уравнение в верное равенство.

Элементы квадратного уравнения имеют собственные названия:

a называют первым или старшим коэффициентом,

b называют вторым или коэффициентом при x ,

c называют свободным членом.

ВИДЫ КВАДРАТНЫХ УРАВНЕНИЙ

Приведённым называют квадратное уравнение, в котором старший коэффициент равен единице. Такое уравнение может быть получено делением всего выражения на старший коэффициент a :

$$x^2 + px + q = 0, \quad p = \frac{b}{a}, \quad q = \frac{c}{a}$$

Полным называют такое квадратное уравнение, все коэффициенты которого отличны от нуля.

$$ax^2 + bx + c = 0$$

Неполным называется такое квадратное уравнение, в котором хотя бы один из коэффициентов кроме старшего (либо второй коэффициент, либо свободный член) равен нулю.

1. $ax^2 + c = 0$, где $c \neq 0$

2. $ax^2 + bx = 0$, где $b \neq 0$

3. $ax^2 = 0$

СПОСОБ 1

Разложение левой части на множители

$$8x^2 + 10x + 3 = 0$$

$$8x^2 + 4x + 6x + 3 = 0$$

$$4x(2x + 1) + 3(2x + 1) = 0$$

$$(2x + 1)(4x + 3) = 0$$

$$2x + 1 = 0; 4x + 3 = 0$$

$$x_1 = -\frac{1}{2} \quad x_2 = -\frac{3}{4}$$

$$\text{Ответ: } x_1 = -\frac{1}{2}, x_2 = -\frac{3}{4}$$

СПОСОБ 2

Метод выделения полного квадрата

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

$$x^2 - 10x + 16 = 0$$

$$x^2 - 2 \cdot 5x + 25 - 25 + 16 = 0$$

$$(x-5)^2 - 9 = 0$$

$$(x-5)^2 = 9$$

