Леонард Эйлер и его вклад в математическую науку.

Краткие биографические сведения о Леонардо Эйлере.

математик 18 века - так часто называют Эйлера(1707-1789). Он родился в маленькой тихой Швейцарии. Примерно в то же время переселилась в Базель из Голландии семья Бернулли: уникальное созвездие научных талантов во главе с братьями Якобом и Иоганном Идеальный математик 18 века - так часто называют Эйлера(1707-1789). Он родился в маленькой тихой Швейцарии. Примерно в то же время переселилась в Базель из Голландии семья Бернулли: уникальное созвездие научных талантов во главе с братьями Якобом и Иоганном. По воле случая юный Эйлер попал в эту компанию. Но когда ребята подросли, выяснилось, что в Швейцарии Идеальный математик 18 века - так часто называют Эйлера(1707-1789). Он родился в маленькой тихой Швейцарии. Примерно в то же время переселилась в Базель из Голландии семья Бернулли: уникальное созвездие научных талантов во главе с братьями Якобом и Иоганном. По воле случая юный Эйлер попал в эту компанию. Но когда ребята подросли, выяснилось, что в Швейцарии не хватит места для их умов. Зато в России была учреждена в 1725 году Академия Наук. Русских ученых не хватало, и тройка друзей отправилась туда. Поначалу Эйлер расшифровывал дипломатические депеши, обучал молодых моряков высшей математике и астрономии, составлял таблицы для артиллерийской стрельбы и таблицы движения Луны.

В 26 лет Эйлер был избран российским академиком, но через 8 лет он переехал из Петербурга в Берлин. Там "король математиков" работал с 1741 по 1766 год; потом он покинул Берлин и вернулся в Россию. Удивительно: слава Эйлера не закатилась и после того, как ученого поразила слепота (вскоре после переезда в Петербург). В 1770-е годы вокруг Эйлера выросла Петербургская математическая школа, более чем наполовину состоявшая из русских ученых. Тогда же завершилась публикация главной его книги - "Основ дифференциального и интегрального исчисления".

В начале сентября 1783 Эйлер почувствовал легкое недомогание.

Л. Эйлер

Живший в двух странах – в Германии и в России – Эйлер покорил весь мир своим непревзойденным умом и уникальной трудоспособностью.

“Деятельность Эйлера многогранна и разностороння. Он занимался почти всем, что интересовало в то время математиков.”

С.И. Вавилов

“Лучше несколько потерпеть от сурового климата страны льдов, в которой приветствуют муз, чем умереть от голода в стране с умеренным климатом, в которой муз презирают и обижают”.

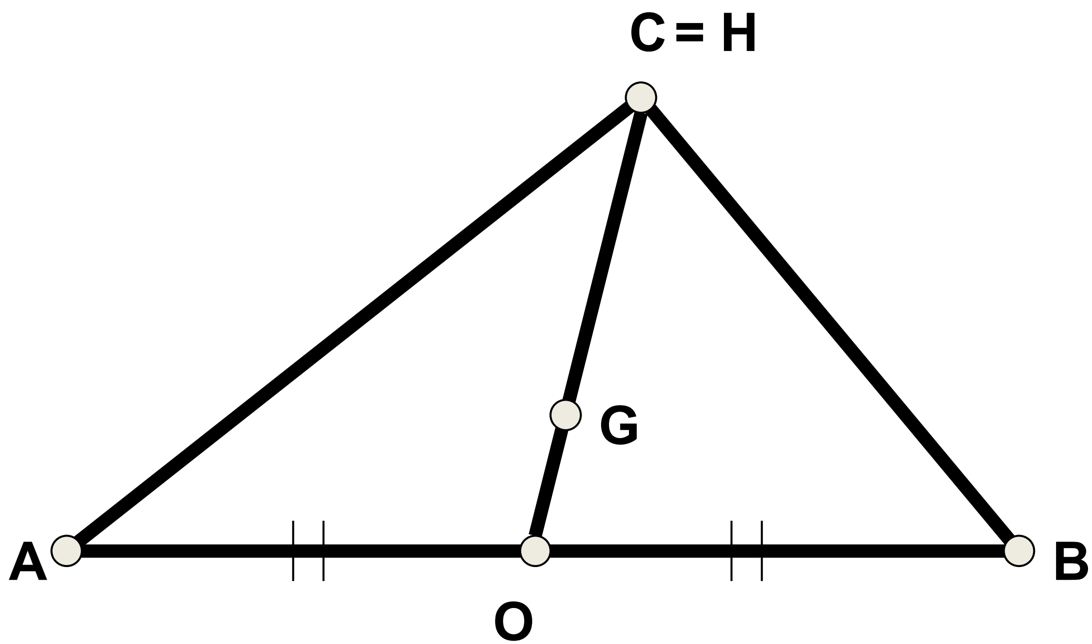
Иоганн Бернулли

“Читайте, читайте Эйлера, он наш общий учитель”.

П. Лаплас

Прямая Эйлера.

