

*Признаки  
равенства  
треугольников*

**7 класс**

*Учитель математики 1 категории  
МОУ СОШ №4  
Шмичева Елена Евгеньевна*

## **Урок 1:** Первый признак равенства треугольников

- повторение
- что такое теорема?
- первый признак равенства треугольников
- задачи
- самостоятельная работа (два уровня)

## **Урок 2:** Медиана, биссектриса и высота треугольника

- устная работа
- перпендикуляр к прямой
- медиана
- биссектриса
- высота
- графическая работа

## **Урок 3: Равнобедренный треугольник**

- определение
- свойства равнобедренного треугольника
- творческая самостоятельная работа
- теоретический тест

## **Урок 4: Второй признак равенства треугольников**

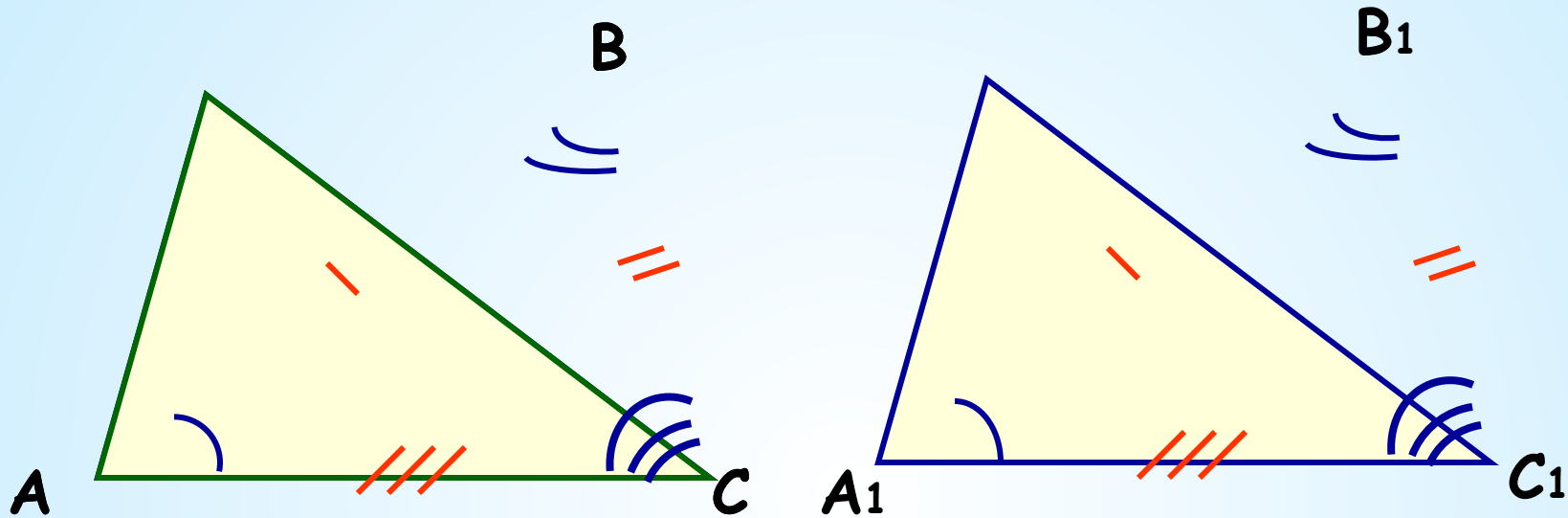
- повторение (устная работа по готовым чертежам)
- второй признак равенства треугольников
- задачи
- тест

## **Урок 5: Третий признак равенства треугольников**

- третий признак равенства треугольников
- задачи
- самостоятельная работа

# Равенство треугольников

(повторение)



$$\Delta ABC = \Delta A_1B_1C_1 \Leftrightarrow \left[ \begin{array}{ll} AB = A_1B_1 & \angle A = \angle A_1 \\ BC = B_1C_1 & \angle B = \angle B_1 \\ AC = A_1C_1 & \angle C = \angle C_1 \end{array} \right]$$

## Определение

**Треугольники называются равными, если совмещаются при наложении**

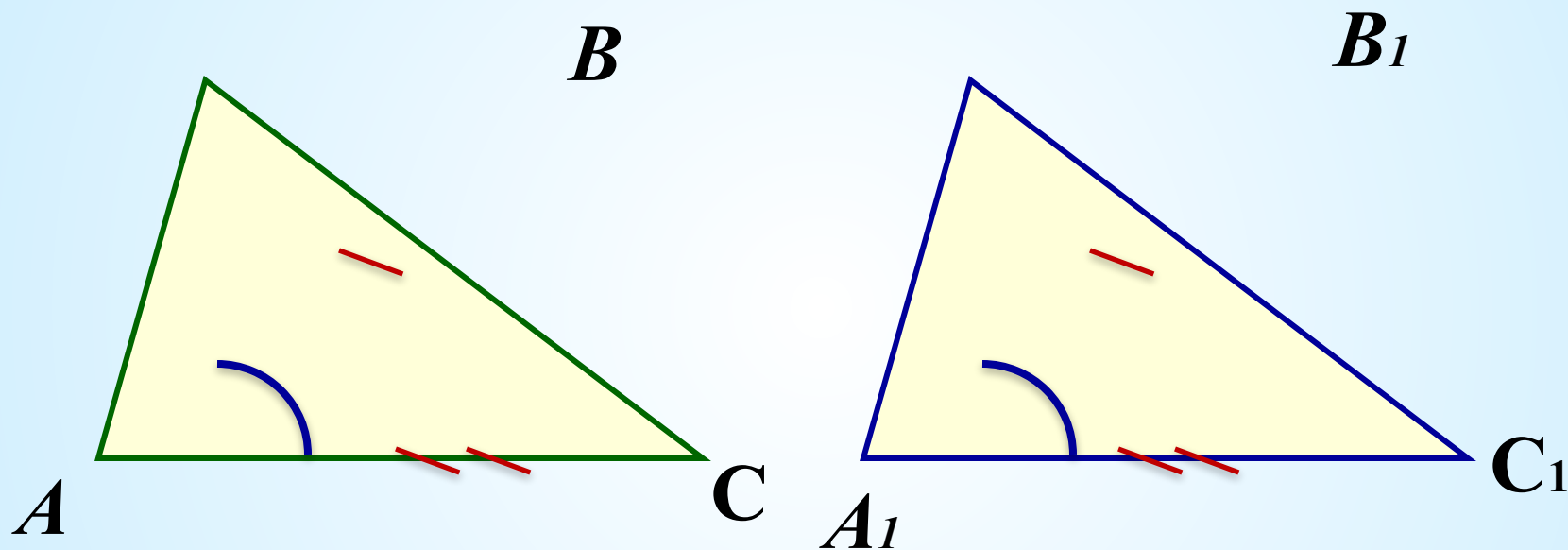
***Теорема – утверждение,  
справедливость, которого  
устанавливается путём рассуждений  
(доказательств)***

**Любая теорема включает**

- 1. Чертёж**
- 2. Условие (дано)**
- 3. Заключение (доказать)**
- 4. Доказательство с обоснованием  
(логические рассуждения, которые  
основываются на определениях,  
аксиомах и ранее доказанных теоремах  
(свойствах и признаках))**

# ПЕРВЫЙ ПРИЗНАК

*( по двум сторонам и углу между ними )*



**Если две стороны и угол между ними одного  
треугольника соответственно равны двум  
сторонам и углу между ними другого  
треугольника, то такие треугольники равны**

Дано:  $\triangle ABC$ ,  $\triangle A_1B_1C_1$ .

$AB = A_1B_1$ ;  $AC = A_1C_1$ ;

$\angle A = \angle A_1$

Доказать:

$\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$ .

Доказательство:

*Рассмотрим треугольники*

1) т.к.  $\angle A = \angle A_1$  (по условию)  $\Rightarrow \triangle ABC$

**можно наложить на  $\triangle A_1B_1C_1$ .**

2) Луч  $AB$  совпадает с лучом  $A_1B_1$ . Луч  $AC$  совпадает с лучом  $A_1C_1$ .

3) т.к.  $AB = A_1B_1$ ;  $AC = A_1C_1$ , то

*совместятся точки  $B$  и  $B_1$ ;  $C$  и  $C_1$   $\Rightarrow$*

**совместятся отрезки  $BC$  и  $B_1C_1$ .**

4) Совместятся  $\triangle ABC$  и  $\triangle A_1B_1C_1 \Rightarrow \triangle ABC$

**$= \triangle A_1B_1C_1$ , ч.т.д.**

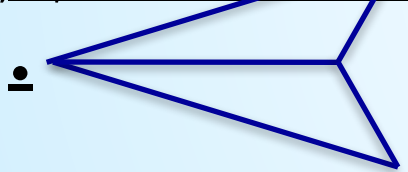
# Задачи

1) Дано:  $\triangle ABC$  и  $\triangle DMK$ ;  $BC = 6$ ;  $MD = 6$ ;  $AC = 7$ ;  $DK = 7$ ;  $\angle C = \angle D$ .

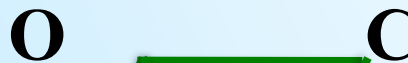
Доказатъ:  $\triangle ABC = \triangle DMK$ .

2)  $O$  – середина  $AK$ ;  $O$  – середина  $CM$ .

Доказатъ  $\triangle AOC = \triangle MOK$ .



3) Дано:  $OP = OK$ ;  $OC$  – биссектриса  $\angle O$ ;  $\angle K = 30^\circ$ ;  $CK = 7$  см.



