Числовые ряды. Необходимый признак сходимости ряда. Достаточные признаки сходимости рядов с положительными членами.

Цель урока:

- Обеспечение усвоения понятия числового ряда, его суммы, сходящегося и расходящегося рядов.
- Формирование представлений о признаках сходимости ряда.
- Формирование умений исследования сходимости ряда.

Числовым рядом называется сумма вида:

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_n + \ldots$$

где числа u_1, u_2, u_3,…,u_n,… – ***члены ряда*** (бесконечная последовательность),
u_n – ***общий член ряда***.

Частичные суммы ряда:

$S_1=u_1$,

$S_2=u_1+u_2$,

$S_3=u_1+u_2+u_3$,

……………………

$S_n=u_1+u_2+u_3+\ldots+u_n$

Если $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = S$ *или* $\lim\limits_{n\to\infty}(u_1 + u_2 + \ldots + u_n) = S$,

то ряд называется ***сходящимся****, а число S – **суммой** сходящегося ряда.*

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = u_1 + u_2 + \ldots + u_n + \ldots = S$$

Если частичная сумма S_n *ряда при неограниченном возрастании n не имеет конечного предела (в частности, стремится к +∞ или к -∞), то такой ряд называется* ***расходящимся****.*

Пример. *Найти сумму членов ряда:*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{1}{1*3} + \frac{1}{3*5} + \frac{1}{5*7} + \cdots + \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} + \cdots;$$

Находим частичные суммы членов ряда:

$$S_1 = u_1 = \frac{1}{3}; \qquad S_2 = u_1 + u_2 = \frac{1}{3} + \frac{1}{15} = \frac{2}{5};$$

$$S_3 = u_1 + u_2 + u_3 = \frac{2}{5} + \frac{1}{35} = \frac{3}{7}; \qquad S_4 = u_1 + u_2 + u_3 + u_4 = \frac{3}{7} + \frac{1}{63} = \frac{4}{9}, \ldots.$$

Запишем последовательность частичных $\frac{1}{3}, \frac{2}{5}, \frac{3}{7}, \frac{4}{9}, \ldots$

Общий член этой последовательности есть: *n/(2n+1)*

$$S = \lim_{n \to \infty} S_n = \lim_{n \to \infty} \frac{1}{2 + \frac{1}{n}} = \frac{1}{2}.$$

Последовательность частичных сумм имеет предел, равный 1/2. Итак, ряд сходится и его сумма равна 1/2.

Необходимый признак сходимости ряда

Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ *может сходиться только при условии, что его общий член* u_n *при неограниченном увеличении номера n стремится к нулю:*

$$\lim_{n\to\infty} u_n = 0$$

Если $\lim_{n\to\infty} u_n \neq 0$ *, то ряд* $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ *расходится – это достаточный признак расходимости ряда.*

Достаточные признаки сходимости ряда с положительными членами

а) Признак сравнения рядов с положительными членами.

Исследуемый ряд <u>сходится</u>, если его члены не превосходят соответствующих членов другого, заведомо сходящегося ряда: исследуемый ряд <u>расходится</u>, если его члены превосходят соответствующие члены другого заведомо расходящегося ряда.

б) Признак Даламбера.

Если для ряда с положительными членами

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = u_1 + u_2 + \ldots + u_n + u_{n+1} \ldots (u_n > 0)$$

выполняется условие $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{u_{n+1}}{u_n} = l$ *, то ряд сходится при l<1 и расходится при l>1.*

Признак Даламбера не дает ответа, если l=1. В этом случае для исследования ряда применяют другие приемы.

Геометрический ряд

-образован из членов геометрической прогрессии:

$$\sum_{n=0}^{\infty} aq^n = a + aq + aq^2 + \ldots + aq^n + \ldots$$

$$(a > 0)$$

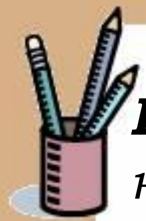
сходится при $|q| < 1$

расходится при $|q| \geq 1$

Обобщенный гармонический ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} = 1 + \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} + \ldots + \frac{1}{n^p} + \ldots$$

сходится при $p > 1$ *расходится при* $p \leq 1$



Пример. *Исследовать сходимость ряда, применяя необходимый признак сходимости и признак сравнения:*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)\cdot 2^n} = \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{3\cdot 2^2} + \frac{1}{5\cdot 2^3} + \ldots + \frac{1}{(2n-1)\cdot 2^n} + \ldots$$

$$\lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{(2n-1)\cdot 2^n} = 0$$

Необходимый признак сходимости ряда выполняется. Для признака сравнения сравним данный ряд с геометрическим:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \ldots + \frac{1}{2^n} + \ldots$$

который сходится, так как q=1/2<1.

Сравнивая члены нашего ряда с соответствующими членами геометрического ряда, получим неравенства:

$$\frac{1}{2} < 1; \frac{1}{3 \cdot 2^2} < \frac{1}{2^2}; \frac{1}{5 \cdot 2^3} < \frac{1}{2^3}; \ldots; \frac{1}{(2n-1) \cdot 2^n} < \frac{1}{2^n}; \ldots$$

Т.е. члены данного ряда соответственно меньше членов геометрического ряда. Следовательно, данный ряд сходится.

Пример. *Исследовать сходимость ряда, используя признак Даламбера:*

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n}{5^n}=\frac{2}{5}+\frac{4}{25}+\frac{6}{125}+\cdots+\frac{2n}{5^n}+\cdots;$$

$$\frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{2(n+1)}{5^{n+1}}:\frac{2n}{5^n}=\frac{n+1}{5n}=\frac{1}{5}\left(1+\frac{1}{n}\right);$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{1}{5}\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)=\frac{1}{5}<1.$$

Следовательно, данный ряд сходится.