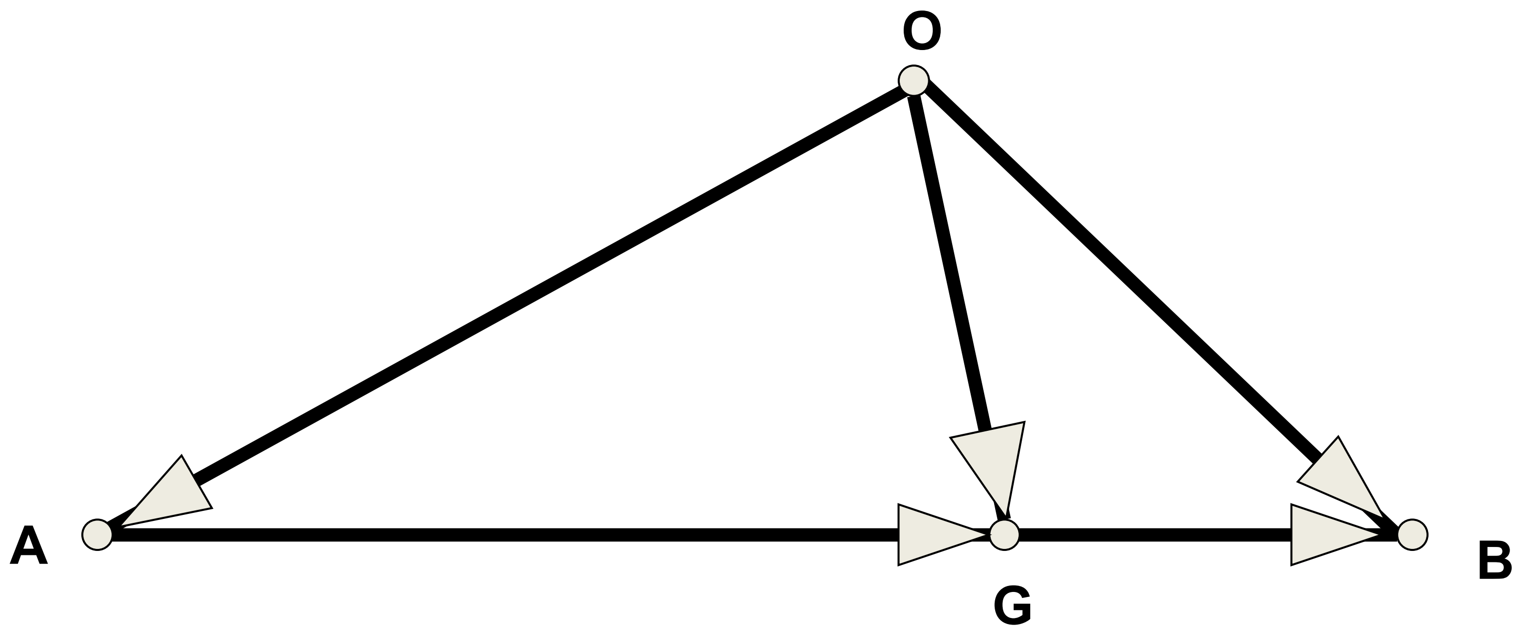
Прямая Эйлера – прямая, которой принадлежат ортоцентр (точка пересечения высот) , центроид (точка пересечения медиан) и центр описанной окружности треугольника.



Дан прямоугольный треугольник ACB. Проведем медиану CO. Середина O гипотенузы AB является центром описанной около него окружности. Центроид G делит медиану CO в отношении 2:1, считая от вершины C. Катеты AC и BC являются высотами треугольника, поэтому вершина C прямого угла совпадает с ортоцентром H треугольника. Таким образом, точки O,G,H лежат на одной прямой, причем OH=3OG.

Прямая Эйлера.

Деление отрезка в данном отношении.



Пусть A,O, B – данные точки плоскости, и известно, что точка G делит отрезок AB в отношении k: AG/GB = k. Зададим вектора $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OG}$, $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{AG}$, $\overrightarrow{GB}$.

Выразим вектор $\overrightarrow{OG}$ через векторы $\overrightarrow{OA}$ и $\overrightarrow{OB}$. Для этого подставим в равенство $\overrightarrow{AG}=k * \overrightarrow{GB}$ выражения всех векторов через $\overrightarrow{OG}$, $\overrightarrow{OA}$ и $\overrightarrow{OB}$ (по правилу треугольника): $\overrightarrow{OG}-\overrightarrow{OA}=k(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OG})$.

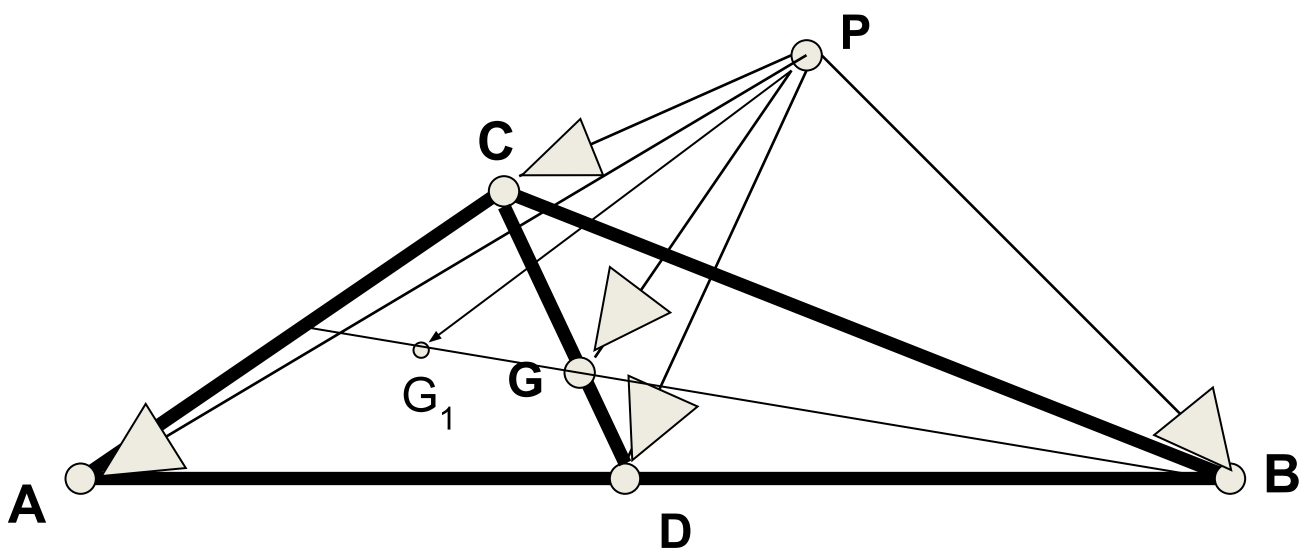
Решая это уравнение относительно $\overrightarrow{OG}$, получим: $\mathbf{\overrightarrow{OG}= (\overrightarrow{OA}+k\overrightarrow{OB})/(k+1)}$. (1)