$$x-5 = -3; x-5 = 3$$

$$x_1 = 2 \quad x_2 = 8$$

Ответ: $x_1 = 2, x_2 = 8$

3 СПОСОБ

$$ax^2 + bx + c = 0$$

$$D = b^2 - 4ac$$

1. $D = 0$ - один корень

2. $D > 0$ - 2 корня

3. $D < 0$ - корней нет

b - нечетное число

$$D = b^2 - 4ac$$

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$$

$$2x^2 + 3x - 5 = 0$$

$$D = 3^2 - 4 * 2 * (-5) = 9 + 40 = 49$$

$$D > 0$$

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} = \frac{-3 \pm 7}{4}$$

$$x_1 = -2\frac{1}{2}$$

$$x_2 = 1$$

$$\text{Ответ: } x_1 = -2\frac{1}{2}, x_2 = 1$$

b - четное

$$D = k^2 - ac$$

$$x_{1,2} = \frac{-k \pm \sqrt{D}}{a}$$

$$x^2 - 4x - 5 = 0$$

$$b = 2 * 2 \quad k = 2$$

$$D = 2^2 + 5 = 9 \quad D > 0$$

$$x_1 = 2 - \sqrt{9} = -1$$

$$x_2 = 2 + \sqrt{9} = 5$$

$$\text{Ответ: } x_1 = -1, x_2 = 5$$

4 СПОСОБ

По сумме коэффициентов квадратного уравнения

$$ax^2 + bx + c = 0 \quad a \neq 0$$

1. Если $a + b + c = 0$, то $x_1 = 1$, $x_2 = -\frac{c}{a}$

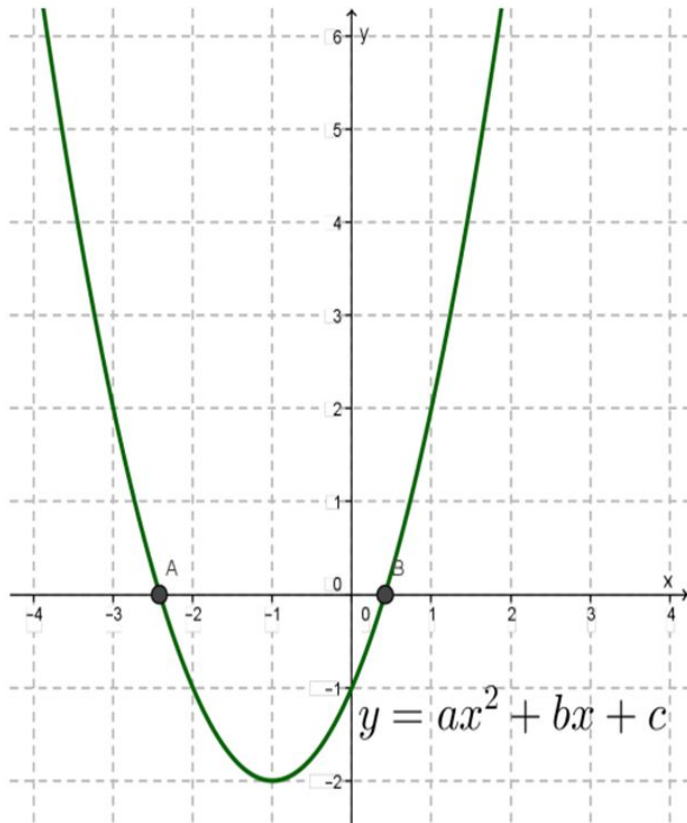
2. Если $a - b + c = 0$, то $x_1 = -1$, $x_2 = \frac{c}{a}$

$$5x^2 - 7x + 2 = 0$$

т.к. $5 - 7 + 2 = 0$, то $x_1 = -1$, $x_2 = \frac{2}{5}$

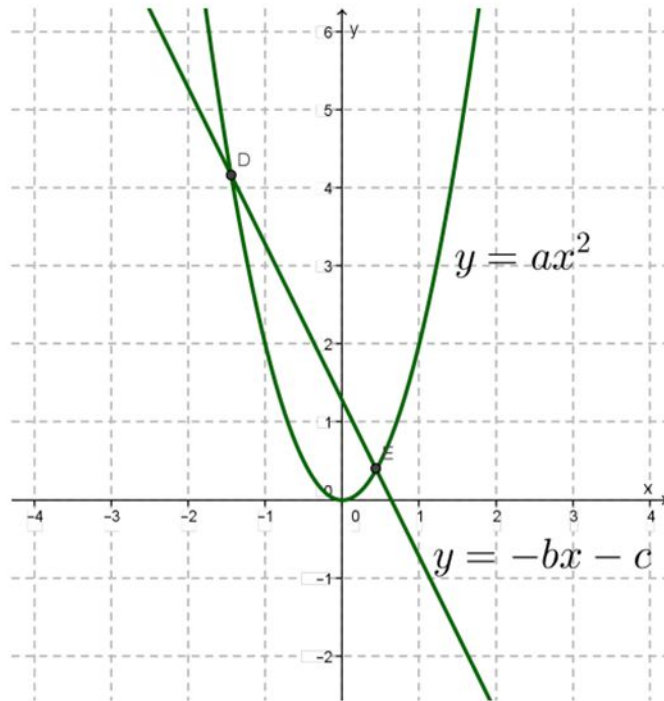
Ответ: $x_1 = -1$, $x_2 = \frac{2}{5}$

5 СПОСОБ



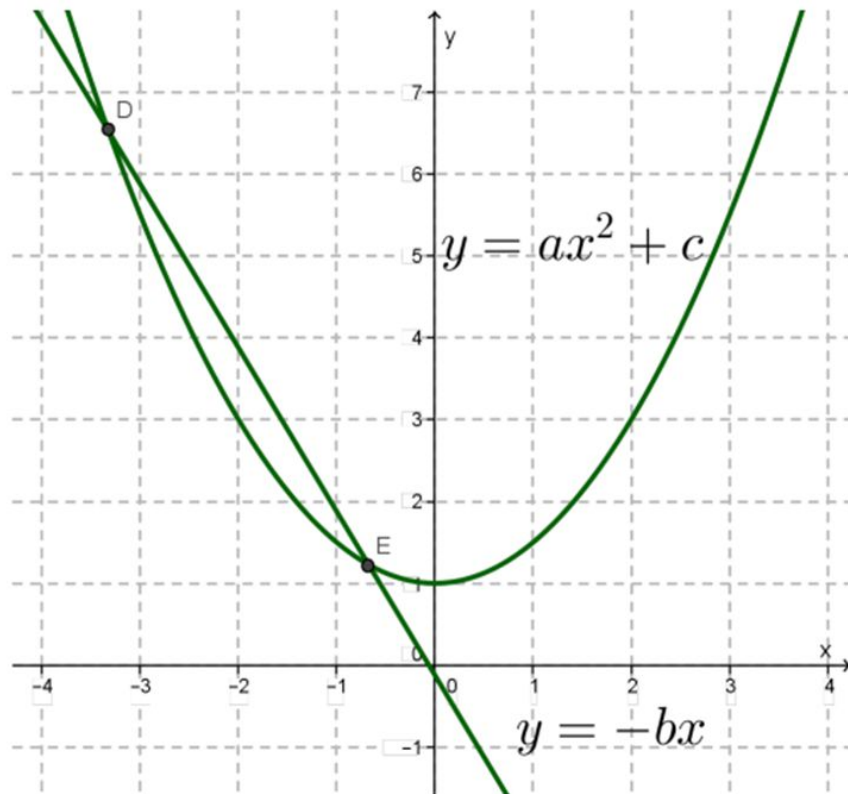
Строят график функции $y = ax^2 + bx + c$ и находят точки его пересечения с осью x .