Найти:  $PC$ ;  $\angle P$

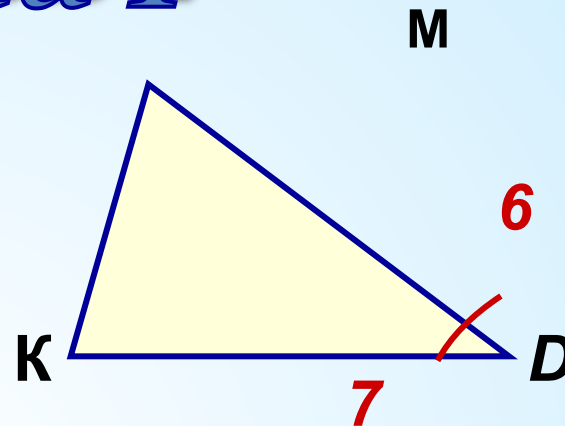
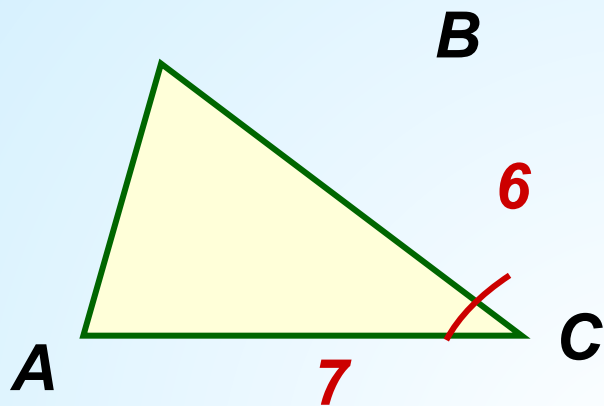
4) Дано:  $BC = AD$ ;  $\angle 1 = \angle 2$ ;  $\angle C = 60^\circ$ ;  $AB = 10$  м



Найти:  $CD$ ;  $\angle A$



# Решение задачи 1



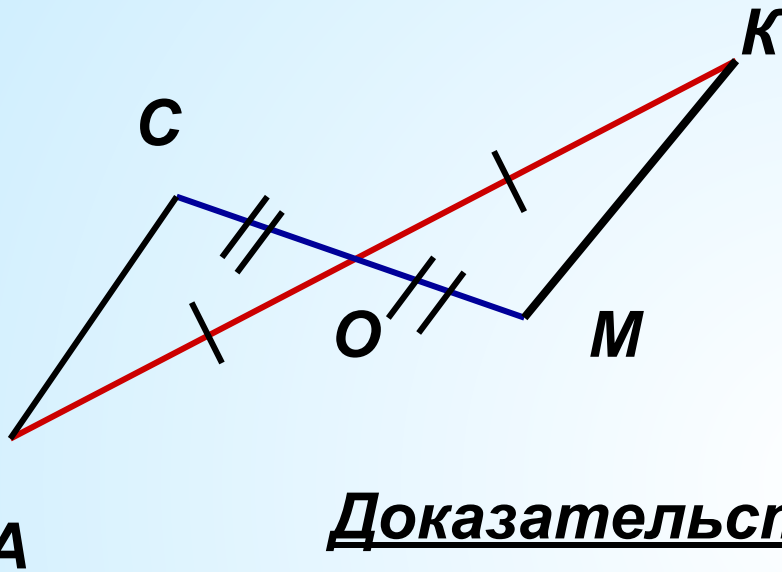
## Решение

Рассмотрим  $\triangle ABC$  и  $\triangle DMK$

1.  $BC = DM = 6$  ( по условию)
2.  $AC = DK = 7$  ( по условию)
3.  $\angle C = \angle D$  ( по условию)

$\Rightarrow \triangle ABC = \triangle DMK$   
по 1 признаку  
равенства  
треугольников

# Решение задачи 2



**Дано:**  $AK \cap CM = O$ ;  $CO = OM$ ;  
 $AO = OK$ .

**Доказать**  $\triangle AOC = \triangle MOK$

**Доказательство:**

Рассмотрим  $\triangle AOC$  и  $\triangle KOM$

1.  $AO = OK$  ( по условию)
2.  $CO = OM$  ( по условию)
3.  $\angle COA = \angle KOM$  ( вертикальные)

**$\Rightarrow \triangle AOC = \triangle MOK$**   
**по 1 признаку**  
**равенства**  
**треугольников, ч.т.**  
**д.**

# Решение задачи 3

## Решение:

Рассмотрим  $\triangle OCP$  и  $\triangle OCK$

1.  $OP = OK$  ( по условию)
2.  $CO$  – общая сторона
3.  $\angle COP = \angle COK$   
(  $OC$  - биссектриса)

$\Rightarrow \triangle OCP = \triangle OCK$   
по 1 признаку  
равенства  
треугольников

$\Rightarrow \angle K = \angle P = 30^\circ;$   
 $CK = PC = 7 \text{ см}$

# Решение задачи 4

## Решение:

Рассмотрим  $\triangle ABD$  и  $\triangle CDB$

1.  $BC = AD$  ( по условию)
2.  $BD$  – общая сторона
3.  $\angle 1 = \angle 2$  ( по условию)

$\Rightarrow \triangle ABD = \triangle CDB$   
по 1 признаку  
равенства  
треугольников

$\Rightarrow \angle A = \angle C = 60^\circ;$   
 $CD = AB = 10 \text{ м}$

# Самостоятельная работа

## Уровень (под постоянным контролем учителя)

1. Рис. 1

Дано:  $AA_1 = CC_1$ ;  $BC = B_1C_1$ ,  $BC \perp AC$ ,  $B_1C_1 \perp AC_1$

Доказать:  $\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$

2. Рис. 2

Дано:  $AB = BC$ ,  $\angle 1 = \angle 2$ .

Доказать:  $\angle ADB = \angle CDB$ ,  $DB$ - биссектриса  $\angle ADC$ .

## Уровень (с проверкой учителя по окончании работы)

1. Рис. 3

Дано:  $\angle BDC = \angle BEA$ ,  $AD = EC$ ,  $BD = BE$ ,  $\angle BCE = 64^\circ$

Доказать:  $\triangle ABD = \triangle CBE$ . Найти:  $\angle BAD$ .

2. Рис. 4

Дано:  $AB = AD$ ,  $AC = AE$ ,  $\angle BAD = \angle CAE$ .

Найти: равны ли  $BC$  и  $DE$ ,  $\angle MCA$  и  $\angle KEA$ ?