Например, если G – середина отрезка AB, то k=1 и $\overrightarrow{OG}= 0,5(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB})$.

Прямая Эйлера

Теорема 1. Медианы треугольника ABC пересекаются в одной точке G и делятся ею в отношении 2:1, считая от вершины, причем 33PG3PG=3PG=PA3PG=PA+3PG=PA+PB3PG=PA+PB+3PG=PA+PB+PC3PG=PA+PB

(2) где P – любая точка плоскости или пространства.



Доказательство. Возьмем на медиане CD треугольника ACB точку G, определяемую соотношением |CG|:|GD|=2:1. Возьмем произвольную точку P. Зададим вектора: $\overrightarrow{PG}$, $\overrightarrow{PC}$, $\overrightarrow{PB}$, $\overrightarrow{PA}$. Согласно формуле (1),

$\overrightarrow{PG} = (\overrightarrow{PC}+2\overrightarrow{PD})$, $\overrightarrow{PD} = 0{,}5(\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB})$, откуда $3\overrightarrow{PG} = (\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{PC})$.

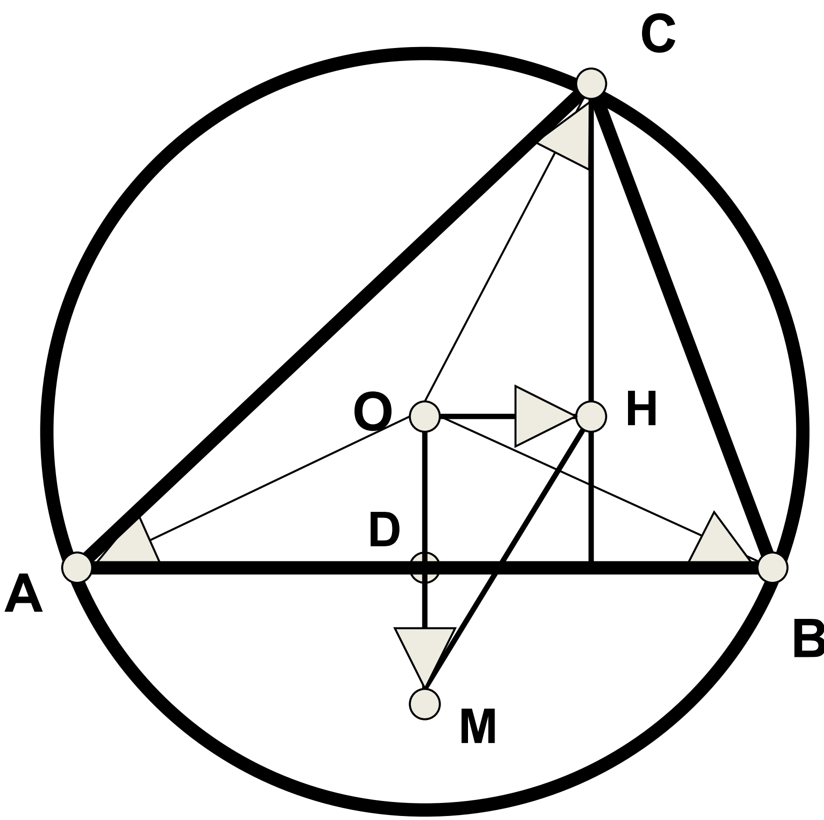
Вычисляя вектор $\overrightarrow{PG_1}$ с концом в точке G_1, делящей любую из двух других медиан треугольника в отношении 2:1 (считая от вершины), мы получим то же самое выражение: $3\overrightarrow{PG1}= (\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{PC})$, Поэтому $\overrightarrow{PG}=\overrightarrow{PG1}$, и точка G совпадает с точкой G1. Следовательно, все три медианы треугольн пересекаются в одной точке G, определяемой соотношением (2).

Прямая Эйлера

Теорема о высотах произвольного треугольника.

Теорема 2. Высоты треугольника ABC пересекаются в одной точке H, причем

OHOH= OH= OAOH= OA + OH= OA + OBOH= OA + OB + OH= OA + OB + OCOH= OA + OB + OC (3)



Доказательство. Пусть ACB – треугольник, отличный от прямоугольного. Зададим вектора $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OC}$. Найдем сумму векторов $\overrightarrow{OA}$ и $\overrightarrow{OB}$. Для этого построим точку M, симметричную O относительно стороны AB, тогда (по правилу параллелограмма) $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}$. Затем построим точку H, для которой (по правилу параллелограмма) $\overrightarrow{OH} = \overrightarrow{OM} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$, и докажем, что точка H и есть ортоцентр треугольника ABC.