6 СПОСОБ



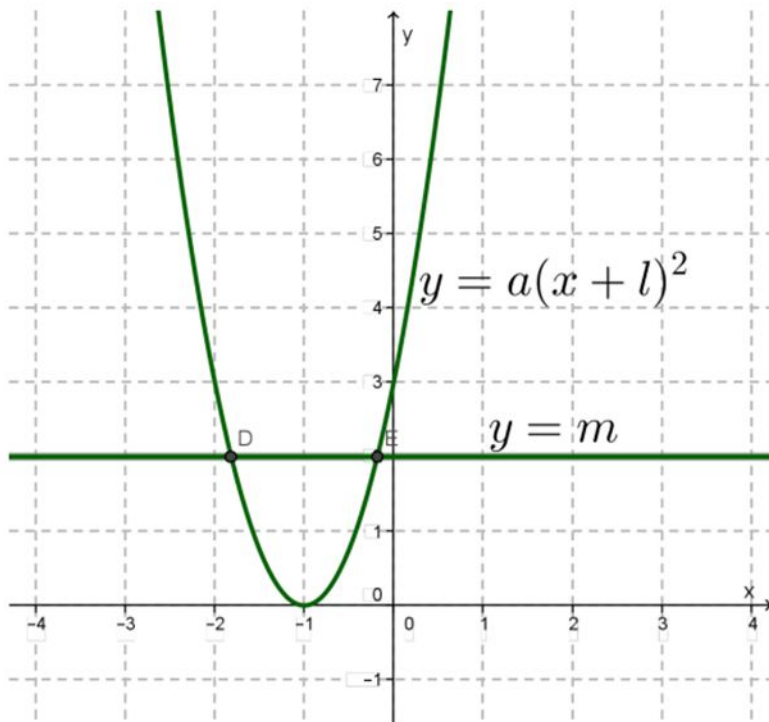
Преобразуют уравнение к виду $ax^2 = -bx - c$, строят параболу $y = ax^2$ и прямую $y = -bx - c$, находят точки их пересечения (корнями уравнения служат абсциссы точек пересечения, если, разумеется, таковые имеются).

7 СПОСОБ



Преобразуют уравнение к виду $ax^2 + c = -bx$, строят параболу $y = ax^2 + c$ и прямую $y = -bx$ (она проходит через начало координат); находят точки их пересечения.