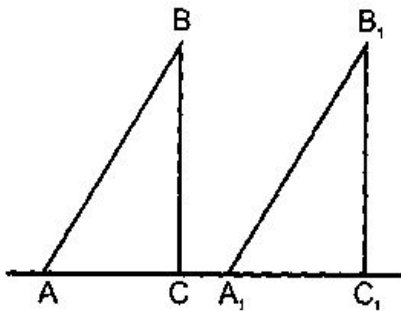


Рис. 1

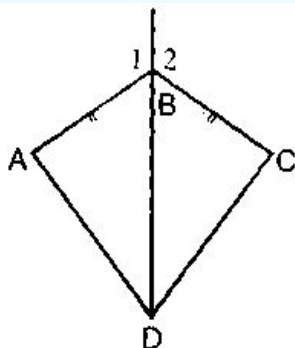


Рис. 2

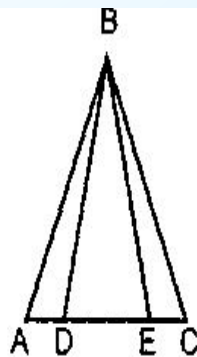


Рис. 3

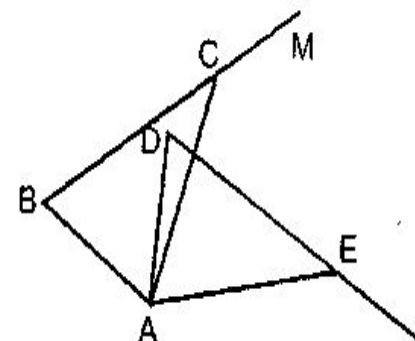


Рис. 4

*Примерные задания  
из учебника для работы  
классе и дома* в

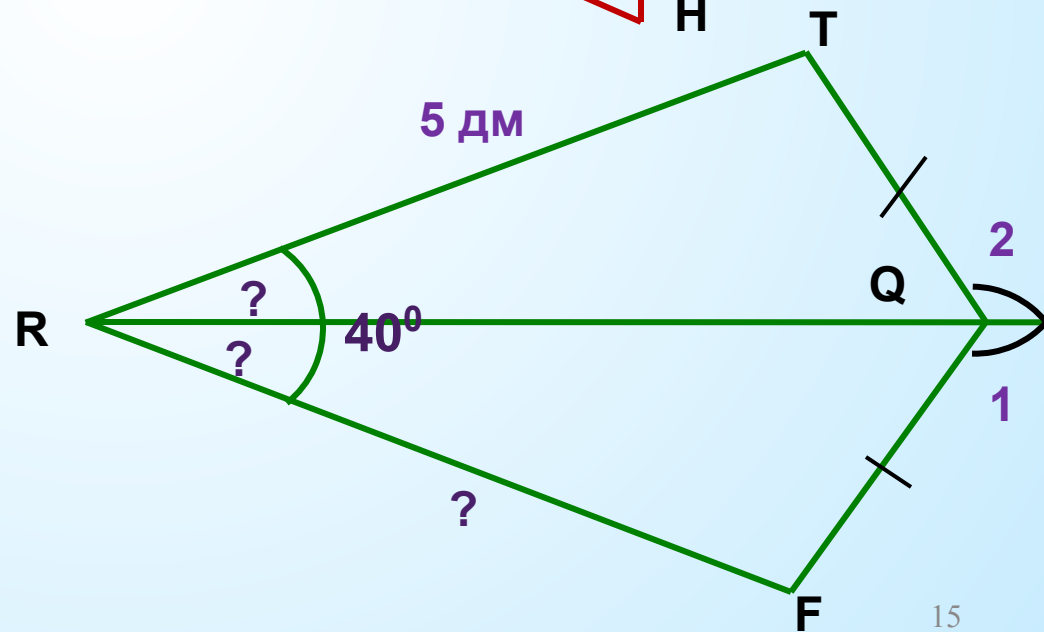
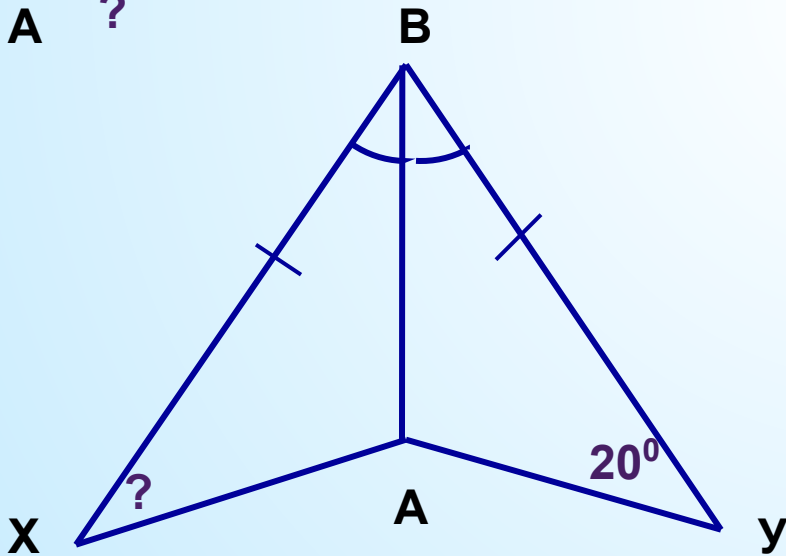
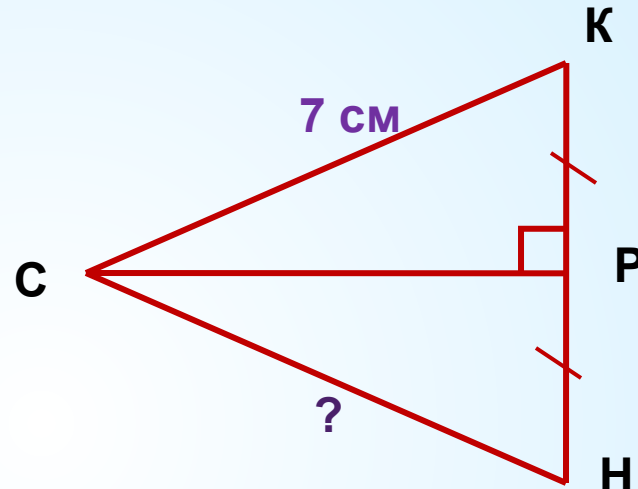
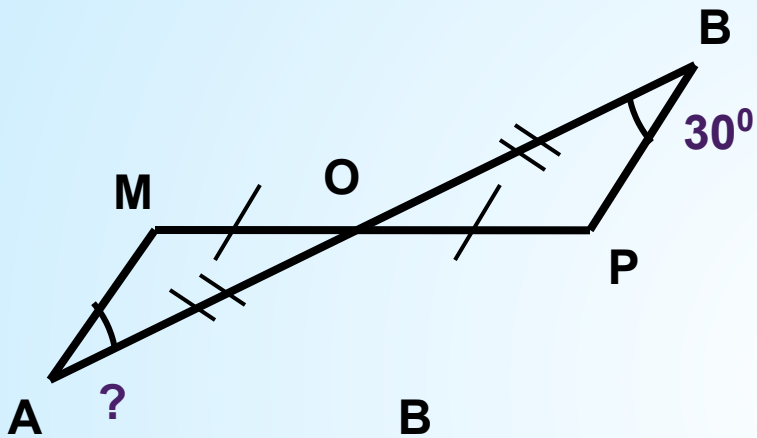
**В классе:** №93;96;98;99.

**Дома:** п.14

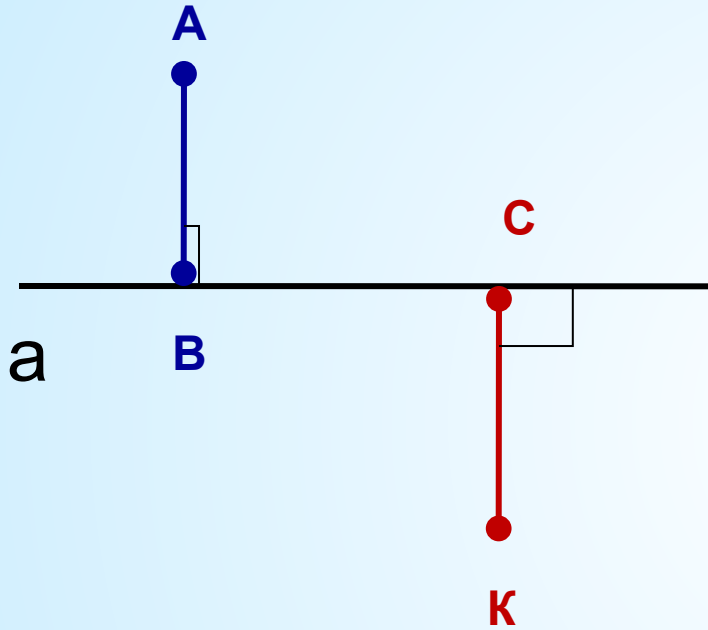
*(выучить теорему)*

№ 94;95;97

# Устная работа по готовым чертежам



# Перпендикуляр к прямой



*Отрезок  $AB$  – перпендикуляр, опущенный из точки  $A$  к прямой  $a$ .*

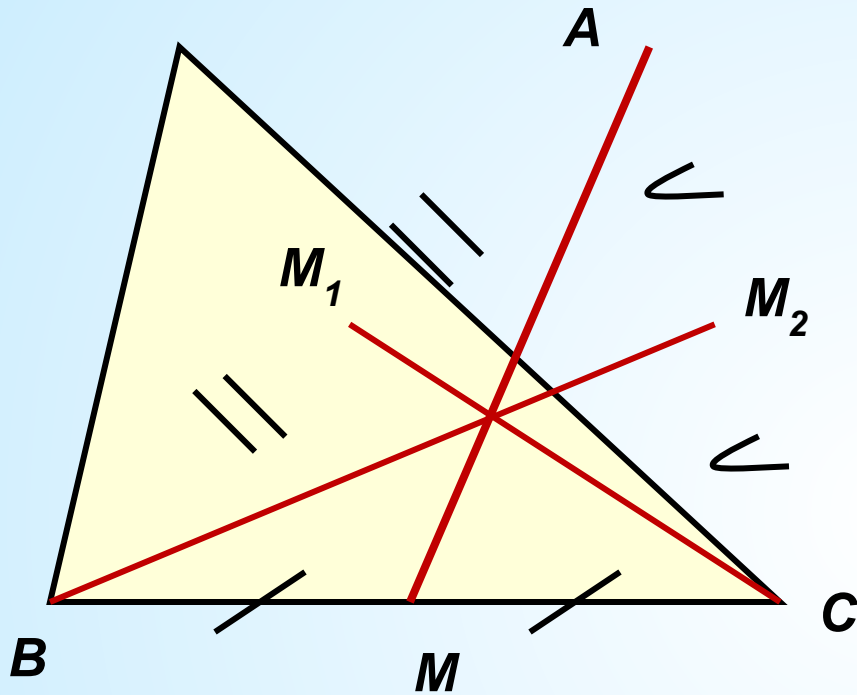
*Точка  $B$  – основание перпендикуляра*

$$AB \perp a$$

**Из точки не лежащей на прямой, можно провести перпендикуляр к этой прямой, и при том только один.**



# Медиана треугольника



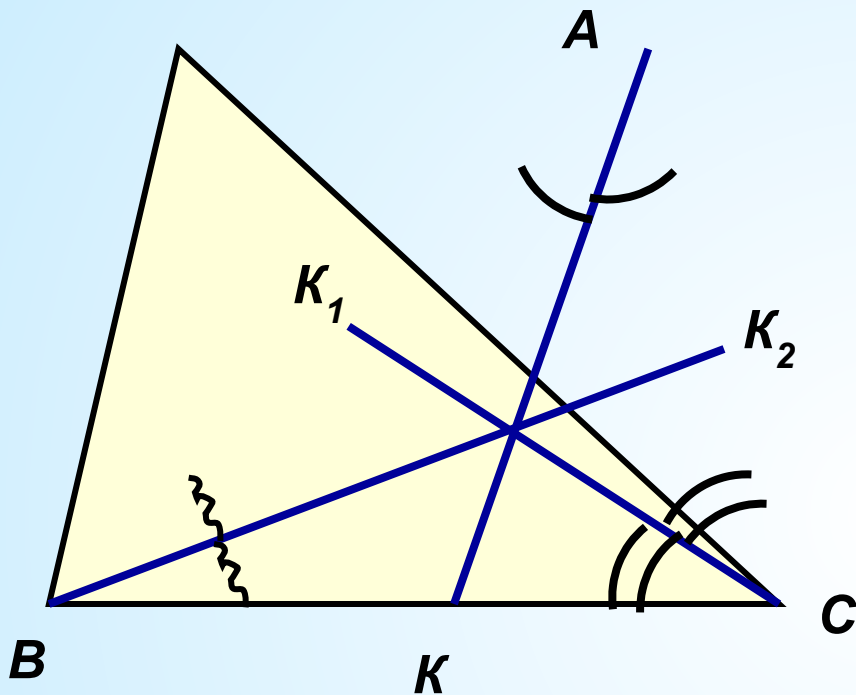
Отрезок,  
соединяющий вершину  
треугольника с  
серединой  
противолежащей  
стороны называется  
**медианой**  
треугольника (**AM**).