Действительно, по построению прямые CH и OM параллельны, OM – серединный перпендикуляр к отрезку AB, следовательно, прямая CH также перпендикулярна к прямой AB, и точка H лежит на высоте треугольника ABC, проведенной из вершины C. Если повторить построение, начиная с векторов $\overrightarrow{OA}$ и $\overrightarrow{OC}$, то получится та же точка H, но те же рассуждения показывают, что теперь точка H лежит на высоте треугольника, проведенной из вершины B. Аналогично получим, что точка H лежит на высоте, проведенной из вершины A. Следовательно, высоты треугольника ABC пересекаются в точке H, определяемой соотношением (3).

Прямая Эйлера

Теорема 3. Центр O описанной окружности, центроид G и ортоцентр H любого треугольника лежат на одной прямой, причем точка G лежит между точками O и H и OG:GH = 1:2.

Доказательство. По теореме 1

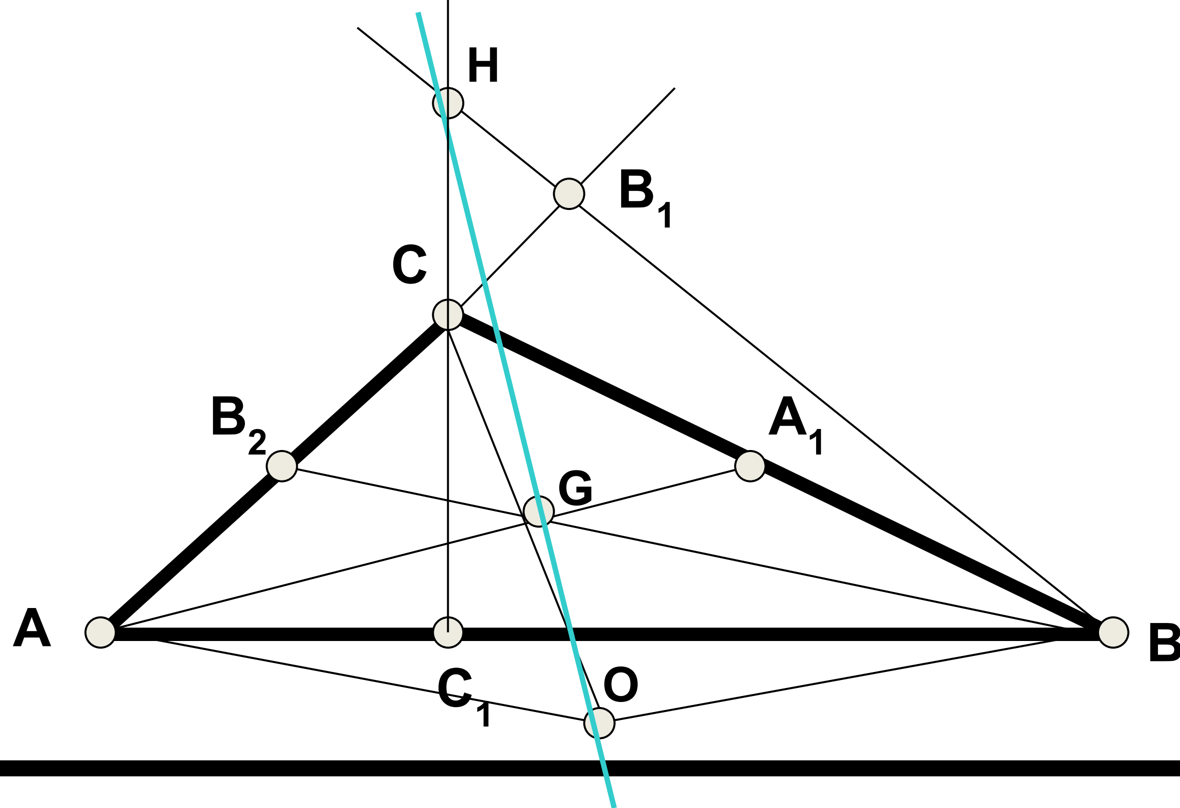
$3\overrightarrow{OG} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$.

Сравнивая это равенство с равенством (3), получим

$\overrightarrow{OH} = 3\overrightarrow{OG}$.

Следовательно, векторы $\overrightarrow{OH}$ и $\overrightarrow{OG}$, имеющие общее начало O, расположены на одной прямой и |OG| : |GH| = 1 : 2.

Прямая, на которой лежат точки O, G и H, называется прямой Эйлера.



