



Числовые ряды. Необходимый признак сходимости ряда. Достаточные признаки сходимости рядов с положительными членами.





Цель урока:

- Обеспечение усвоения понятия числового ряда, его суммы, сходящегося и расходящегося рядов.
- Формирование представлений о признаках сходимости ряда.
- Формирование умений исследования сходимости ряда.





Числовым рядом называется сумма вида:

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_n + \dots$$

где числа $u_1, u_2, u_3, \dots, u_n, \dots$ – **члены ряда**
(бесконечная последовательность),
 u_n – **общий член ряда**.

Частичные суммы ряда:

$$S_1 = u_1,$$

$$S_2 = u_1 + u_2,$$

$$S_3 = u_1 + u_2 + u_3,$$

.....

$$S_n = u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_n$$



Если $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S$ или $\lim_{n \rightarrow \infty} (u_1 + u_2 + \dots + u_n) = S$,

то ряд называется **сходящимся**, а число S – **суммой** сходящегося ряда.

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n + \dots = S$$

Если частичная сумма S_n ряда при неограниченном возрастании n не имеет конечного предела (в частности, стремится к $+\infty$ или к $-\infty$), то такой ряд называется **расходящимся**.



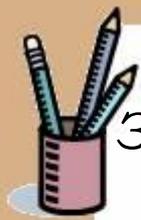
Пример. Найти сумму членов ряда:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)(2n+1)}$$
$$= \frac{1}{1*3} + \frac{1}{3*5} + \frac{1}{5*7} + \dots + \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} + \dots;$$

Находим частичные суммы членов ряда:

$$S_1 = u_1 = \frac{1}{3}; \quad S_2 = u_1 + u_2 = \frac{1}{3} + \frac{1}{15} = \frac{2}{5};$$

$$S_3 = u_1 + u_2 + u_3 = \frac{2}{5} + \frac{1}{35} = \frac{3}{7}; \quad S_4 = u_1 + u_2 + u_3 + u_4 = \frac{3}{7} + \frac{1}{63}$$
$$= \frac{4}{9}, \dots$$



Запишем последовательность частичных

$$\frac{1}{3}, \frac{2}{5}, \frac{3}{7}, \frac{4}{9}, \dots$$

Общий член этой последовательности есть: $n/(2n+1)$

$$S = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2 + \frac{1}{n}} = \frac{1}{2}.$$

Последовательность частичных сумм имеет предел, равный $1/2$. Итак, ряд сходится и его сумма равна $1/2$.



Необходимый признак сходимости ряда

Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ может сходиться только при условии, что его общий член u_n при неограниченном увеличении номера n стремится к нулю:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$$

Если $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n \neq 0$, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ расходится – это достаточный признак расходимости ряда.



Достаточные признаки сходимости ряда с положительными членами

а) Признак сравнения рядов с положительными членами.

Исследуемый ряд сходится, если его члены не превосходят соответствующих членов другого, заведомо сходящегося ряда: исследуемый ряд расходится, если его члены превосходят соответствующие члены другого заведомо расходящегося ряда.

б) Признак Даламбера.

Если для ряда с положительными членами

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n + u_{n+1} \dots (u_n > 0)$$

выполняется условие $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = l$, то ряд сходится при $l < 1$ и расходится при $l > 1$.

Признак Даламбера не дает ответа, если $l = 1$. В этом случае для исследования ряда применяют другие приемы.



Геометрический ряд

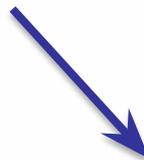
-образован из членов геометрической прогрессии:

$$\sum_{n=0}^{\infty} aq^n = a + aq + aq^2 + \dots + aq^n + \dots$$

$$(a > 0)$$



сходится при $|q| < 1$



расходится при $|q| \geq 1$



Обобщенный гармонический ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} = 1 + \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} + \dots + \frac{1}{n^p} + \dots$$



сходится при $p > 1$



расходится при $p \leq 1$



Пример. Исследовать сходимость ряда, применяя необходимый признак сходимости и признак сравнения:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1) \cdot 2^n} = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{3 \cdot 2^2} + \frac{1}{5 \cdot 2^3} + \dots + \frac{1}{(2n-1) \cdot 2^n} + \dots$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{(2n-1) \cdot 2^n} = 0$$

Необходимый признак сходимости ряда выполняется. Для признака сравнения сравним данный ряд с геометрическим:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{2^n} + \dots$$

который сходится, так как $q = 1/2 < 1$.



Сравнивая члены нашего ряда с соответствующими членами геометрического ряда, получим неравенства:

$$\frac{1}{2} < 1; \frac{1}{3 \cdot 2^2} < \frac{1}{2^2}; \frac{1}{5 \cdot 2^3} < \frac{1}{2^3}; \dots; \frac{1}{(2n-1) \cdot 2^n} < \frac{1}{2^n}; \dots$$

Т.е. члены данного ряда соответственно меньше членов геометрического ряда. Следовательно, данный ряд сходится.



Пример. Исследовать сходимость ряда, используя признак Даламбера:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n}{5^n} = \frac{2}{5} + \frac{4}{25} + \frac{6}{125} + \dots + \frac{2n}{5^n} + \dots;$$

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{2(n+1)}{5^{n+1}} : \frac{2n}{5^n} = \frac{n+1}{5n} = \frac{1}{5} \left(1 + \frac{1}{n}\right);$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{1}{5} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right) = \frac{1}{5} < 1.$$

Следовательно, данный ряд сходится.