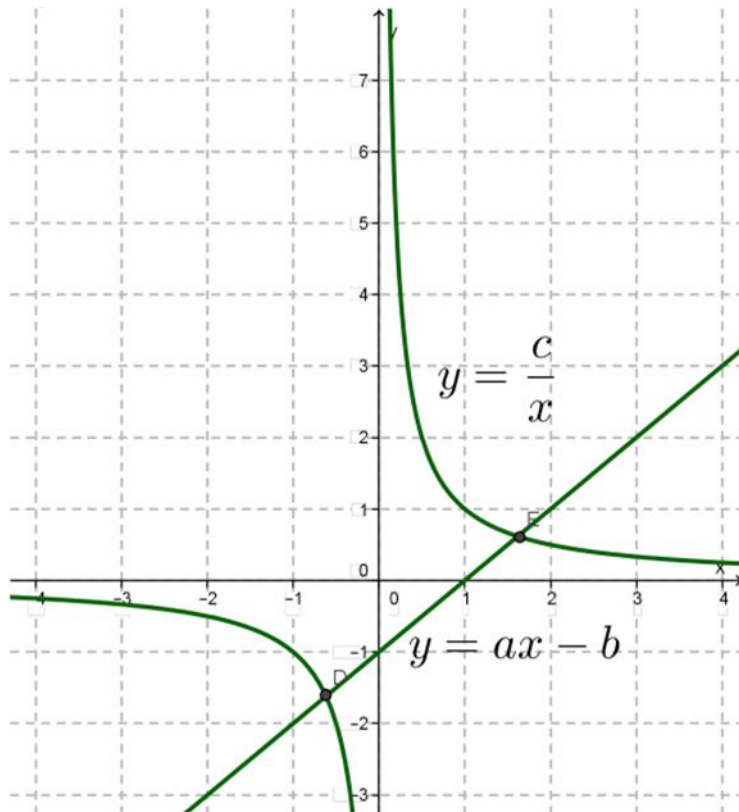
8 СПОСОБ



Применяя метод выделения полного квадрата, преобразуют уравнение к виду $a(x+l)^2+m=0$ и далее $a(x+l)^2=-m$.

Строят параболу $y=a(x+l)^2$ и прямую $y=m$, параллельную оси x ; находят точки пересечения параболы и прямой.

9 СПОСОБ



Преобразуют уравнение к виду $\frac{ax^2 + bx + c}{c^x} = 0$, т.е. $ax + b + \frac{c}{x} = 0$ далее $\frac{c}{x} = -ax - b$.

Строят гиперболу $y = \frac{c}{x}$ (это гипербола при условии, что $c \neq 0$) и прямую $y = -ax - b$; находят точки их пересечения.

ФРАНСУА ВИЕТ



Франсуа́ Виёт, сеньор де ля Биготье—
французский математик, основоположник
символической алгебры.

ТЕОРЕМА ВИЕТА

Теорема Виета.

Если x_1 и x_2 — корни квадратного уравнения $ax^2+bx+c=0$, то

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \\ x_1 x_2 = \frac{c}{a} \end{cases}$$

В частном случае, если $a=1$ (приведенная форма $x^2+px+q=0$), то

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -p \\ x_1 x_2 = q \end{cases}$$

Кстати, запомнить теорему Виета помогает вот такой стишок:

Познакомили поэта

С теоремою Виета.

Оба корня он сложил,

Минус p он получил,

А корней произведение

Дает q из уравнения.

10 СПОСОБ

Как известно, приведенное квадратное уравнение имеет вид

$$x^2 + px + c = 0.$$

Его корни удовлетворяют теореме Виета, которая при $a = 1$ имеет вид

$$x_1 * x_2 = q,$$

$$x_1 + x_2 = -p$$

Отсюда можно сделать следующие выводы (по коэффициентам p и q можно предсказать знаки корней).

а) Если свободный член q приведенного уравнения (1) положителен ($q > 0$), то уравнение имеет два одинаковых по знаку корня и это зависит от второго коэффициента p . Если $p < 0$, то оба корня отрицательны, если $p > 0$, то оба корня положительны.

Например,

$$x^2 - 3x + 2 = 0; x_1 = 2 \text{ и } x_2 = 1, \text{ так как } q = 2 > 0 \text{ и } p = -3 < 0;$$

$$x^2 + 8x + 7 = 0; x_1 = -7 \text{ и } x_2 = -1, \text{ так как } q = 7 > 0 \text{ и } p = 8 > 0.$$

б) Если свободный член q приведенного уравнения (1) отрицателен ($q < 0$).

Например,

$$x^2 + 4x - 5 = 0; x_1 = -5 \text{ и } x_2 = 1, \text{ так как } q = -5 < 0;$$

$$x^2 - 8x - 9 = 0; x_1 = 9 \text{ и } x_2 = -1, \text{ так как } q = -9 < 0 \text{ и } p = -8 < 0.$$

11 СПОСОБ

Способ «переброски».

Рассмотрим квадратное уравнение

$$ax^2 + bx + c = 0, \text{ где } a \neq 0.$$

Умножая обе его части на a , получаем уравнение

$$a^2x^2 + abx + ac = 0.$$

Пусть $ax = y$, откуда $x = y/a$; тогда приходим к уравнению

$$y^2 + by + ac = 0, \text{ равносильно данному. Его корни } y_1 \text{ и } y_2 \text{ найдем с помощью теоремы Виета. Окончательно получаем } x_1 = \frac{y_1}{a} \text{ и } x_2 = \frac{y_2}{a}.$$

При этом способе коэффициент a умножается на свободный член, как бы перебрасывается к нему, поэтому его называют способом переброски. Этот способ применяют, когда можно легко найти корни уравнения, используя теорему Виета и, что самое важное, когда дискриминант есть точный квадрат.