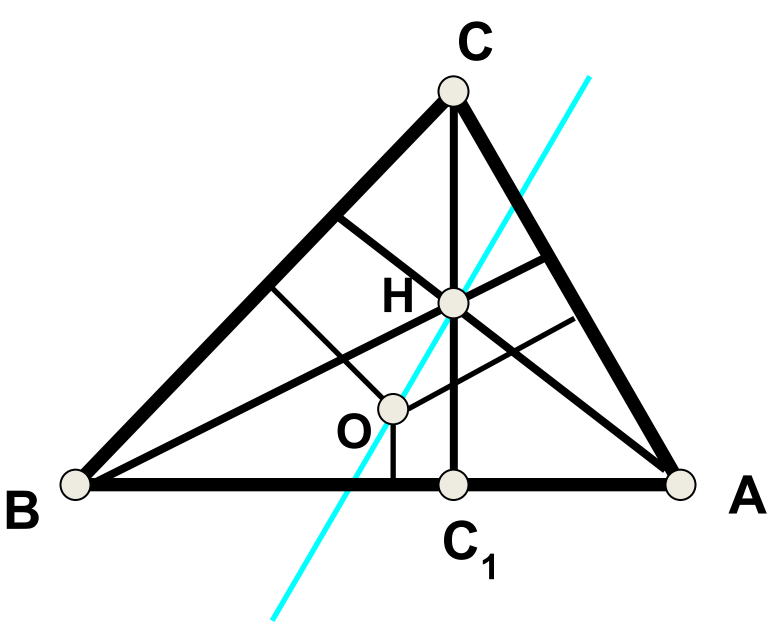
Прямая Эйлера

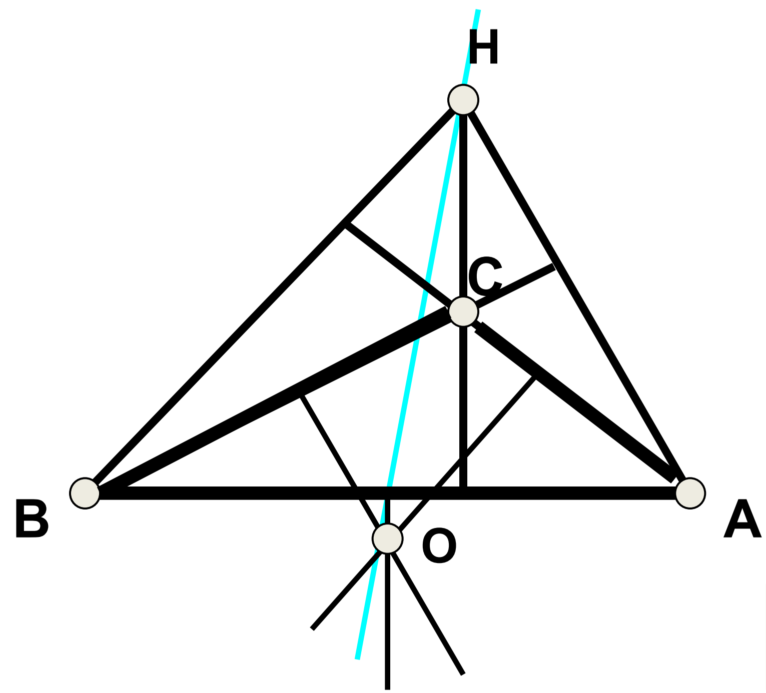
Задача

Какие стороны пересекает прямая Эйлера в остроугольном и тупоугольном треугольниках?

Решение

Пусть $AB > BC > CA$. Легко проверить, что для остроугольного и тупоугольного треугольников точка H пересечения высот и центр O описанной окружности расположены именно так, как на рис. (т. е. для остроугольного треугольника точка O лежит внутри треугольника BHC_1, а для тупоугольного точки O и B лежат по одну сторону от прямой CH). Поэтому в остроугольном треугольнике прямая Эйлера пересекает наибольшую сторону AB и наименьшую сторону AC, а в тупоугольном треугольнике — наибольшую сторону AB и среднюю по длине сторону BC.





Теорема Эйлера о многогранниках.

(4)Теорема Эйлера:

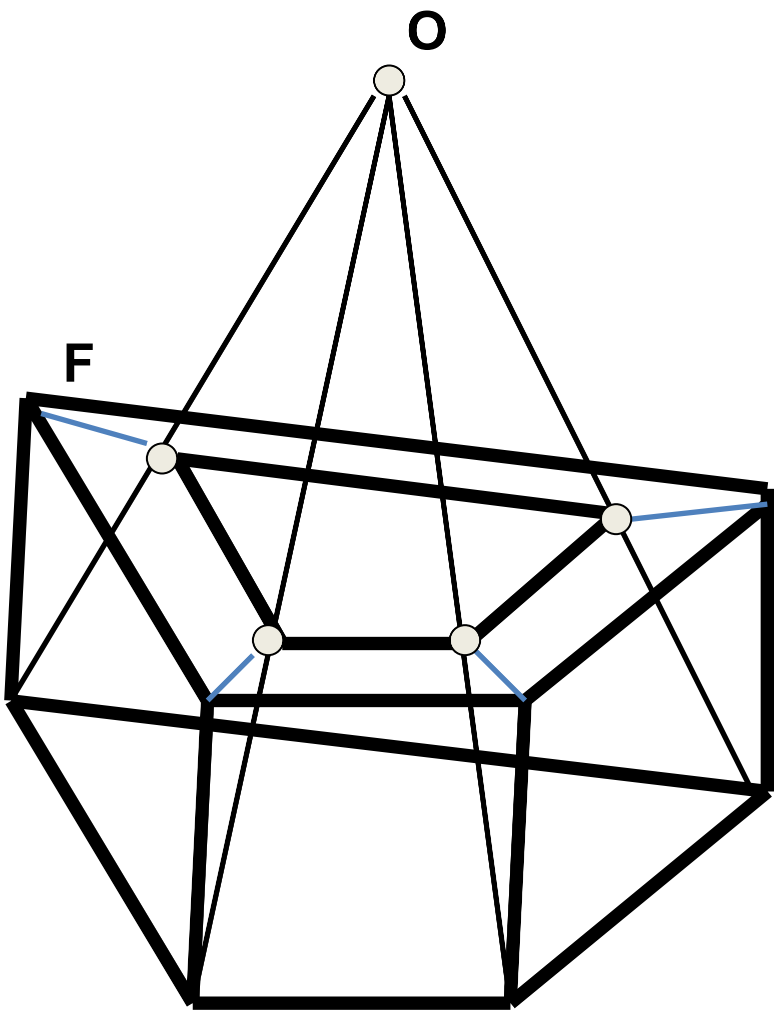
Пусть В - число вершин выпуклого многогранника, Р - число его ребер и Г - число граней. Тогда верно равенство

В - Р + Г = 2

Число х = В - Р + Г называется эйлеровой характеристикой многогранника. Согласно теореме Эйлера, для выпуклого многогранника эта характеристика равна 2. То, что эйлеровая характеристика равна 2 для многих многогранников, видно из следующей таблицы:

Многогранник	**В**	**Р**	**Г**	**Х**
Тетраэдр	**4**	**6**	**4**	**2**
Куб	**8**	**12**	**6**	**2**
n-угольная пирамида	**n+1**	**2n**	**n+1**	**2**
n-угольная призма	**2n**	**3n**	**n+2**	**2**

Теорема Эйлера о многогранниках.



