РЕШЕНИЕ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ И НЕРАВЕНСТВ

Арксинус, арккосинус и арктангенс

Теорема о корне

Сформулируем важное утверждение, которым удобно пользоваться при решении уравнений.

Т е о р е м а (*о корне*). ***Пусть функция f возрастает (или убывает) на промежутке I, число a – любое из значений, принимаемых f на этом промежутке. Тогда уравнение $f(x) = a$ имеет единственный корень в промежутке I.***

Д о к а з а т е л ь с т в о. Рассмотрим возрастающую функцию f (в случае убывающей функции рассуждения аналогичны). По условию в промежутке I существует такое число b, что $f(b) = a$. Покажем, что b – единственный корень уравнения $f(x) = a$.

Допустим, что на промежутке I есть ещё число $c \neq b$, такое, что $f(c) = a$. Тогда или $c < b$, или $c > b$. Но функция f возрастает на промежутке I, поэтому соответственно либо $f(c) < f(b)$, либо $f(c) > f(b)$. Это противоречит равенству $f(c) = f(b) = a$. Следовательно, сделанное предположение неверно и в промежутке I, кроме числа b, других корней уравнения $f(x) = a$ нет.

П р и м е р 1. Решим уравнение $x^3 + x = 2$.

Функция $f(x) = x^3 + x$ возрастает на $\boldsymbol{R}$ (это сумма двух возрастающих функций). Поэтому уравнение $f(x) = 2$ имеет не более одного корня. Легко видеть, что корнем является $x = 1$.

Арксинус

Как вы знаете, функция синус возрастает на отрезке $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ и принимает все значения от -1 до 1. Следовательно, по теореме о корне для любого числа a, такого, что $|a| \leq 1$, в промежутке $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ существует единственный корень b уравнения $\sin x = a$. Это число b называют арксинусом числа a и обозначают $\arcsin a$ (рис. 65).

О п р е д е л е н и е. ***Арксинусом*** **числа** ***a называется такое число из отрезка*** $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$**, синус которого равен** ***a*****.**

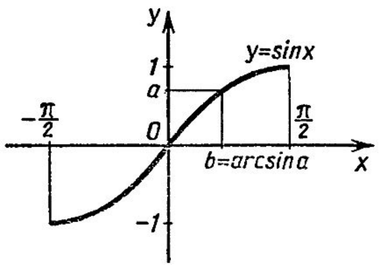

Рис. 65

П р и м е р 2. Найдём $\arcsin \frac{\sqrt{2}}{2}$.

$\arcsin \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\pi}{4}$, так как $\sin \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ и $\frac{\pi}{4} \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$.

П р и м е р 3. Найдём $\arcsin \left(-\frac{1}{2}\right)$.

Число (из промежутка $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$), синус которого есть $-\frac{1}{2}$, равно $-\frac{\pi}{6}$. Поэтому $\arcsin -\frac{1}{2} = -\frac{\pi}{6}$.

Арккосинус

Функция косинус убывает на отрезке $[0;\ \pi]$ и принимает все значения от -1 до 1. Поэтому для любого числа a, такого, что $|a| \leq 1$, на отрезке $[0;\ \pi]$ существует единственный корень b уравнения $\cos x = a$. Это число b называют арккосинусом числа a и обозначают $\arccos a$ (рис. 66).

О п р е д е л е н и е. ***Арккосинусом* числа a называется такое число из отрезка $[0;\ \pi]$, косинус которого равен a.**

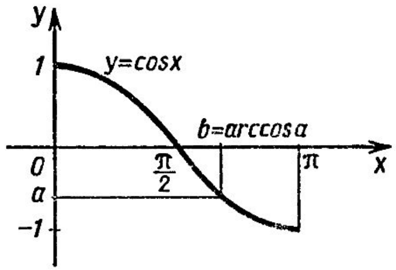

Рис. 66

- П р и м е р 4. $\arccos \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\pi}{6}$, так как $\cos \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ и $\frac{\pi}{6} \in [0;\ \pi]$.
- П р и м е р 5. $\arccos \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{3\pi}{2}$, так как $\cos \frac{3\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ и $\frac{3\pi}{2} \in [0;\ \pi]$.

Арктангенс

На интервале $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ функция тангенс возрастает и принимает все значения из $\boldsymbol{R}$. Поэтому для любого числа a на интервале $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ существует единственный корень b уравнения $\tan x = a$. Это число b называют арктангенсом числа a и обозначают $\arctan a$ (рис. 67).

О п р е д е л е н и е. ***Арктангенсом* числа $\boldsymbol{a}$ называется такое число из интервала $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$, тангенс которого равен $\boldsymbol{a}$.**

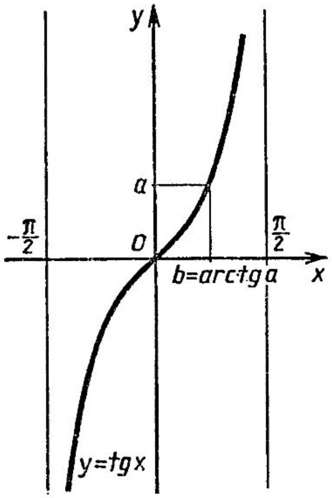

Рис. 67

- П р и м е р 6. $\arctan 1 = \frac{\pi}{4}$, так как $\tan\frac{\pi}{4} = 1$ и $\frac{\pi}{4} \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$.
- П р и м е р 7. $\arctan(-\sqrt{3}) = -\frac{\pi}{3}$, так как $\tan\left(-\frac{\pi}{3}\right) = -\sqrt{3}$ и $-\frac{\pi}{3} \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$.

Арккотангенс

Функция котангенс от $(0;\ \pi)$ убывает и принимает все значения из $\boldsymbol{R}$. Поэтому для любого числа a в интервале $(0;\ \pi)$ существует единственный корень b уравнения $\cot x = a$. Это число b называют арккотангенсом числа a и обозначают $\operatorname{arccot} a$ (рис. 68).

О п р е д е л е н и е. ***Арккотангенсом* числа $\boldsymbol{a}$ называется такое число из интервала $(\mathbf{0};\ \boldsymbol{\pi})$, котангенс которого равен $\boldsymbol{a}$.**

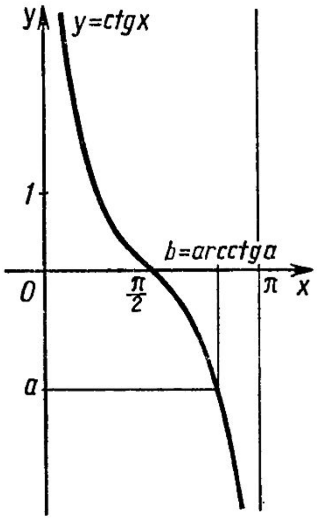

Рис. 68

- П р и м е р 8. $\operatorname{arc} \cot \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\pi}{3}$, так как $\cot \frac{\pi}{3} = \frac{1}{\sqrt{3}}$ и $\frac{\pi}{3} \in (0;\ \pi)$.

- П р и м е р 9. $\operatorname{arccot}\left(-\sqrt{3}\right) = \frac{5\pi}{6}$, так как $\cot \frac{5\pi}{6} = -\sqrt{3}$ и $\frac{5\pi}{6} \in (0;\ \pi)$.