Пример.

Решим уравнение $2x^2 - 11x + 15 = 0$. Решение. Перебросим коэффициент 2 к свободному члену, в результате получим уравнение

$$y^2 - 11y + 30 = 0$$

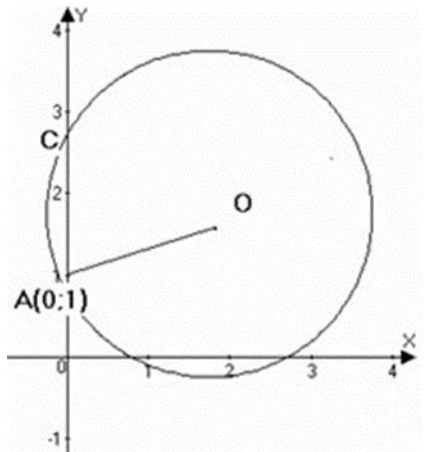
Согласно теореме Виета

$$\begin{cases} y_1 = 5 \\ y_2 = 6 \end{cases} \begin{cases} x_1 = 5/2 \\ x_2 = 6/2 \end{cases} \begin{cases} x_1 = 2,5 \\ x_2 = 3 \end{cases}$$

12 СПОСОБ

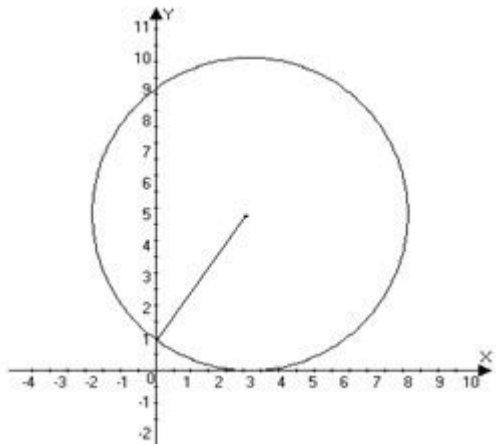
Допустим, что искомая окружность пересекает ось абсцисс в точках $D(x_2; 0)$ и $B(x_1; 0)$, где x_1 и x_2 корни уравнения $ax^2 + bx + c = 0$ проходит через точки $A(0; 1)$ и $C(0; y)$ на оси координат. Тогда по теореме о секущих имеем $OB \cdot OD = OA \cdot OC$, откуда $OC = \frac{OB \cdot OD}{OA} = \frac{x_1 \cdot x_2}{1} = \frac{c}{a}$. По теореме Виета $OC = |y_0|$, $C(0; \frac{c}{a})$.

Центр окружности находится в точке пересечения перпендикуляров SF и SK , восстановленных в серединах хорд AC и BD , поэтому $SK = \frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{-b}{2} = -\frac{b}{2a}$; $SK = y$, $SF = \frac{y_1 + y_2}{2} = \frac{a+c}{2a}$, $SF = x$. При этом возможны случаи.



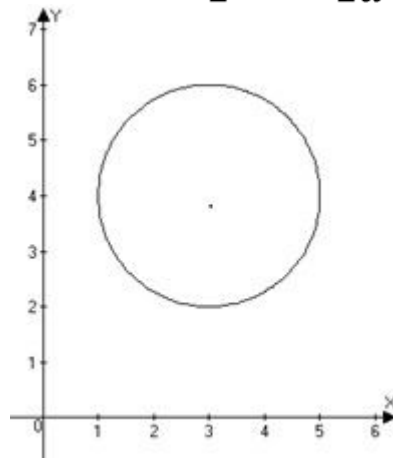
$$AS > SK \text{ или } R > \frac{a+c}{2a}$$

Два корня x_1 и x_2



$$AS = SK \text{ или } R = \frac{a+c}{2a}$$

Один корень



$$AS < SK \text{ или } R < \frac{a+c}{2a}$$

Корней нет

ВЫВОД

Мы изучили все 12 способов решения квадратных уравнений и выяснили, что наиболее легкие и быстрые способы: через дискриминант, по сумме коэффициентов, через теорему Виета. Дискриминант и теорему Виета мы проходим по школьной программе. Также мы доказали, что существует не 2 способа решений, а целых 12. Нам пришлось воспользоваться нашими знаниями по геометрии.