Имеется много доказательств теоремы Эйлера. В одной из них используется формула для суммы углов многоугольника. Рассмотрим это доказательство. Возьмем снаружи многогранника точку O вблизи от какой-либо грани F и спроектируем остальные грани на F из центра O . Их проекции образуют разбиение грани F на многоугольники. Подсчитаем двумя способами сумму α углов всех полученных многоугольников и самой грани F. Сумма угов n-угольника равна π(n - 2). Сложим эти числа для всех граней (включая грань F). Сумма членов вида πn равна общему числу сторон всех граней, т.е. 2Р- ведь каждое из Р рёбер принадлежит двум граням. А так как у нас всего Г слагаемых, α = π(2Р - 2Г). Теперь найдем сумму углов при каждой вершине разбиения и сложим эти суммы. Если вершина лежит внутри грани F, то сумма углов вокруг нее равна 2π. Таких вершин В-k, где k- число вершин самой грани F, а значит, их вклад равен 2π(В - k). Углы при вершинах F считаются в сумме дважды (как углы F и как углы многоугольников разбиения); их вклад равен 2π(k - 2). Таким образом, α = 2π(В - k) + 2π(k - 2) = 2π(В - 2). Приравнивая два результата и сокращения на 2π, получаем требуемое равенство

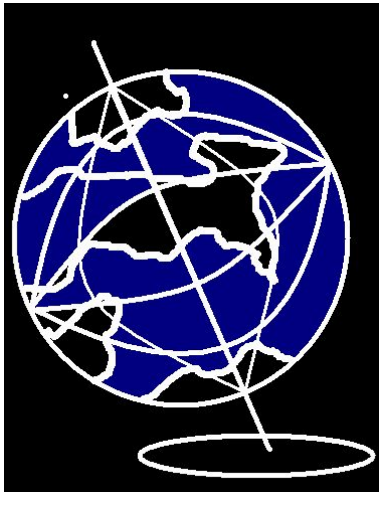
Р - Г = В - 2

Теорема Эйлера о многогранниках.

Некоторые следствия из теоремы.

1. Р + 6≤ 3В и Р + 6≤ 3Г;

Доказательство:
Перепишем соотношение Эйлера дважды, один раз в виде
Р + 2 = В + Г
И другой раз в виде
4 = 2В - 2Р + 2Г
Складывая эти равенства, получаем
Р + 6 = 3В + 3Г - 2Р
Так как у каждой грани многогранника не менее трех сторон, то 3Г≤ 2Р.
Отсюда сразу получаем Р + 6≤ 3В.
Утверждение доказано.

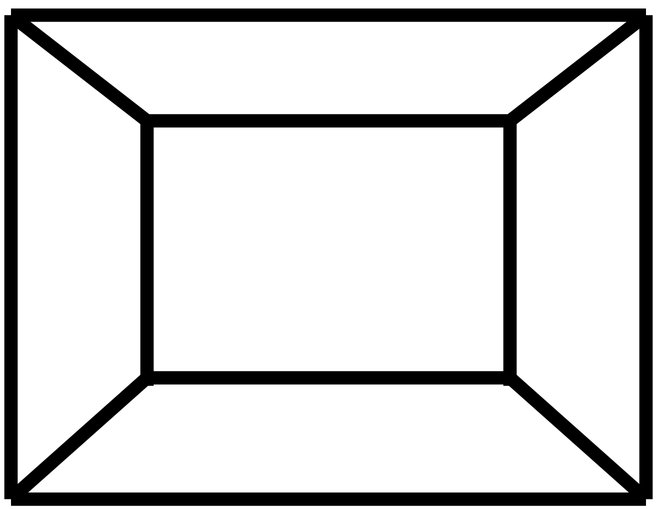


2. Сумма плоских углов всех граней многогранника равна 2πВ- 4π. (Теорема Декарта)

Доказательство:
Обозначим через Гi число i-угольных граней в многограннике М. Ясно, что
$Г = Г_3 + Г_4 + Г_5 + \dots$
Ясно также, что каждая i-угольная грань содержит i ребер многогранника. С другой стороны, каждое ребро многогранника принадлежит в точности двум граням. Поэтому в сумме 3Г3 + 4Г4 + 5Г5 + … каждое ребро многогранника подсчитано, причем подсчитано дважды. Отсюда имеем
$2Р = 3Г_3 + 4Г_4 + 5Г_5 + \dots$
Рассмотрим теперь сумму S плоских углов многогранника:
$S = Г_3 \cdot π + Г_4 \cdot 2π + Гi \cdot (i -2)π + \dots$
С учетом полученных соотношений и теоремы Эйлера соотношение можно переписать так:
$S = Г_3 (3 - 2)π + Г_4 (4 -2)π + Гi (i - 2)π + \dots = 2Рπ - 2Гπ = 2Вπ - 4π.$

