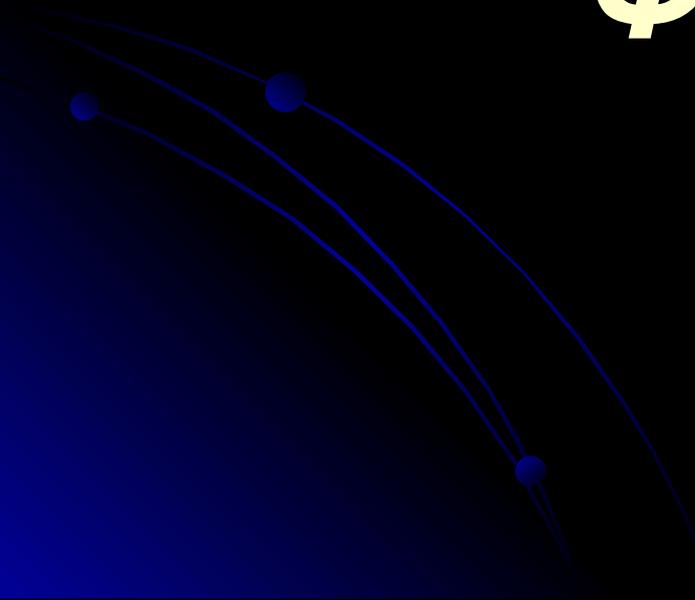


ОБЩАЯ СХЕМА ИССЛЕДОВАНИЯ ФУНКЦИИ



ОБЩАЯ СХЕМА ИССЛЕДОВАНИЯ ФУНКЦИИ

- 1. Найти область определения функции.
- 2. Исследовать функцию на четность, нечетность.
- 3. Найти вертикальные асимптоты.
- 4. Исследовать функцию в бесконечности, найти наклонные асимптоты.
- 5. Найти интервалы монотонности, точки экстремума.
- 6. Найти интервалы выпуклости, точки перегиба.
- 7. Найти точки пересечения с осями координат (по возможности).

ИССЛЕДОВАНИЕ ФУНКЦИИ

$$y = \frac{x^2 + 1}{x - 1}$$

Область определения функции

- множество значений переменной x , при которых функция существует

$$x - 1 \neq 0$$

$$x \neq 1$$

$$D(x): x \in (-\infty; 1) \cup (1; +\infty)$$

Четность, нечетность функции

- $y(-x) = y(x)$ - функция четная
- $y(-x) = -y(x)$ - функция нечетная

$$y(-x) = \frac{(-x)^2 + 1}{-x - 1} = \frac{x^2 + 1}{-x - 1} \neq \pm y(x)$$

- функция ни четная, ни нечетная
симметрии графика нет

Вертикальные асимптоты

- вертикальные асимптоты ищем в точках разрыва функции
- $x=1$ – точка разрыва

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + 1}{x - 1} = \infty$$

- следовательно, $x=1$ – вертикальная асимптота

Наклонные асимптоты

- наклонные асимптоты ищем при условии $x \rightarrow \infty$

$y=kx+b$ – наклонная асимптота

$$k = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + 1}{x(x-1)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + 1}{x^2 - x} = 1$$

$$b = \lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - kx) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2 + 1}{x - 1} - 1 \cdot x \right) =$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2 + 1 - x^2 + x}{x - 1} \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x + 1}{x - 1} = 1$$

значит, $y=x+1$ – наклонная асимптота

Интервалы монотонности, точки экстремума

$$f'(x) = \frac{2x(x-1) - (x^2+1)}{(x-1)^2} = \frac{x^2 - 2x - 1}{(x-1)^2}$$

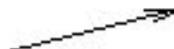
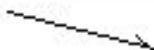
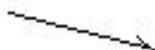
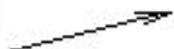
$$f'(x) = 0$$

$$\frac{x^2 - 2x - 1}{(x-1)^2} = 0$$

$$x^2 - 2x - 1 = 0, \quad (x-1)^2 \neq 0$$

$$x_1 = 1 - \sqrt{2} \approx -0.4, \quad x_2 = 1 + \sqrt{2} \approx 2.4, \quad x \neq 1$$

Интервалы монотонности, точки экстремума

x	$(-\infty; -0.4)$	-0.4	$(-0.4; 1)$	1	$(1; 2.4)$	2.4	$(2.4; +\infty)$
y'	+	0	-	не суц.	-	0	+
y		-0.8		не суц.		4.8	
y	возраст.	max	убывает	не суц.	убывает	min	возраст.

