ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКАЯ РАБОТА «СПОСОБЫ РЕШЕНИЙ КВАДРАТНЫХ УРАВНЕНИЙ»

ТЕМА, ЕЁ АКТУАЛЬНОСТЬ И ЦЕЛЬ ИССЛЕДОВАНИЯ

Тема: способы решений квадратных уравнений.

Актуальность: на уроках алгебры, геометрии, физики мы очень часто встречаемся с решением квадратных уравнений. Поэтому каждый ученик должен уметь верно и рационально решать квадратные уравнения, это также может мне пригодится при решении более сложных задач, в том числе и в 9 классе при сдаче экзаменов.

Цель работы: изучить различные методы решения квадратного уравнения и выявить наиболее легкий и быстрый способ.

ЗАДАЧИ И ГИПОТЕЗА

Задачи:

- изучить историю развития квадратных уравнений;
- рассмотреть стандартные и нестандартные методы решения квадратных уравнений;
- выявить наиболее удобные способы решения квадратных уравнений;
- научиться решать квадратные уравнения различными способами.

Гипотеза: существует множество способов решения квадратных уравнений.

МЕТОДЫ ИССЛЕДОВАНИЯ

Методы исследования:

Теоретические: изучение литературы по теме исследования.

Анализ: информации полученной при изучении литературы; результатов полученных при решении квадратных уравнений различными способами.

Сравнение способов на рациональность их использования при решении квадратных уравнений.

КВАДРАТНЫЕ УРАВНЕНИЯ В ДРЕВНЕМ ВАВИЛОНЕ

$ax^2+bx+c=0$

Древний Вавилон

Уже примерно за 2000 лет до нашей эры Вавилоняне знали, как решать квадратные уравнения. Решение их в Древнем Вавилоне было тесно связано с практическими задачами, в основном такими, как измерение площади земельных участков, земельные работы, связанные с военными нуждами; наличие этих познаний также обусловлено развитием математики и астрономии вообще. Были известны способы решения как полных, так и неполных квадратных уравнений. Приведём примеры квадратных уравнений, решавшихся в Древнем Вавилоне, используя современную алгебраическую запись:

$x^2+x=\frac{3}{4}$ $\qquad$ $x^2-x=14\frac{1}{2}$

Правила решения квадратных уравнений во многом аналогичны современным, однако в вавилонских текстах не зафиксированы рассуждения, путём которых эти правила были получены.

КВАДРАТНЫЕ УРАВНЕНИЯ В ГРЕЦИИ

В «Арифметике» Диофанта нет систематического изложения алгебры, однако в ней содержится систематизированный ряд задач, сопровождаемых объяснениями и решаемых при помощи составления уравнений разных степеней.

При составлении уравнений Диофант для упрощения решения умело выбирает неизвестные. Вот, к примеру, одна из его задач.

Задача 11. «Найти два числа, зная, что их сумма равна 20, а произведение - 96»

Диофант рассуждает следующим образом: из условия задачи вытекает, что искомые числа не равны, так как если бы они были равны, то их произведение равнялось бы не 96, а 100. Таким образом, одно из них будет больше половины их суммы, т.е. 10 + x, другое же меньше, т.е. 10 - x. Разность между ними 2x.

Отсюда уравнение:

$(10 + x)(10 - x) = 96$

$100 - x^2 = 96$

$x^2 - 4 = 0$

Отсюда $x = 2$, $x = -2$ для Диофанта не существует, так как греческая математика знала только положительные числа.

КВАДРАТНЫЕ УРАВНЕНИЯ В ИНДИИ

Задачи на квадратные уравнения встречаются в астрономическом тракте «Ариабхаттиам», составленном в 499 г. индийским математиком и астрономом Ариабхаттой. Другой индийский ученный, Брахмагупта (VII в.), изложил общее правило решения квадратных уравнений, приведенных к единой канонической форме: $ax^2 + bx = c$, $a > 0$.