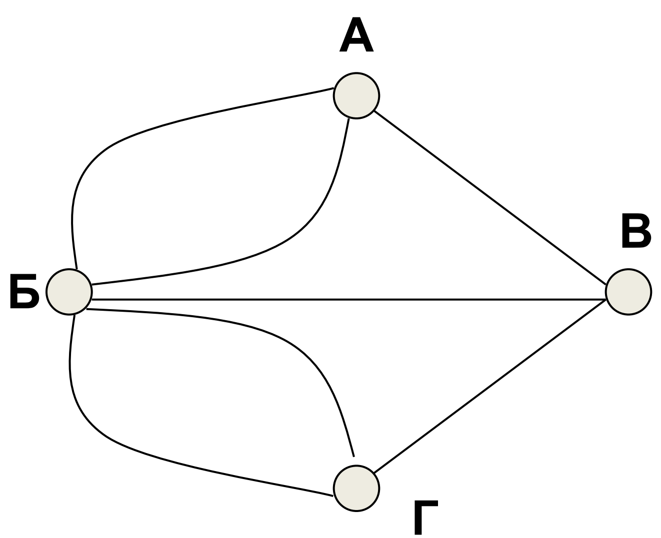
Теорема Эйлера о многогранниках.

Задача. Доказать [теорему Эйлера](#)для плоского графа. (Граф называется плоским, если его можно расположить на плоскости так, чтобы ребра пересекались только в вершинах.)



Если в графе есть цикл, то есть внутренняя грань. Возьмем цикл, ограничивающий внутреннюю грань. Выкинем из него одно ребро. Граф остался связным, плоским. Число Р уменьшилось на один, но и число Г уменьшилось на один, т.к. грань, которая была по сторону от стертого ребра стерлась. Таким образом, число В+Г-Р не изменилось. Если в графе опять есть цикл мы поступаем так же. Т.к. ребер в графе конечное число, а количество ребер постепенно уменьшается, то когда-нибудь наше стирание его рёбер закончится. Т.е. мы придем к ситуации, что число В+Г-Р не изменилось по сравнению с первоначальным, граф остался связным, плоским и циклов в графе нет. => граф стал деревом, а грань осталась одна - внешняя. Продолжаем стирать грани. Число Р уменьшается на один, число В уменьшается на один, число В+Г-Р не меняется. Полученный граф снова дерево, он плоский и связный, а число вершин у него уменьшилось => поступаем так, пока не останется две вершины, соединенные ребром. Тут уже не сложно посчитать, что В+Г-Р=2+1-1=2, а число В+Г-Р не менялось => для начального графа оно тоже 2.

Теория графов и задача Эйлера.



Издавна среди жителей Кёнигсберга была распространена такая загадка: как пройти по всем мостам, не проходя ни по одному из них дважды? Многие кёнигсбержцы пытались решить эту задачу, как теоретически, так и практически, во время прогулок. Но никому это не удавалось, однако доказать, что это даже теоретически невозможно.

В 1736В 1736 году задача о семи мостах заинтересовала выдающегося математика, члена Петербургской академии наук Леонарда Эйлера, Эйлер пишет о том, что он смог найти правило, пользуясь которым легко определить есть ли у неё решение.

На упрощённой схеме части города (графе) мостам соответствуют линии (рёбра графа), а частям города — точки соединения линий (вершины графа). В ходе рассуждений Эйлер пришёл к следующим выводам:

Число нечётных вершин (вершин, к которым ведёт нечётное число рёбер) графа всегда чётно. Невозможно начертить граф, который имел бы нечётное число нечётных вершин.

Если все вершины графа чётные, то можно, не отрывая карандаша от бумаги, начертить граф, при этом можно начинать с любой вершины графа и завершить его в той же вершине.

Граф с более чем двумя нечётными вершинами невозможно начертить одним росчерком.

Граф кёнигсбергских мостов имел четыре нечётные вершины, следовательно невозможно пройти по всем мостам, не проходя ни по одному из них дважды.

Теория графов и задача Эйлера.

Теорема Эйлера. (5)

Пусть на плоскости задано m точек и n попарно непересекающихся дуг, каждая из которых соединяет какие-либо две данные точки и не проходит через остальные m–2 точки, и пусть эти дуги делят плоскость на l областей. Если из каждой данной точки в любую из остальных можно попасть, двигаясь по этим дугам, то