**Постройте все медианы.**

**Свойство медиан:**

**В любом треугольнике медианы  
пересекаются в одной точке.**

# Биссектриса треугольника



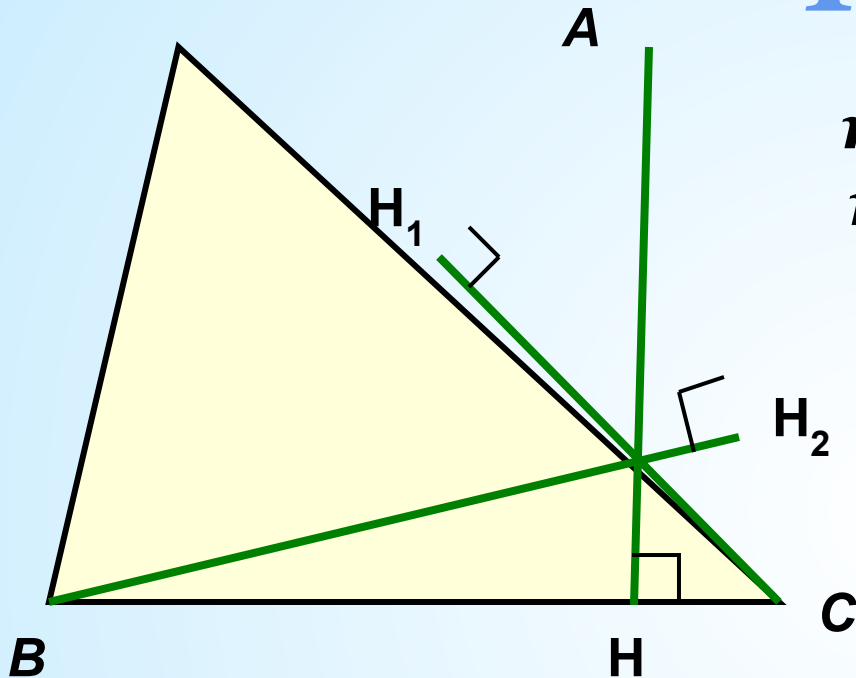
Отрезок биссектрисы угла, соединяющий вершину треугольника с точкой противоположащей стороны называется биссектрисой треугольника (AK).

**Постройте все медианы.**

**Свойство биссектрис:**

**В любом треугольнике биссектрисы пересекаются в одной точке.**

# Высота треугольника



Перпендикуляр,  
проведённый из вершины  
треугольника к прямой,  
содержащей  
противоположающую  
сторону называется  
**высотой**  
треугольника (AH).

**Постройте все высоты.**

**Свойство высот:**

**В любом треугольнике высоты  
пересекаются в одной точке.**

# *Графическая работа*

*Постройте **медианы**,  
биссектрисы, **высоты**  
в прямоугольном и  
тупоугольном  
треугольнике.*

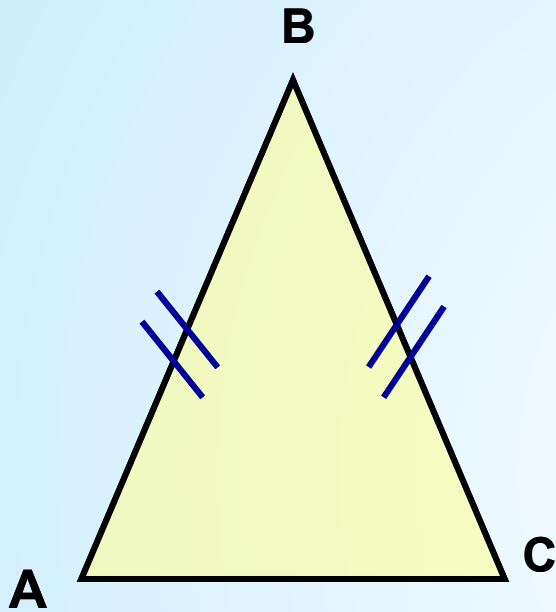
*Примерные задания  
из учебника для работы  
классе и дома* **в**

**В классе:** № 105; 106.

**Дома:** п. 16; 17.

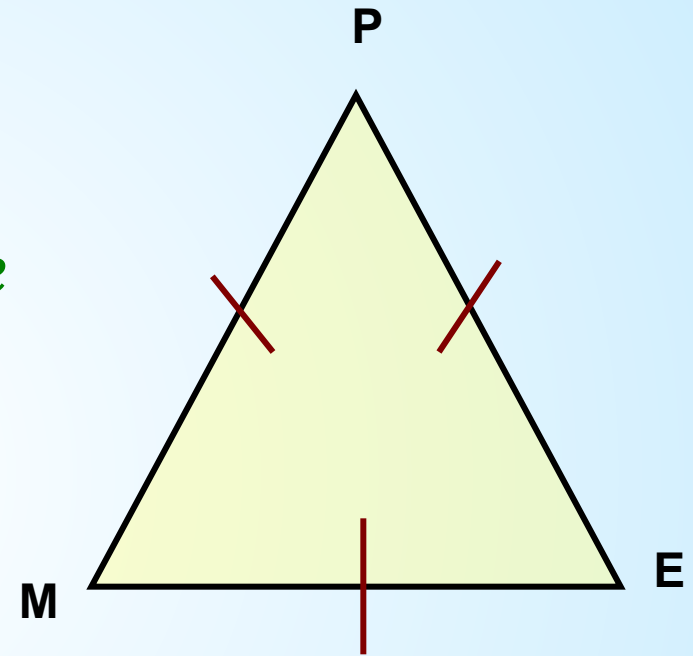
*На альбомном листе  
№ 101;102;103.*

# Равнобедренный треугольник



**Равнобедренный  
треугольник**

**Дать  
определение**



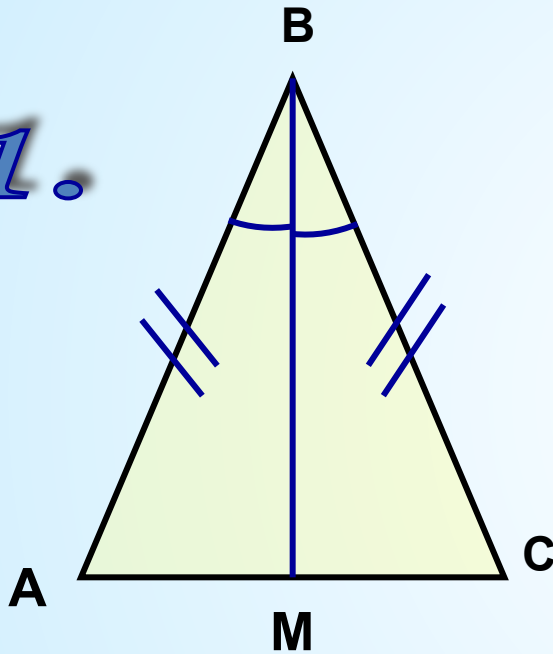
**Равносторонний  
треугольник**

?

**AC – основание;  
AB, BC – боковые стороны;  
 $\angle A, \angle C$  – углы при основании,  
 $\angle B$  – угол противолежащий  
основанию.**

# Свойства равнобедренного треугольника

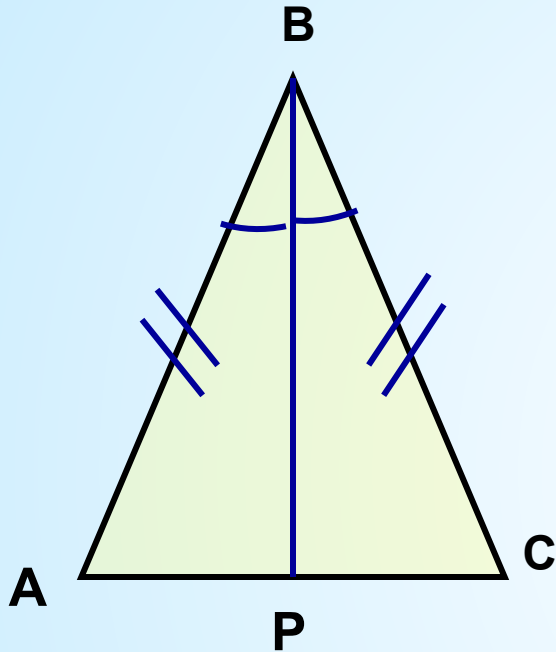
1.



**В равнобедренном  
треугольнике  
углы при  
основании равны**

**Доказать теорему самостоятельно**

2.



***В равнобедренном  
треугольнике  
биссектриса,  
проведённая к  
основанию,  
является медианой и  
высотой***

**Доказать теорему самостоятельно**



# Самостоятельная работа творческого характера

**V-1**

Исследуйте медианы  
равнобедренного  
треугольника и  
перечислите все их  
свойства

**V-2**

Исследуйте высоты  
равнобедренного  
треугольника и  
перечислите все их  
свойства

**Обсудить и записать  
полученные выводы**

# Теоретический тест

**1. Медиана в равнобедренном треугольнике является его биссектрисой и высотой. Это утверждение:**

- а) всегда верно;**
- б) может быть верно;**
- в) всегда неверно.**

**2. Если треугольник равносторонний, то:**

- а) он равнобедренный;**
- б) все его углы равны;**
- в) любая его высота является биссектрисой и медианой.**

**3. В каком треугольнике только одна его высота делит треугольник на два равных треугольника?**

- а) в любом;**
- б) в равнобедренном;**
- в) в равностороннем.**

**4. Биссектриса в равностороннем треугольнике является медианой и высотой. Это утверждение:**

- а) всегда верно;**
- б) может быть верно;**
- в) всегда неверно.**

**5. Если треугольник равнобедренный, то:**

- а) он равносторонний;**
- б) любая его медиана является биссектрисой и высотой;**
- в) ответы а) и б) неверны.**