В уравнении коэфиценты, кроме a, могут быть и отрицательными. Правило Брахмагупты по существу совпадает с нашим. В Древней Индии были распространены публичные соревнования в решении трудных задач. В одной из старинных индийских книг говорится по поводу таких соревнований следующее: «Как солнце блеском своим затмевает звезды, так ученый человек затмит славу другого в народных собраниях, предлагая и решая алгебраические задачи». Задачи часто облекались в стихотворную форму.

Вот одна из задач знаменитого индийского математика XII в. Бхаскары.

Задача.

«Обезьянок резвых стая
Власть поевши, развлекалась.
Их в квадрате часть восьмая
На поляне забавлялась.

А двенадцать по лианам…
Стали прыгать, повисая…
Сколько ж было обезьянок,
Ты скажи мне, в этой стае?»

Соответствующее задаче уравнение:

$(\frac{x}{8})^2 + 12 = x$

Бхаскара пишет под видом: $x^2 - 64x = -768$ и, чтобы дополнить левую часть этого уравнения до квадрата, прибавляет к обеим частям 32^2, получая затем:

$x^2 - 64x + 32^2 = -768 + 1024, (x - 32)^2 = 256,$

$x - 32 = \pm 16,$

$x1 = 16, \ x2 = 48.$

КВАДРАТНЫЕ УРАВНЕНИЯ В ЕВРОПЕ В 13-17 ВЕКАХ

В Европе были впервые изложены в «Книге абака», написанной в 1202 г. итальянским математиком Леонардо Фибоначчи. Автор разработал самостоятельно некоторые новые алгебраические примеры решения задач и первый в Европе подошел к введению отрицательных чисел. Его книга способствовала распространению алгебраических знаний не только в Италии, но и в Германии, Франции и других странах Европы. Многие задачи из « Книги абака» переходили почти во все европейские учебники XVI - XVII вв. и частично XVIII.

Общее правило решения квадратных уравнений, приведенных к единому каноническому виду:

$x^2 + bx = c$, при всевозможных комбинациях знаков коэффициентов b, c было сформулировано в Европе лишь в 1544 г. М. Штифелем.

Вывод формулы решения квадратного уравнения в общем виде имеется у Виета, однако Виет признавал только положительные корни. Итальянские математики Тарталья, Кардано, Бомбелли среди первых в XVI в. учитывают, помимо положительных, и отрицательные корни. Лишь в XVII в. Благодаря труда Жирара, Декарта, Ньютона и других ученых способ решения квадратных уравнений принимает современный вид.

КВАДРАТНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Квадра́тное уравне́ние — алгебраическое уравнение общего вида

$ax^2 + bx + c = 0,$

где x — свободная переменная, a, b, c — коэффициенты, причём $a=0$.

Выражение ax^2+bx+c называют квадратным трёхчленом.

Корень — это значение переменной x, обращающее квадратный трёхчлен в ноль, а квадратное уравнение в верное равенство.

Элементы квадратного уравнения имеют собственные названия:

a называют первым или старшим коэффициентом,

b называют вторым или коэффициентом при x,

c называют свободным членом.

ВИДЫ КВАДРАТНЫХ УРАВНЕНИЙ

Приведённым называют квадратное уравнение, в котором старший коэффициент равен единице. Такое уравнение может быть получено делением всего выражения на старший коэффициент a:

$x^2 + px + q = 0$, $p=\frac{b}{a}$, $q=\frac{c}{a}$

Полным называют такое квадратное уравнение, все коэффициенты которого отличны от нуля.

$ax^2+bx+c=0$

Неполным называется такое квадратное уравнение, в котором хотя бы один из коэффициентов кроме старшего (либо второй коэффициент, либо свободный член) равен нулю.