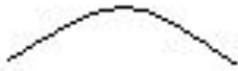
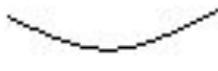
$$f_{\max}(-0.4) = -0.8, \quad f_{\min}(2.4) = 4.8$$

Интервалы выпуклости графика, точки перегиба

$$f'''(x) = \frac{(2x-1)(x-1)^2 - 2(x-1)(x^2-2x-1)}{(x-1)^4} = \frac{4}{(x-1)^3}$$

$$f'''(x) = 0$$

$$x \neq 1$$

x	$(-\infty; 1)$	1	$(1; +\infty)$
y'	-	не сущ.	+
y		не сущ.	
y	выпуклая	не сущ.	вогнутая

$x=1$ не является точкой перегиба, т.к. $1 \notin D(f)$

Точки пересечения с осями координат

- с осью Ох:

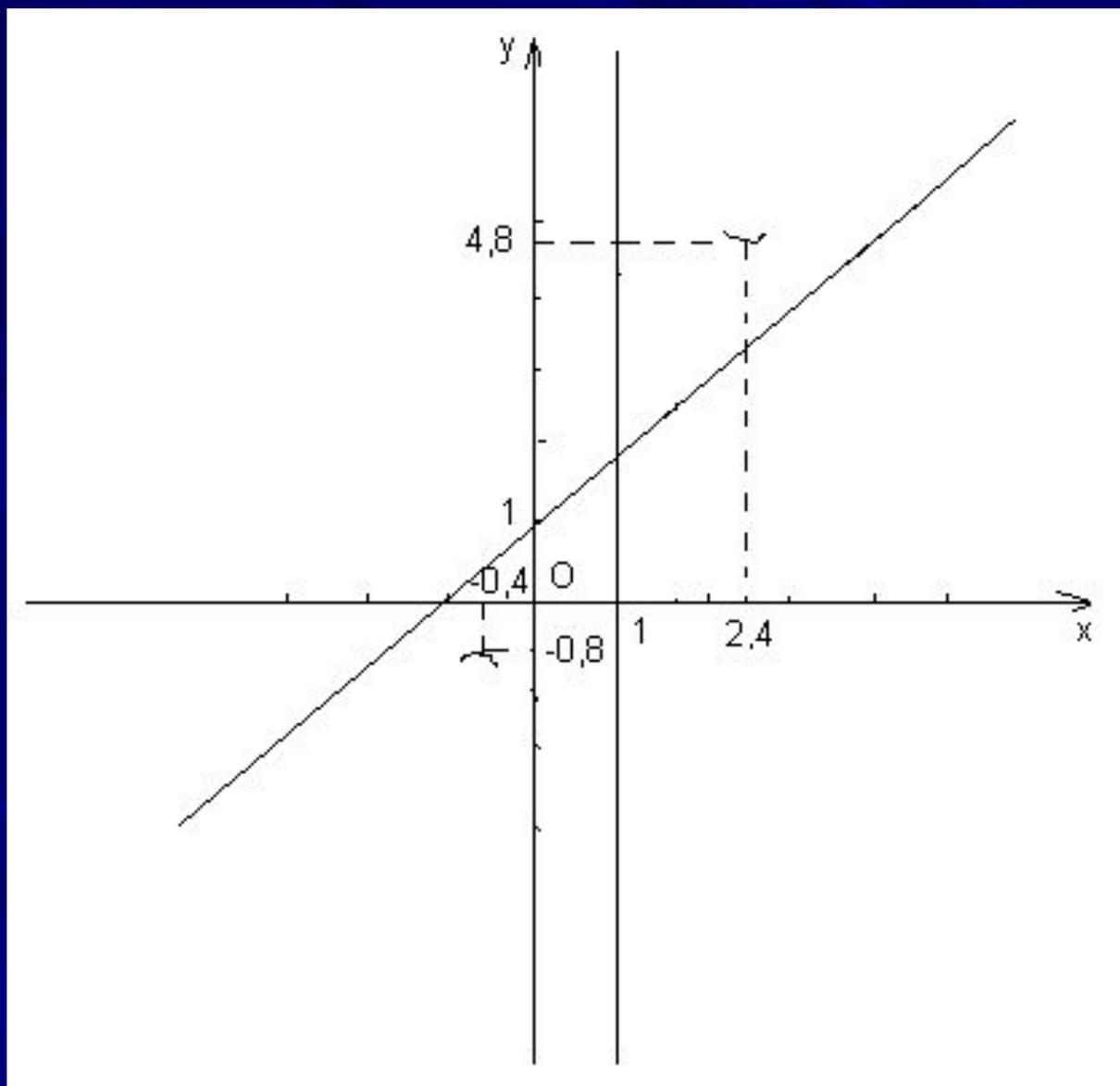
$$\begin{aligned} y &= 0 \\ \frac{x^2 + 1}{x - 1} &= 0 \end{aligned}$$

- график не пересекает ось Ох.

- с осью Оу:

$$\begin{aligned} x &= 0 \\ y(0) &= \frac{0^2 + 1}{0 - 1} = -1 \end{aligned}$$

Построение графика функции



Построение графика функции