**6. В каком треугольнике любая его высота делит треугольник на два равных треугольника?**

- а) в любом;**
- б) в равнобедренном;**
- в) в равностороннем.**

**Ответы к тесту:**

**1 б); 2 а), б), в); 3 б); 4 а); 5 в); 6 в).**

*Примерные задания  
учебника для работы  
и дома*

*из  
в классе*

**В классе:** №109;112; 119;120

**Дополнительные**

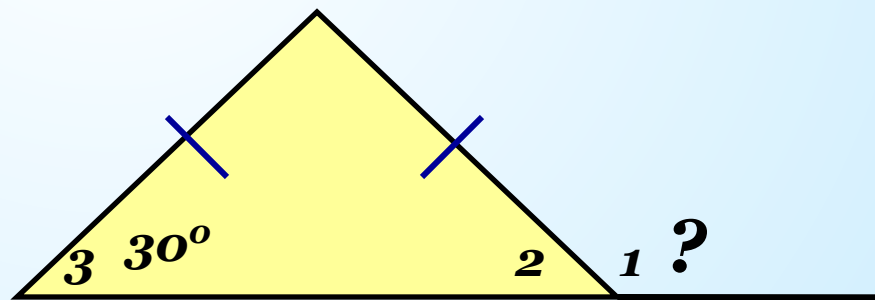
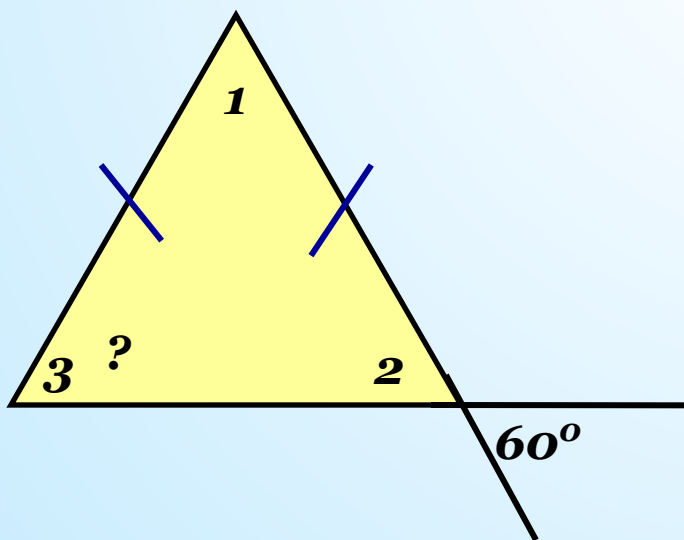
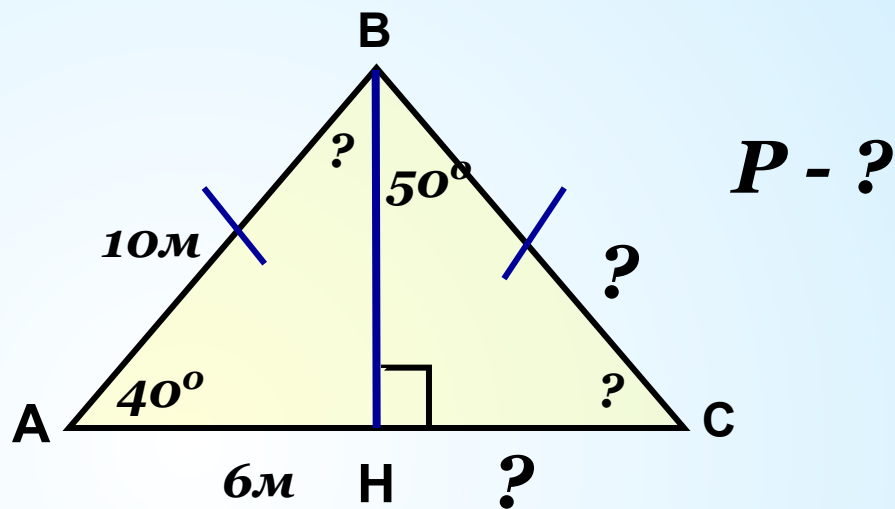
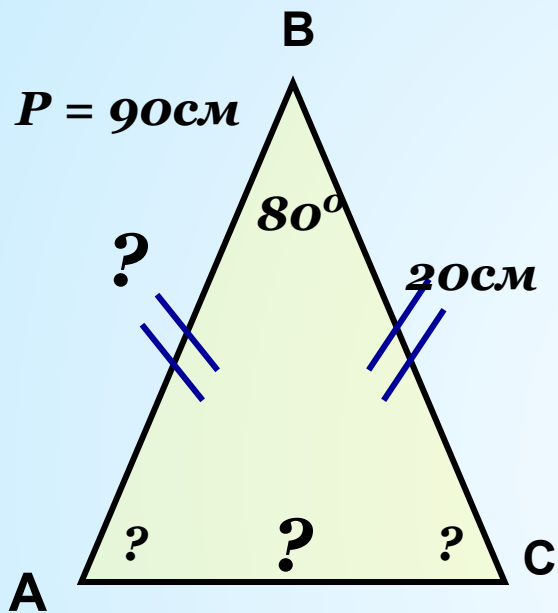
**задачи:** № 157;156;158.

**Дома:** п.18

*(выучить теоремы)*

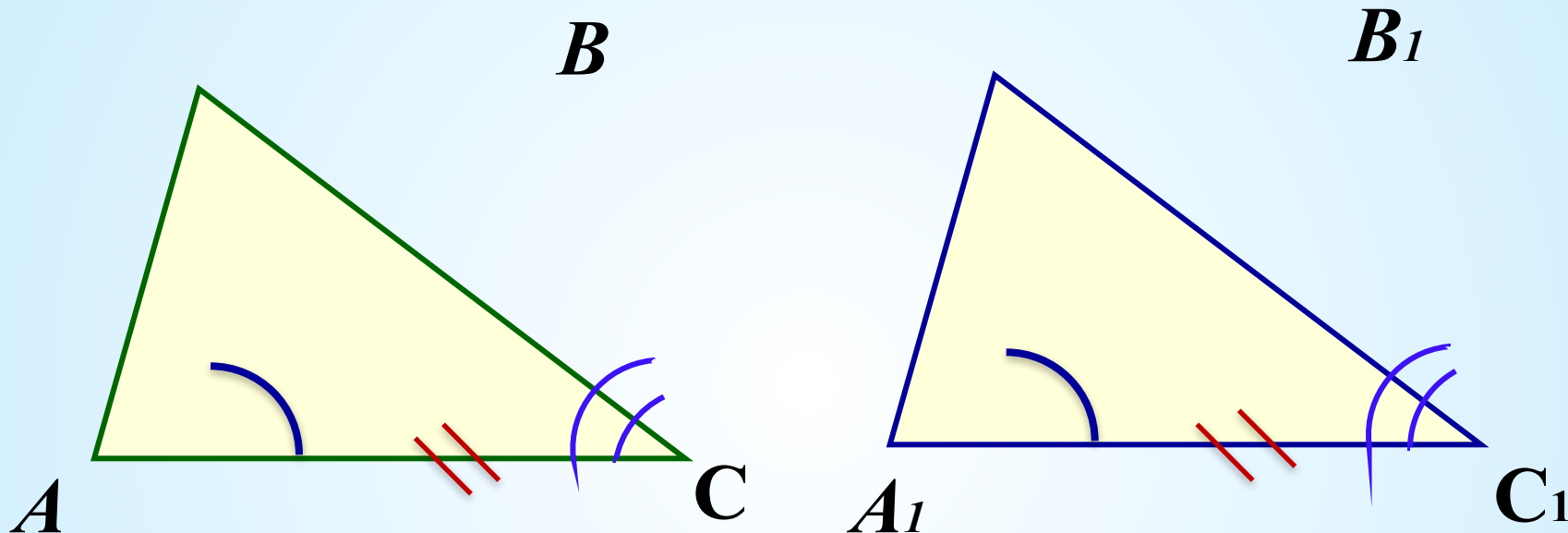
№ 107;108;111;117

# Устная работа по готовым чертежам



# ВТОРОЙ ПРИЗНАК

*( по стороне и двум прилежащим к ней углам )*



**Если сторона и два прилежащих к ней угла одного треугольника соответственно равны стороне и двум прилежащим к ней углам другого треугольника, то такие треугольники равны**

Дано:  $\triangle ABC$ ,  $\triangle A_1B_1C_1$ .

$AC = A_1C_1$ ;  $\angle C = \angle C_1$ ;

$\angle A = \angle A_1$

Доказать:

$\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$ .

Доказательство:

Рассмотрим треугольники  $\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$