1. $ax^2+c=0$, где $c\neq0$

2. $ax^2+bx=0$, где $b\neq0$

3. $ax^2=0$

СПОСОБ 1

Разложение левой части на множители

$8x^2+10x+3=0$

$8x^2+4x+6x+3=0$

$4x(2x+1)+3(2x+1)=0$

$(2x+1)(4x+3)=0$

$2x+1=0; 4x+3=0$

$x1=-\frac{1}{2}$ $\quad$ $x2=-\frac{3}{4}$

Ответ: $x1=-\frac{1}{2}$, $x2=-\frac{3}{4}$

СПОСОБ 2

Метод выделения полного квадрата

$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$

$(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$

x2-10x+16=0

x2-2*5x+25-25+16=0

(x-5)2-9=0

(x-5)2=9

x-5=-3;x-5=3

x1=2   x2=8

Ответ:x1=2 ,x2=8

3 СПОСОБ

$ax^2+bx+c=0$

$D=b^2-4ac$

1. $D=0$- один корень
2. $D>0$- 2 корня
3. $D<0$- корней нет

b– нечетное число

$D=b^2-4ac$

$x1{,}2=\frac{-b\pm\sqrt{D}}{2a}$

$2x^2+3x-5=0$

$D=3^2-4*2*(-5)=9+40=49$

$D>0$

$x1{,}2=\frac{-b\pm\sqrt{D}}{2a}=\frac{-3\pm7}{4}$

$x1=-2\frac{1}{2}$

$x2=1$

Ответ: $x1=-2\frac{1}{2}, x2=1$

b–четное

$D=k^2-ac$

$x1{,}2=\frac{-k\pm\sqrt{D}}{a}$

$x2-4x-5=0$

$b=2*2\ k=2$

$D=2^2+5=9\ D>0$

$x1=2-\sqrt{9}=-1$

$x2=2+\sqrt{9}=5$

Ответ: $x1=-1, x2=5$

4 СПОСОБ

По сумме коэффициентов квадратного уравнения

$ax^2+bx+c=0$ $a=0$

1. Если $a+b+c=0$, то $x1=1$, $x2=\frac{c}{a}$

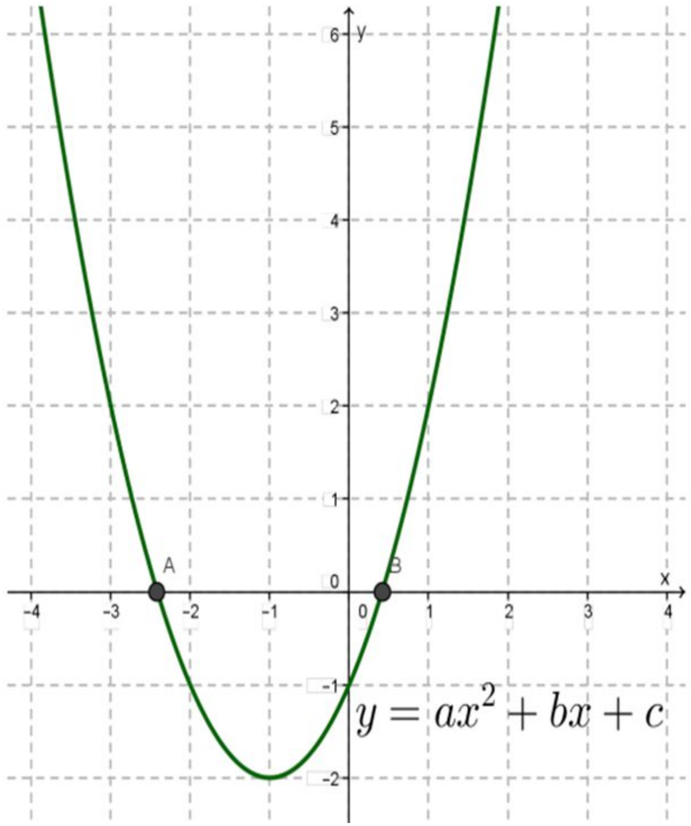
2. Если $a-b+c=0$, то $x1=-1$, $x2=-\frac{c}{a}$