$$m - n + l = 2.$$

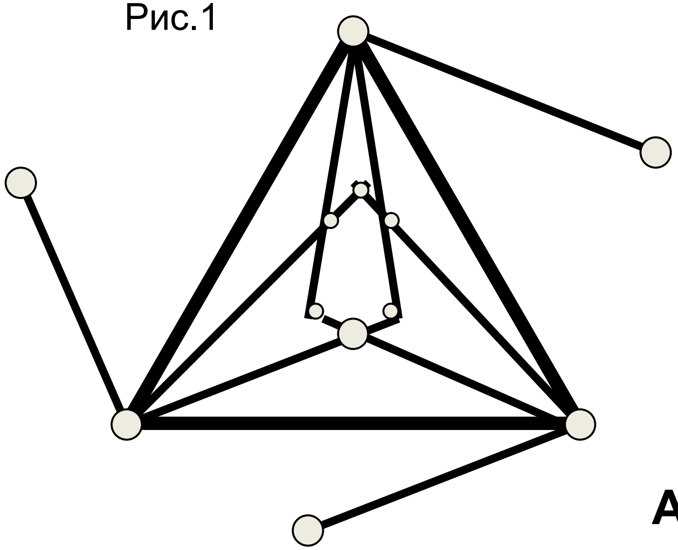


Рис.1

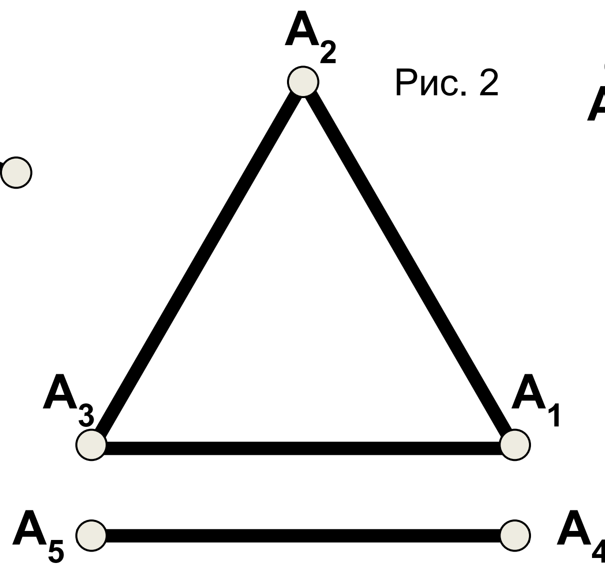


Рис. 2

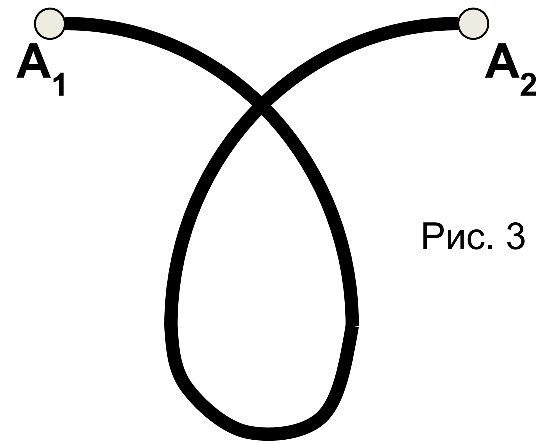


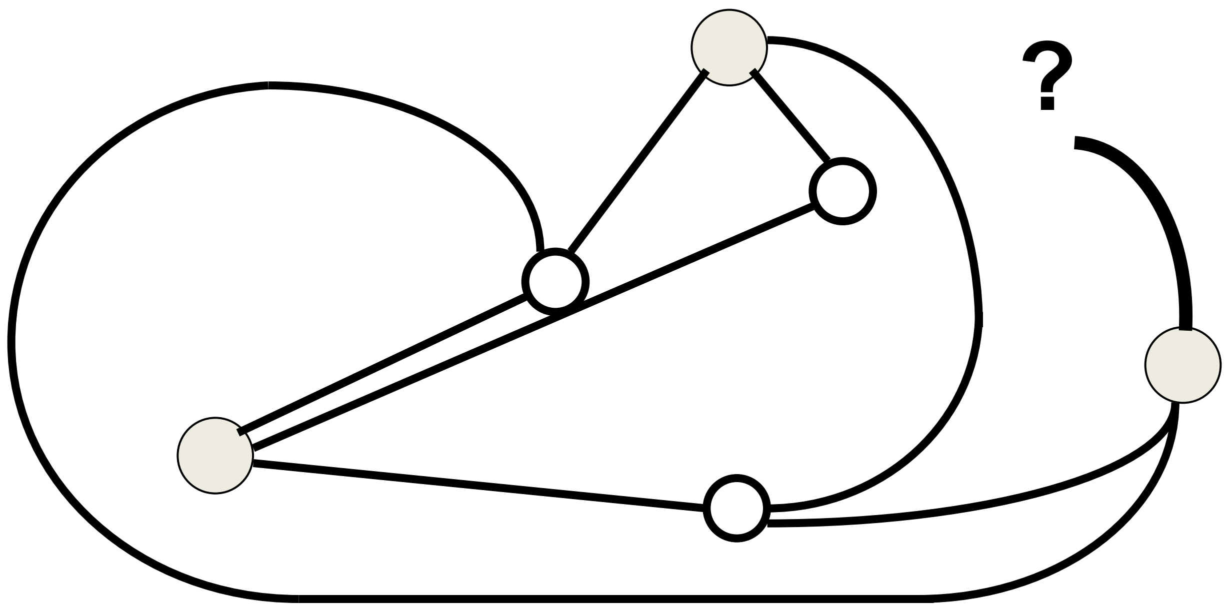
Рис. 3

В случае, изображенном на рисунке 1, все условия теоремы Эйлера выполнены, m=12, n=18, l=8 и m–n+l=2. На рисунках 2 и 3 изображены случаи, когда условия этой теоремы не выполняются. Так, на рисунке 2 из точки A1 нельзя попасть в точку A5 и m–n+l=3≠2, а на рисунке 3 линия, соединяющая точки A1 и A2, является самопересекающейся и опять m–n+l=3≠2. В некоторых задачах совокупность, состоящую из нескольких точек и соединяющих их попарно непересекающихся дуг, мы называем *картой*; при этом точки из этой совокупности мы называем *вершинами*, а области, на которые дуги делят плоскость, — *странами*.

Теория графов и задача Эйлера.

Теорема Эйлера. (5) Задача.

Три поссорившихся соседа имеют три общих колодца. Можно ли провести непересекающиеся дорожки от каждого дома к каждому колодцу?



Изобразим дома синими, а колодцы — чёрными точками и каждую синюю точку соединим дугой с каждой чёрной точкой так, чтобы девять полученных дуг попарно не пересекались. Тогда всякие две точки, изображающие дома или колодцы, будут соединены цепочкой дуг, и в силу теоремы Эйлера эти девять дуг разделят плоскость на 9–6+2=5 областей. Каждая из пяти областей ограничена по крайней мере четырьмя дугами, так как по условию задачи ни одна из дорожек не должна непосредственно соединять два дома или два колодца. Поэтому число дуг должно быть не меньше ½·5·4 = 10, и, следовательно, наше предположение неверно.