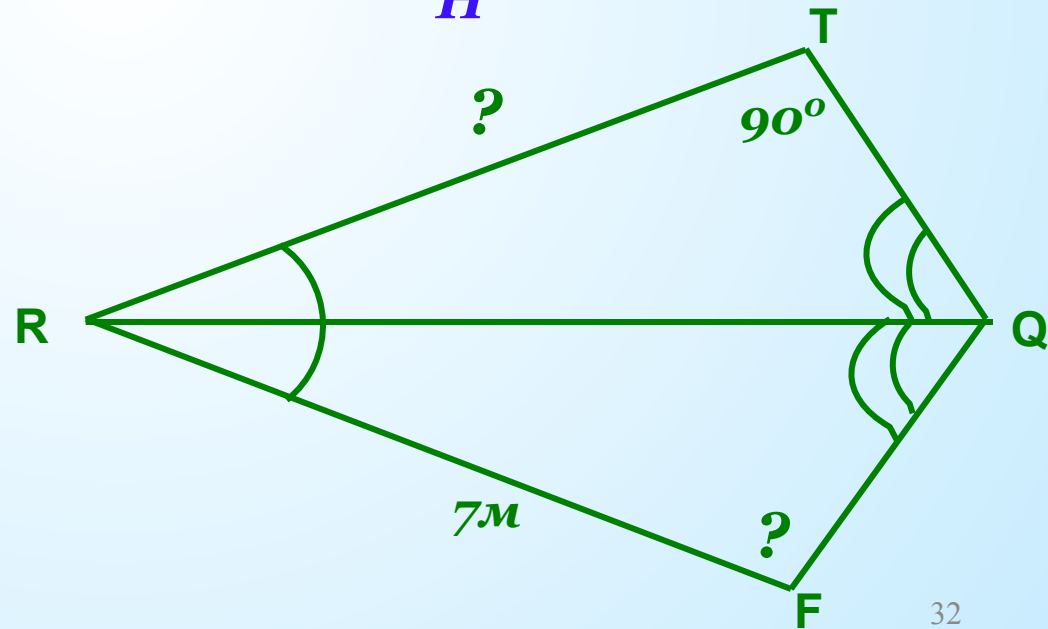
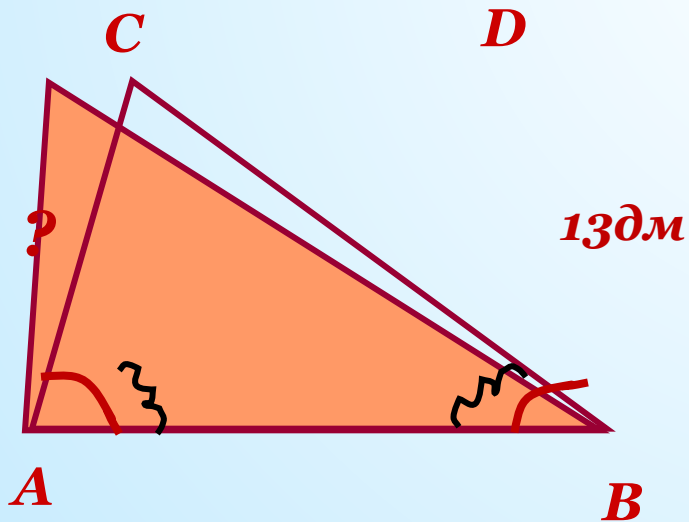
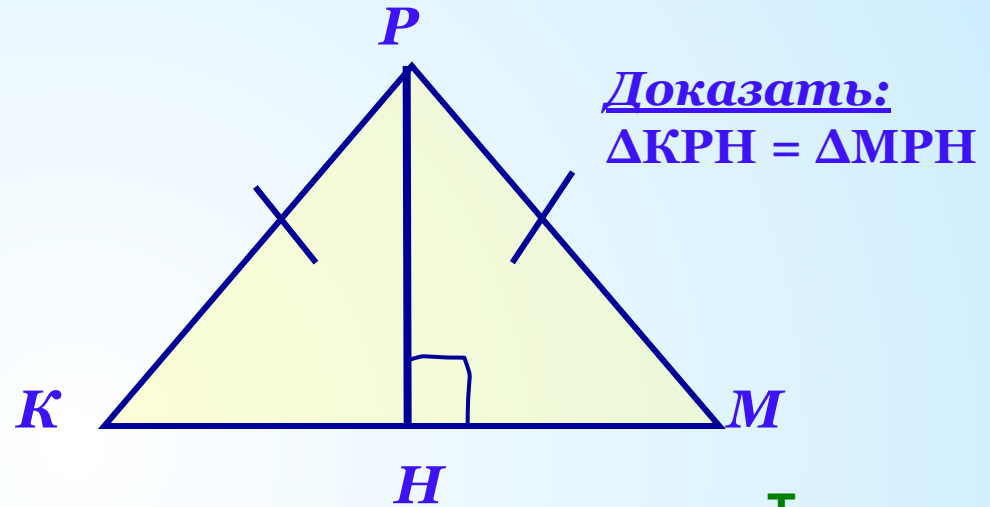
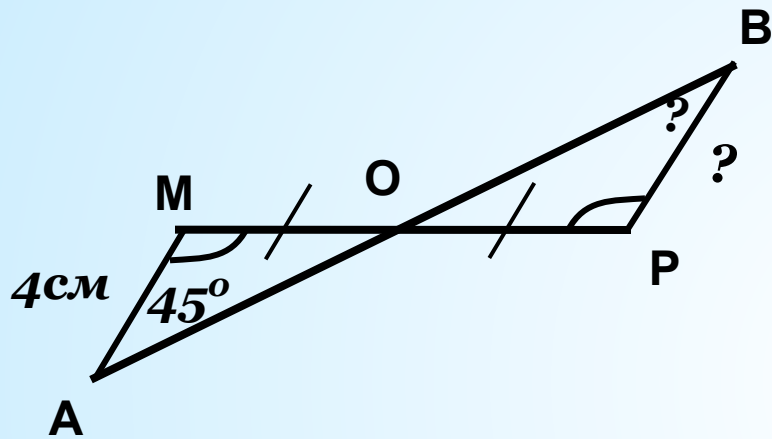
1)  $\triangle ABC$  можно наложить на  $\triangle A_1B_1C_1$  так, чтобы  $AC$  совпала с  $A_1C_1$

2) т.к.  $\angle A = \angle A_1$ , то луч  $AB$  совпадает с лучом  $A_1B_1$ , т.к.  $\angle C = \angle C_1$ , то луч  $CB$  совпадает с лучом  $C_1B_1 \Rightarrow$

3) *совместятся точки  $B$  и  $B_1 \Rightarrow$*

4) Совместятся  $\triangle ABC$  и  $\triangle A_1B_1C_1 \Rightarrow \triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$ , ч.т.д.

# Решение задач по готовым чертежам





# Тест

1. Для доказательства равенства треугольников  $ABC$  и  $MNK$  достаточно доказать, что:

а)  $AC = MN$ ; б)  $\angle C = \angle N$ ; в)  $BC = NK$

2. Для доказательства равенства треугольников  $ABC$  и  $EDF$  достаточно доказать, что:

а)  $AC = FE$ ; б)  $\angle C = \angle E$ ; в)  $\angle A = \angle F$ .

3. Чтобы доказать равенство равнобедренных треугольников  $ABC$  и  $MNK$ , достаточно доказать, что:

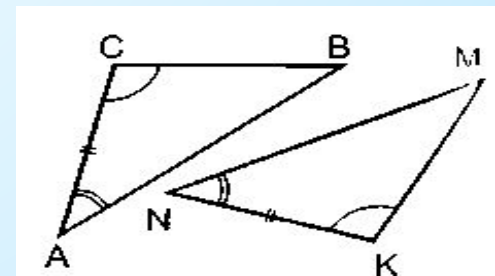
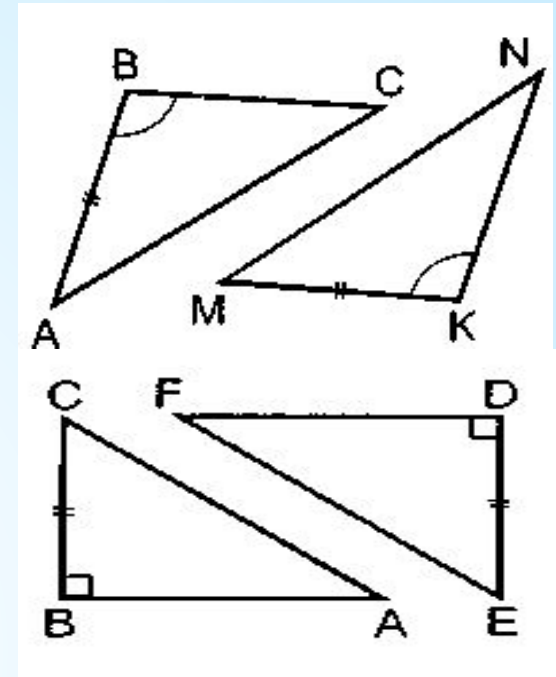
а)  $\angle A = \angle M$ ; б)  $AB = MN$ ; в)  $P_{ABC} = P_{MNK}$ .

4. Чтобы доказать равенство двух равнобедренных треугольников  $TOS$  и  $DEF$  с основаниями  $TS$  и  $DF$  соответственно, достаточно доказать, что:

а)  $\angle O = \angle E$ ; б)  $TS = DF$ ; в)  $\angle T = \angle D$ ; г)  $TS = DF$ .

5. Выберите верное утверждение:

а)  $BC = KM$ ; б)  $AB = KN$ ; в)  $BC = NM$ .



*Примерные задания  
учебника для работы  
и дома*

*из  
в классе*

**В классе:** №125; 127;128

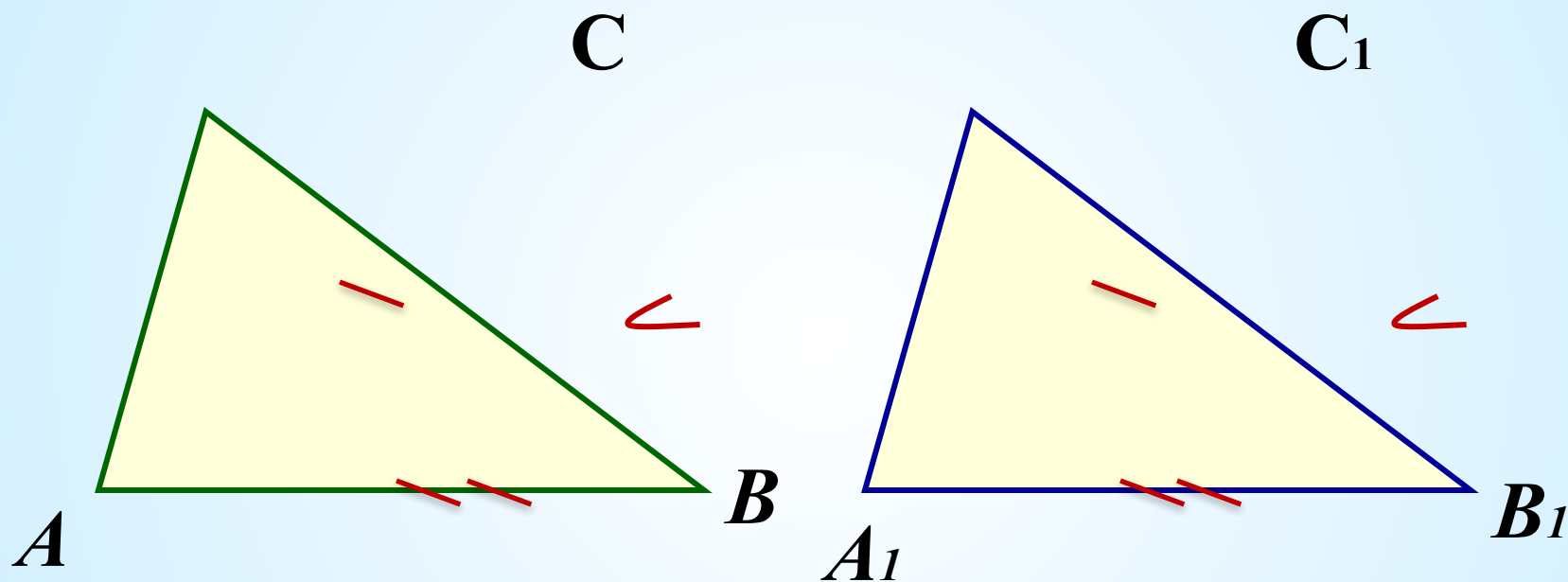
**Дома:** п.19

*(выучить теорему)*

№ 122;124;129

# ТРЕТИЙ ПРИЗНАК

( по трём сторонам )



**Если три стороны одного треугольника  
соответственно равны трём сторонам другого  
треугольника, то такие треугольники равны**

Дано:  $\triangle ABC$ ,  $\triangle A_1B_1C_1$ .