$5x^2-7x+2=0$

т.к. $5-7+2=0$, то $x1=-1$, $x2=-\frac{2}{5}$

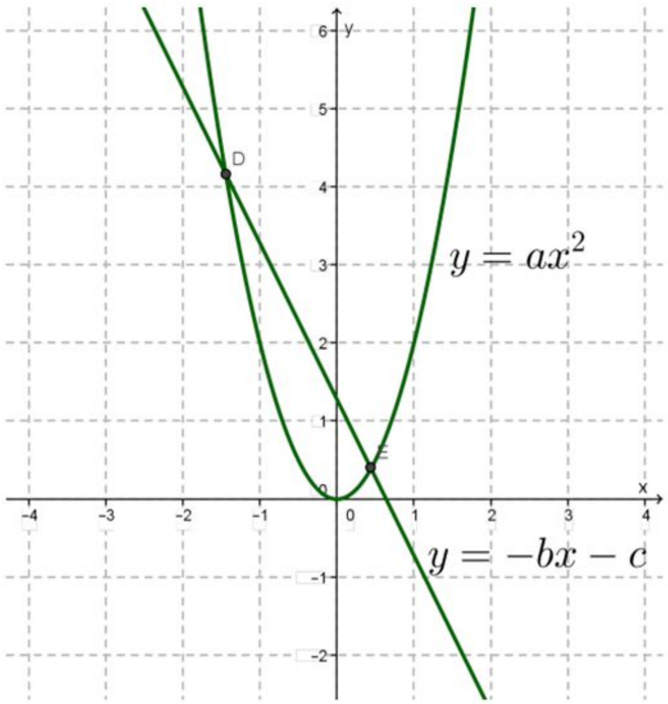
Ответ: $x1=-1$, $x2=-\frac{2}{5}$

5 СПОСОБ



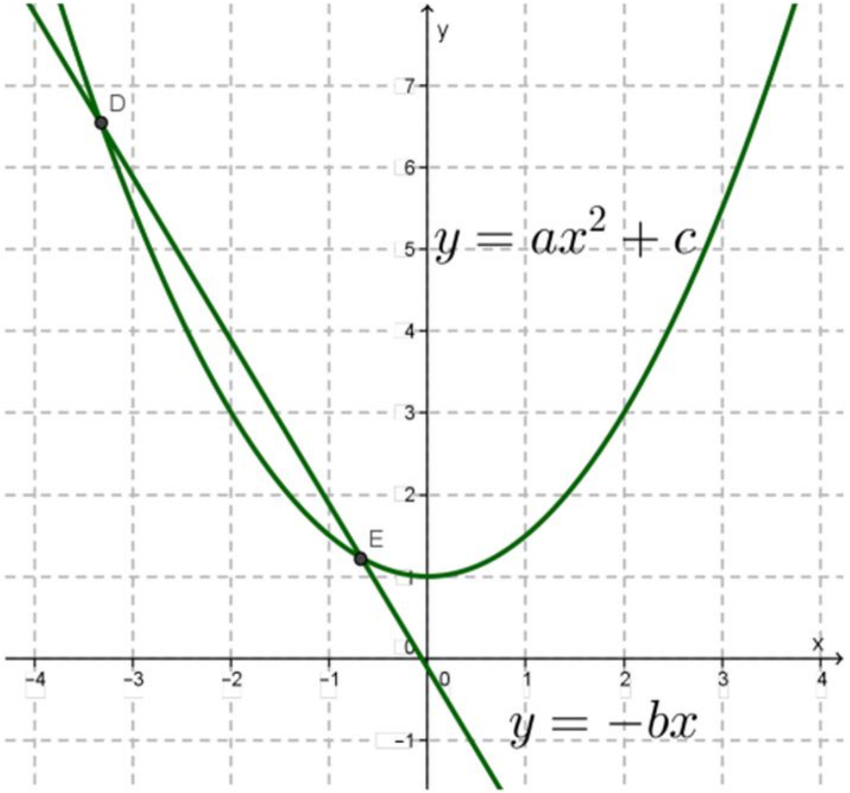
Строят график функции $y=ax^2+bx+c$ и находят точки его пересечения с осью x.

