

РЕШЕНИЕ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ И НЕРАВЕНСТВ

Арксинус, арккосинус и арктангенс

Теорема о корне

Сформулируем важное утверждение, которым удобно пользоваться при решении уравнений.

Т е о р е м а (о корне). Пусть функция f возрастает (или убывает) на промежутке I , число a – любое из значений, принимаемых f на этом промежутке. Тогда уравнение $f(x) = a$ имеет единственный корень в промежутке I .

Д о к а з а т е л ь с т в о. Рассмотрим возрастающую функцию f (в случае убывающей функции рассуждения аналогичны). По условию в промежутке I существует такое число b , что $f(b) = a$. Покажем, что b – единственный корень уравнения $f(x) = a$.

Допустим, что на промежутке I есть ещё число $c \neq b$, такое, что $f(c) = a$. Тогда или $c < b$, или $c > b$. Но функция f возрастает на промежутке I , поэтому соответственно либо $f(c) < f(b)$, либо $f(c) > f(b)$. Это противоречит равенству $f(c) = f(b) = a$. Следовательно, сделанное предположение неверно и в промежутке I , кроме числа b , других корней уравнения $f(x) = a$ нет.

○ П р и м е р 1. Решим уравнение $x^3 + x = 2$.

Функция $f(x) = x^3 + x$ возрастает на \mathbf{R} (это сумма двух возрастающих функций). Поэтому уравнение $f(x) = 2$ имеет не более одного корня. Легко видеть, что корнем является $x = 1$. ●

Арксинус

Как вы знаете, функция синус возрастает на отрезке $[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$ и принимает все значения от -1 до 1 . Следовательно, по теореме о корне для любого числа a , такого, что $|a| \leq 1$, в промежутке $[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$ существует единственный корень b уравнения $\sin x = a$. Это число b называют арксинусом числа a и обозначают $\arcsin a$ (рис. 65).

О п р е д е л е н и е. Арксинусом числа a называется такое число из отрезка $[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$, синус которого равен a .

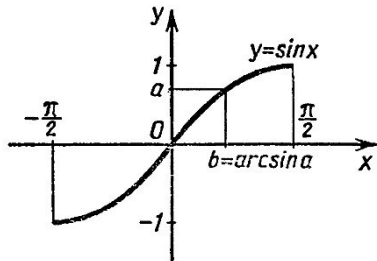


Рис. 65

○ П р и м е р 2. Найдём $\arcsin \frac{\sqrt{2}}{2}$.

$\arcsin \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\pi}{4}$, так как $\sin \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ и $\frac{\pi}{4} \in [-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$. ●

○ П р и м е р 3. Найдём $\arcsin(-\frac{1}{2})$.

Число (из промежутка $[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$), синус которого есть $-\frac{1}{2}$,

Арккосинус

Функция косинус убывает на отрезке $[0; \pi]$ и принимает все значения от -1 до 1 . Поэтому для любого числа a , такого, что $|a| \leq 1$, на отрезке $[0; \pi]$ существует единственный корень b уравнения $\cos x = a$. Это число b называют арккосинусом числа a и обозначают $\arccos a$ (рис. 66).

О п р е д е л е н и е. Арккосинусом числа a называется такое число из отрезка $[0; \pi]$, косинус которого равен a .

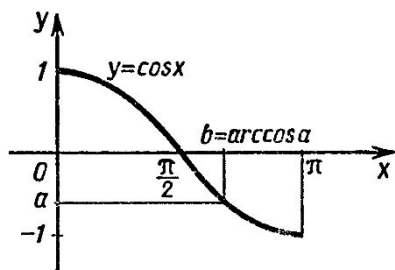


Рис. 66

○ П р и м е р 4. $\arccos \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\pi}{6}$, так как $\cos \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ и $\frac{\pi}{6} \in [0; \pi]$. ●

○ П р и м е р 5. $\arccos \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{3\pi}{4}$, так как $\cos \frac{3\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ и $\frac{3\pi}{4} \in [0; \pi]$. ●

Арктангенс

□ На интервале $(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2})$ функция тангенс возрастает и принимает все значения из \mathbf{R} . Поэтому для любого числа a на интервале $(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2})$ существует единственный корень b уравнения $\tan x = a$. Это число b называют арктангенсом числа a и обозначают $\arctan a$ (рис. 67).

О п р е д е л е н и е. **Арктангенсом** числа a называется такое число из интервала $(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2})$, тангенс которого равен a .

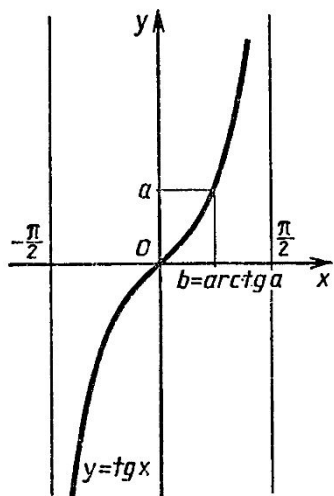


Рис. 67

- П р и м е р 6. $\arctan 1 = \frac{\pi}{4}$, так как $\tan \frac{\pi}{4} = 1$ и $\frac{\pi}{4} \in (-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2})$.
- П р и м е р 7. $\arctan(-\sqrt{3}) = -\frac{\pi}{3}$, так как $\tan(-\frac{\pi}{3}) = -\sqrt{3}$

$$\text{и } -\frac{\pi}{3} \in (-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}). \bullet$$

Арккотангенс

Функция котангенс от $(0; \pi)$ убывает и принимает все значения из \mathbf{R} . Поэтому для любого числа a в интервале $(0; \pi)$ существует единственный корень b уравнения $\cot x = a$. Это число b называют арккотангенсом числа a и обозначают $\operatorname{arccot} a$ (рис. 68).

О п р е д е л е н и е. *Арккотангенсом* числа a называется такое число из интервала $(0; \pi)$, котангенс которого равен a .

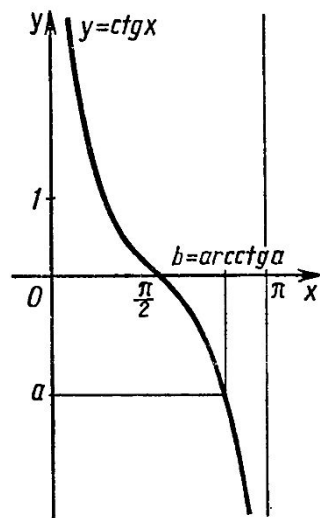


Рис. 68

○ П р и м е р 8. $\operatorname{arccot} \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\pi}{3}$, так как $\cot \frac{\pi}{3} = \frac{1}{\sqrt{3}}$ и $\frac{\pi}{3} \in (0; \pi)$. ●

○ П р и м е р 9. $\operatorname{arccot}(-\sqrt{3}) = \frac{5\pi}{6}$, так как $\cot \frac{5\pi}{6} = -\sqrt{3}$ и $\frac{5\pi}{6} \in (0; \pi)$. ●