$AB = A_1B_1$ ;  $AC = A_1C_1$ ;

$BC = B_1C_1$

Доказать:

$\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$ .

Доказательство:

Приложим  $\triangle ABC$  к  $\triangle A_1B_1C_1$  так, чтобы

$A$  совместилась с  $A_1$ ;  $B$  - с  $B_1$ , а вершины  $C$  и  $C_1$  оказались по разные стороны от прямой  $A_1B_1$  ( $AB = A_1B_1$ ).

Возможны три случая:

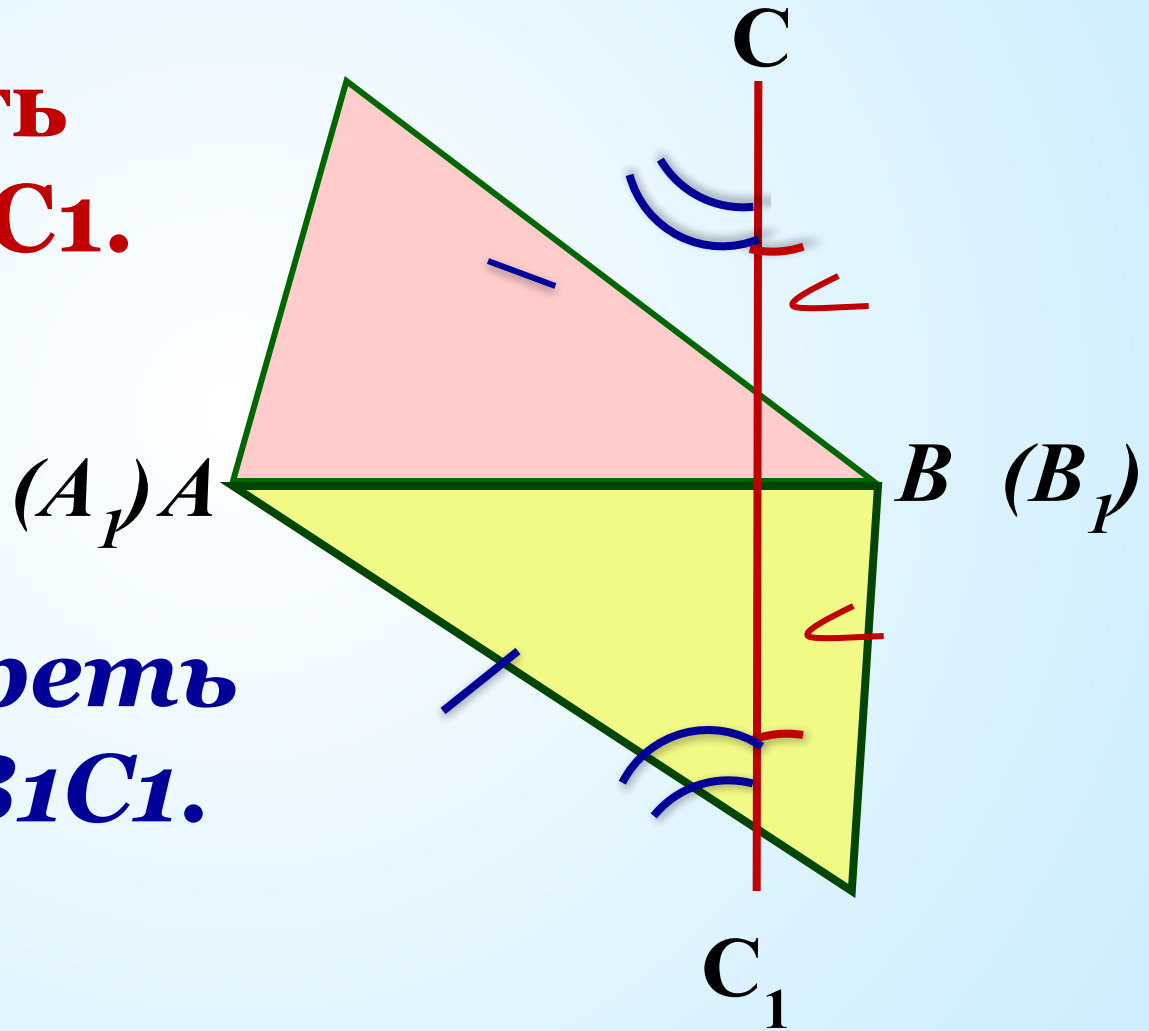
1. Луч  $C_1C$  проходит внутри Луч  $C_1C$  проходит внутри  $\leq$  Луч  $C_1C$  проходит внутри  $<$   $A_1C_1B_1$

2. Луч  $C_1C$  совпадает с одной из сторон 2. Луч  $C_1C$  совпадает с одной из сторон  $\leq$  2. Луч  $C_1C$  совпадает с

# 1 случай

(остроугольные треугольники)

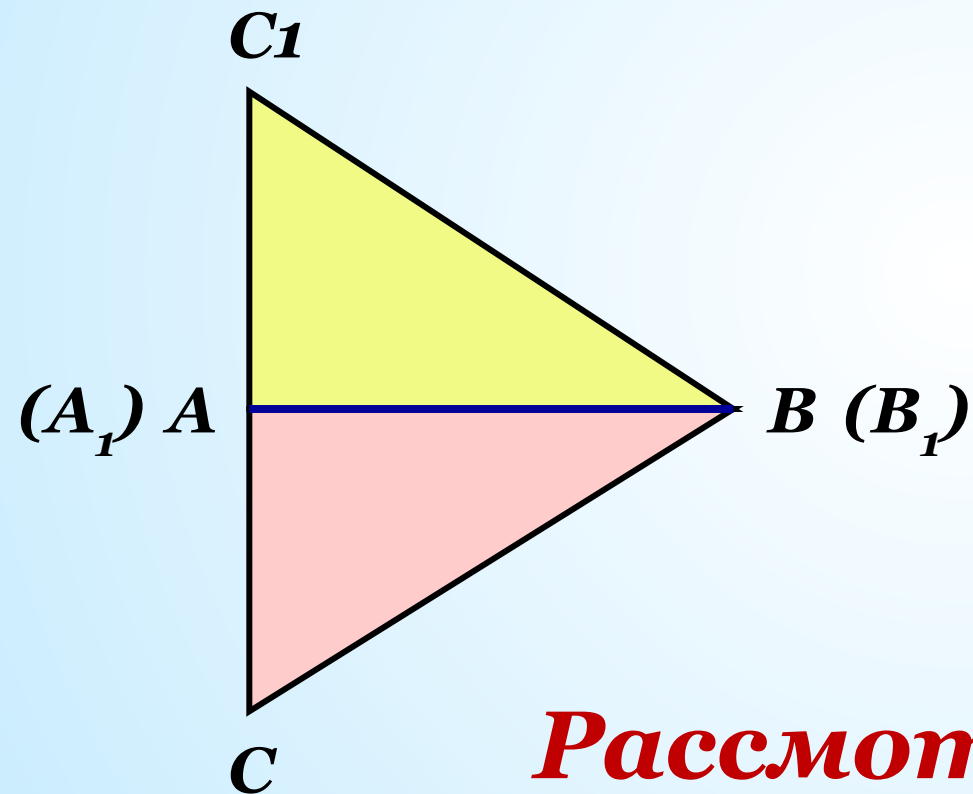
1. Рассмотрим  $\triangle ACC_1$  и  $\triangle BCC_1$ .



2. Рассмотрим  $\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$ .