6 СПОСОБ



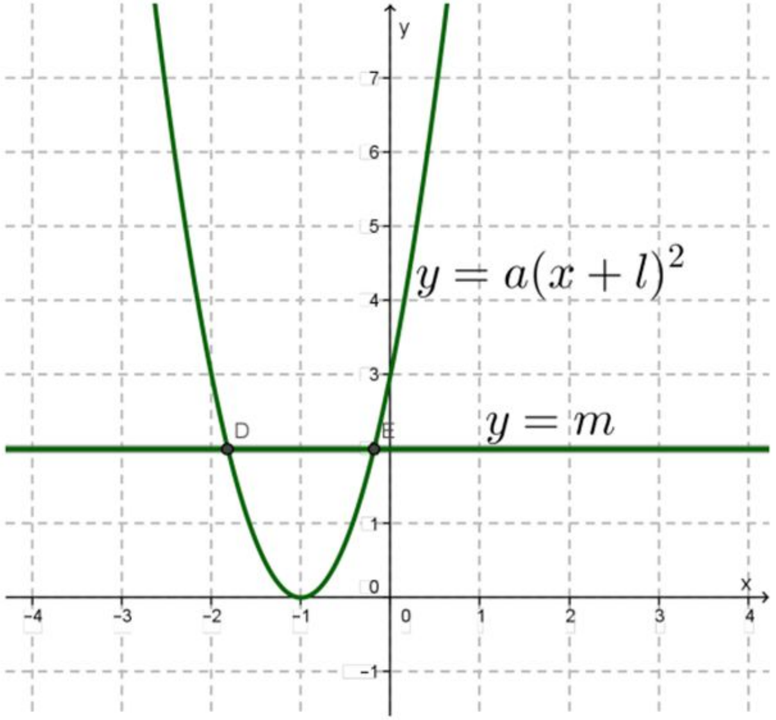
Преобразуют уравнение к виду $ax^2=-bx-c$, строят параболу $y=ax^2$ и прямую $y=-bx-c$, находят точки их пересечения (корнями уравнения служат абсциссы точек пересечения, если, разумеется, таковые имеются).

7 СПОСОБ



Преобразуют уравнение к виду $ax^2+c=-bx$, строят параболу $y=ax^2+c$ и прямую $y=-bx$ (она проходит через начало координат); находят точки их пересечения.

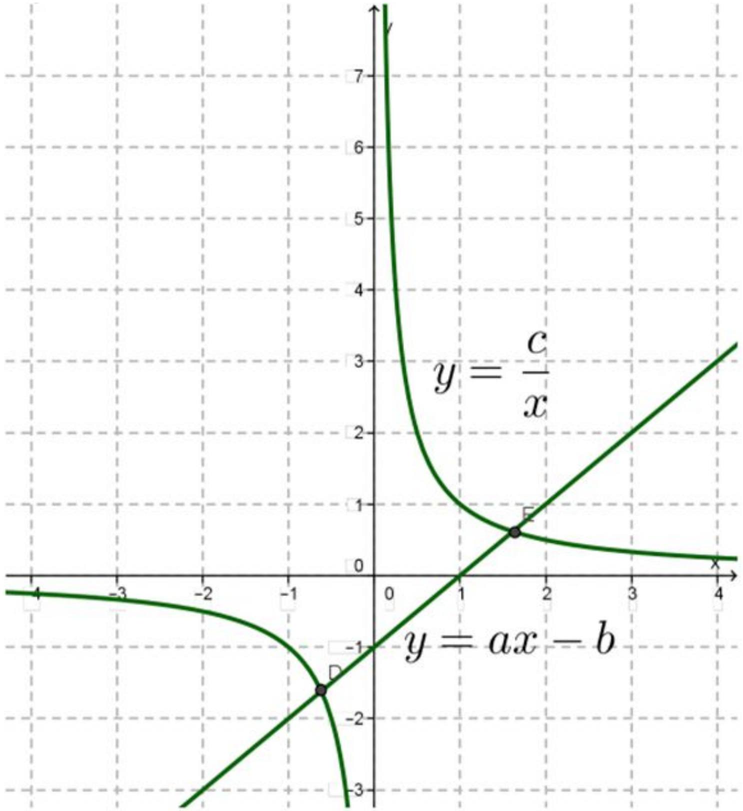
8 СПОСОБ



Применяя метод выделения полного квадрата, преобразуют уравнение к виду $a(x+l)^2+m=0$ и далее $a(x+l)^2=-m$.

Строят параболу $y=a(x+l)^2$ и прямую $y=m$, параллельную оси x; находят точки пересечения параболы и прямой.

9 СПОСОБ



Преобразуют уравнение к виду $\frac{ax^2}{x}+\frac{bx}{x}+\frac{c}{x}=0$, т.е. $ax+b+\frac{c}{x}=0$ далее $\frac{c}{x}=-ax-b$.

Строят гиперболу $y=\frac{c}{x}$ (это гипербола при условии, что $c\neq0$) и прямую $y=-ax-b$; находят точки их пересечения.

ФРАНСУА ВИЕТ

Франсуа́ Вие́т, сеньор де ля Биготье— французский математик, основоположник символической алгебры.

ТЕОРЕМА ВИЕТА

Теорема Виета.

Если $x1$ и $x2$ — корни квадратного уравнения $ax^2+bx+c=0$,то

$$\begin{cases} x1 + x2 = \frac{b}{a} \\ x1x2 = \frac{c}{a} \end{cases}$$

В частном случае, если $a=1$ (приведенная форма $x^2+px+q=0$), то

$$\begin{cases} x1 + x2 = -p \\ x1x2 = q \end{cases}$$

Кстати, запомнить теорему Виета помогает вот такой стишок:

Познакомили поэта

С теоремою Виета.

Оба корня он сложил,

Минус p он получил,

А корней произведенье

Дает q из уравнения.

10 СПОСОБ

Как известно, приведенное квадратное уравнение имеет вид

$x^2 + px + c = 0$.

Его корни удовлетворяют теореме Виета, которая при а =1 имеет вид

$x1*x2 = q$,

$x1 + x2 = - p$

Отсюда можно сделать следующие выводы (по коэффициентам p и q можно предсказать знаки корней).

а) Если сводный член q приведенного уравнения (1) положителен ($q > 0$), то уравнение имеет два одинаковых по знаку корня и это зависти от второго коэффициента p. Если $p < 0$, то оба корня отрицательны, если $p < 0$, то оба корня положительны.

Например,

$x^2 -3x + 2 = 0$; $x1 = 2$ и $x2 = 1$, так как $q = 2 > 0$ и $p = - 3 < 0$;

$x^2+8x + 7 = 0$; $x1 =-7$ и $x2 =-1$, так как $q = 7 > 0$ и $p= 8 > 0$.

б) Если свободный член q приведенного уравнения (1) отрицателен ($q< 0$).

Например,

$x^2 + 4x- 5 = 0$; $x1 = - 5$ и $x2 = 1$, так как $q= - 5< 0$;

$x^2- 8x- 9 = 0$; $x1 = 9$ и $x2 = - 1$, так как $q = - 9 < 0$ и $p = - 8 < 0$.

11 СПОСОБ

Способ «переброски».

Рассмотрим квадратное уравнение

$ax^2 + bx + c = 0$, где $a \neq 0$.

Умножая обе его части на а, получаем уравнение

$a^2x^2 + abx + ac = 0$.

Пусть $ax = y$, откуда $x = y/a$; тогда приходим к уравнению

$y^2 + by + ac = 0$,равносильно данному. Его корни y1 и y2 найдем с помощью теоремы Виета. Окончательно получаем x1 = $\frac{y1}{a}$и x1 =$\frac{y2}{a}$.

При этом способе коэффициент а умножается на свободный член, как бы перебрасывается к нему, поэтому его называют способом переброски. Этот способ применяют, когда можно легко найти корни уравнения, используя теорему Виета и, что самое важное, когда дискриминант есть точный квадрат.

Пример.