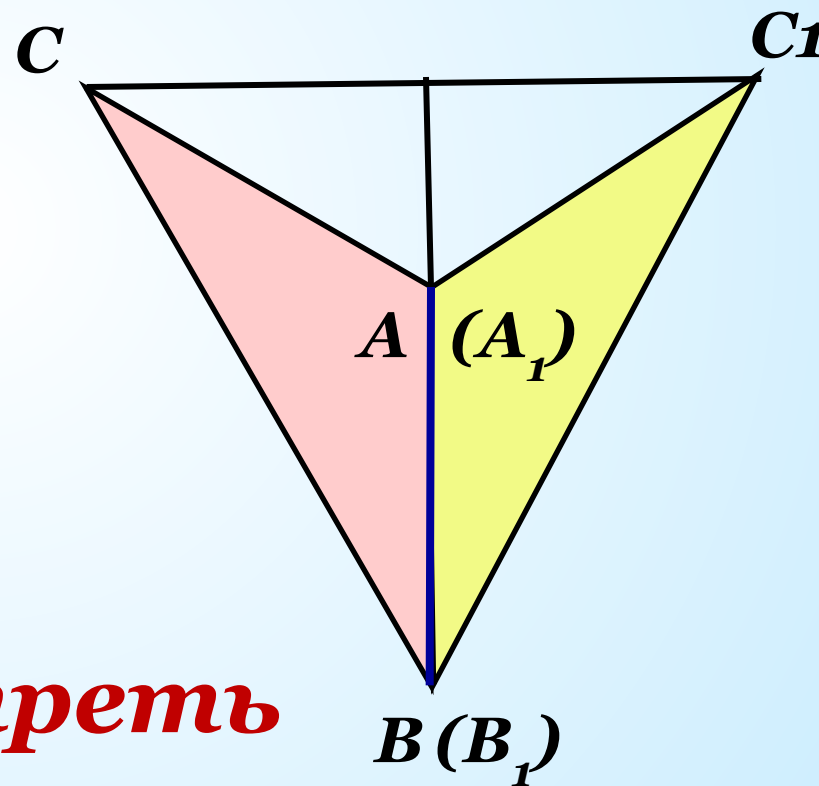
## 2 случай

Прямоугольные  
треугольники



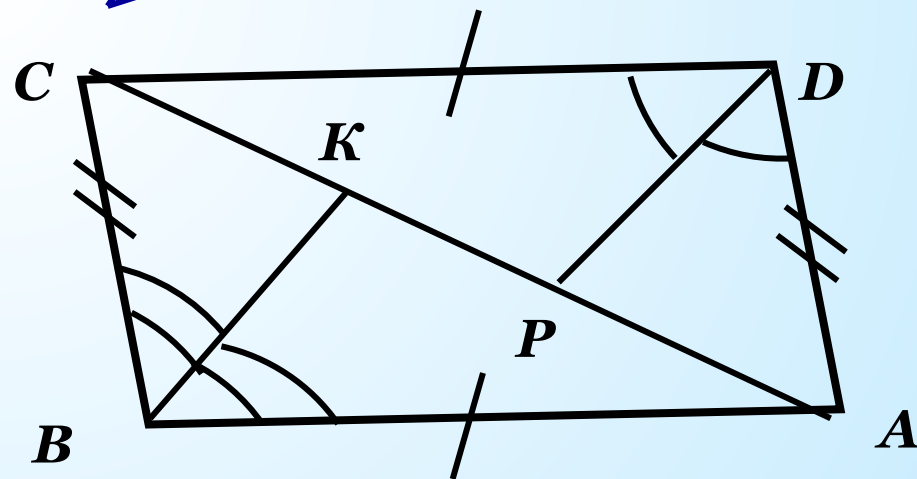
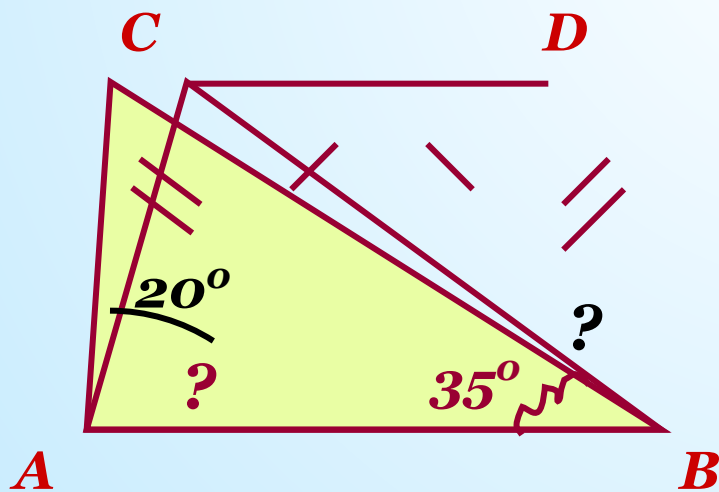
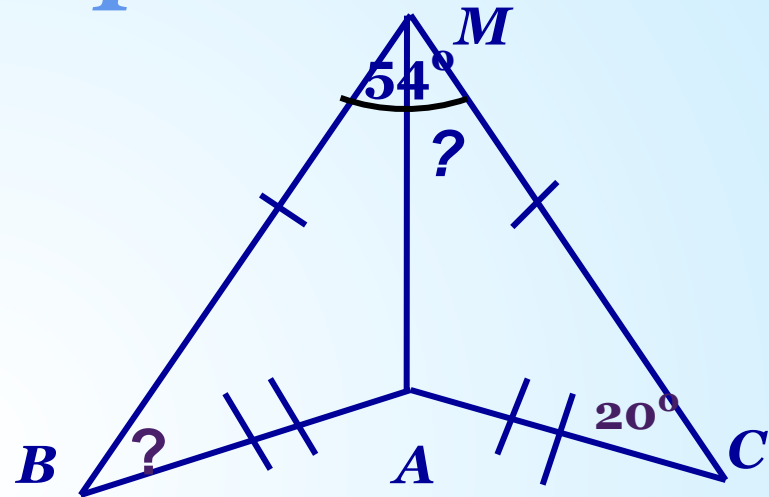
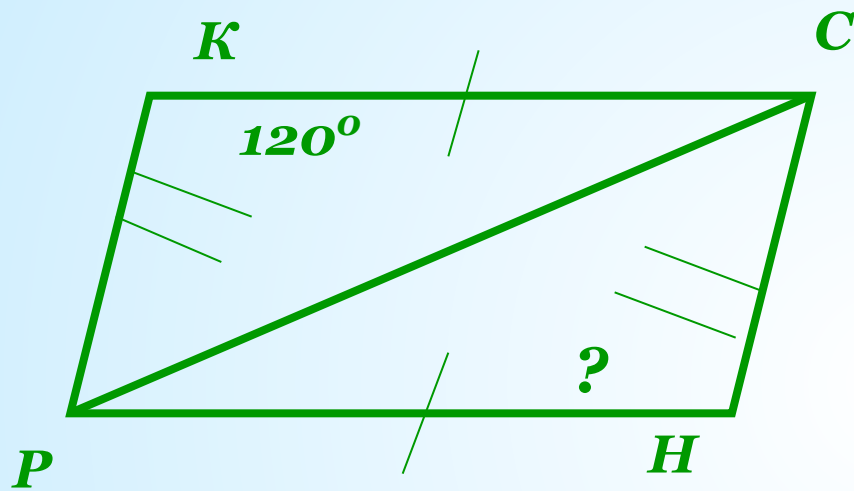
## 3 случай

Тупоугольные  
треугольники



**Рассмотреть  
дома**

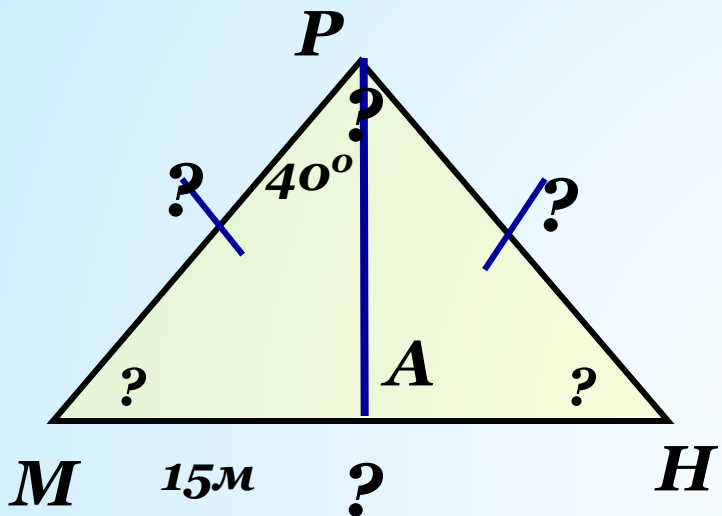
# Решение задач по готовым чертежам



Докажите: 1)  $\angle CDP = \angle ABK$   
 2)  $\triangle CBK = \triangle ADP$

# Самостоятельная работа

**В-1**

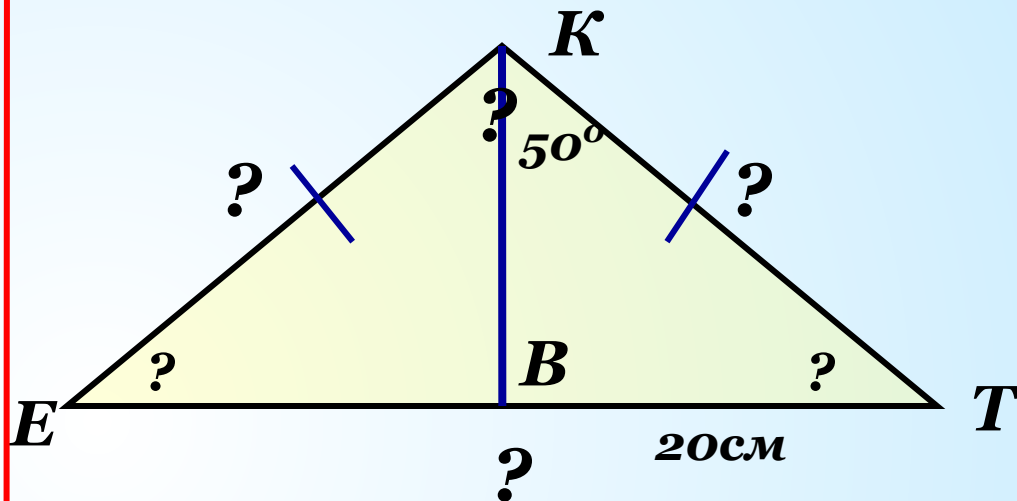


$P = 70\text{м}; \angle M + \angle P + \angle H = 180^\circ$

**№ 118 (а)**

**№ 141**

**В-2**



$P = 60\text{см}; \angle E + \angle K + \angle T = 180^\circ$

**№ 118 (б)**

**№ 140**

**Дополнительно:**

**№ 142**



*Примерные задания  
учебника для работы  
и дома*

*из  
в классе*

**В классе:** №125; 127;128

**Дома:** п.19

*(выучить теорему)*

№ 122;124;129

# Итог

## По теме

### «Признаки равенства треугольников» необходимо знать:

- ❖ Три признака равенства треугольников
- ❖ Определение и построение медианы, биссектрисы и высоты треугольника
- ❖ Определение и свойства равнобедренного треугольника

**Главное уметь применять свои знания на практике при решении разнообразных задач.**