Решим уравнение $2x^2 - 11x + 15 = 0$.Решение. Перебросим коэффициент 2 к свободному члену, в результате получим уравнение

$y^2 - 11y + 30 = 0$

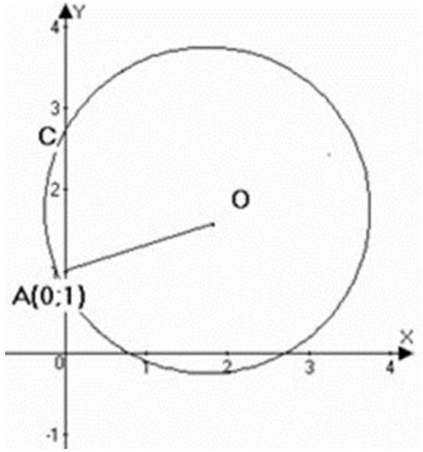
Согласно теореме Виета

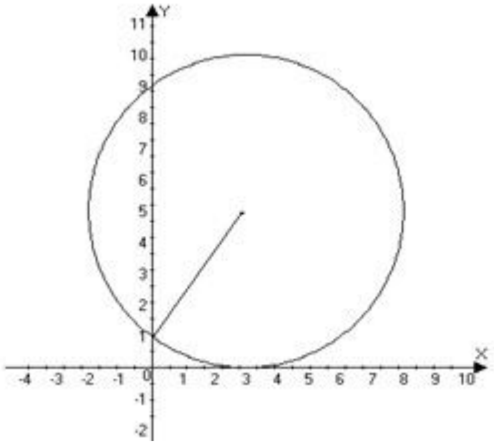
$\begin{cases} y1 = 5 \\ y2 = 6 \end{cases} \begin{cases} x1 = 5/2 \\ x2 = 6/2 \end{cases} \begin{cases} x1 = 2{,}5 \\ x2 = 3 \end{cases}$

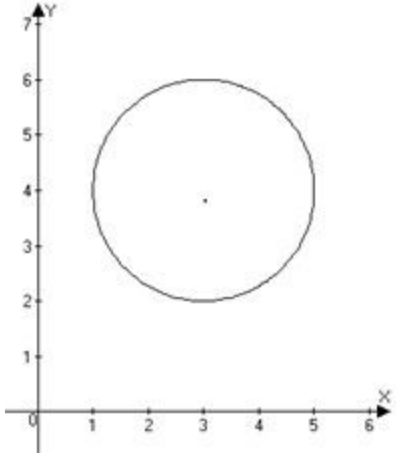
12 СПОСОБ

Допустим, что искомая окружность пересекает ось абцисс в точках D(x2;0) и B(x1;0), где x1 и x2 корни уравнения $ax^2+bx+c=0$ проходит через точки A(0;1) и C(0;y) на оси координат. Тогда по теореме о секущих имеем OB*OD=OA*OC, откуда $OC=\frac{OB*OD}{OA}=\frac{x1*x2}{1}=\frac{c}{a}$. По теореме Виета $OC=|y0|$, $C(0;\frac{c}{a})$.

Центр окружности находиться в точке пересечения перпендикуляров SF и SK, восстановленных в серединах хорд AC и BD, поэтому $SK=\frac{x1+x2}{2}=\frac{\frac{-b}{a}}{2}=-\frac{b}{2a}$; SK=y , $SF=\frac{y1+y2}{2}=\frac{a+c}{2a}$,SF=x. При этом возможны случаи.







$AS>SK$ или $R>\frac{a+c}{2a}$ $AS=SK$ или $R=\frac{a+c}{2a}$ $AS<SK$ или $R<\frac{a+c}{2a}$

Два корня x1 и x2 Один корень Корней нет

ВЫВОД

Мы изучили все 12 способов решения квадратных уравнений и выяснили, что наиболее легкие и быстрые способы: через дискриминант, по сумме коэффициентов, через теорему Виета. Дискриминант и теорему Виета мы проходим по школьной программе. Также мы доказали, что существует не 2 способа решений, а целых 12. Нам пришлось воспользоваться нашими знаниями по геометрии.